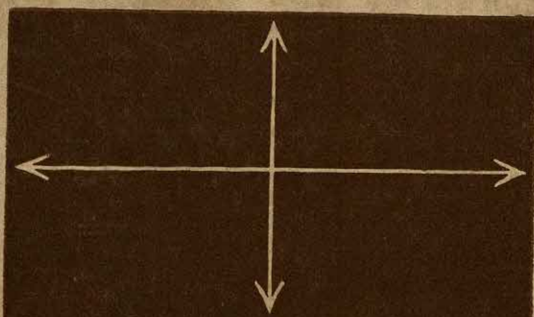
উচ্চমাধ্যমিক গণিত

অধ্যাপক এন. ভঞ্জ
অধ্যাপক এইচ. কে. গাঙ্গুলী



বি. সরকার এ্যাণ্ড কোং
কলিকাতা-৭৩

পশ্চিমবঙ্গ উচ্চ-মাধ্যমিক শিক্ষা-সংসদ কর্তৃক 1976 সাল হইতে প্রবর্তিত একাদশ ও দ্বাদশ শ্রেণীর নূতন পাঠ্যসূচী অনুসরণে লিখিত।

উচ্চ-মাধ্যমিক গণিত

[বীজগণিত, ত্রিকোণমিতি ও স্থানাঙ্ক জ্যামিতি]

[একাদশ ও দ্বাদশ শ্রেণীর পাঠ্য]

(প্রথম পত্র)

অধ্যাপক এন্. ভঞ্জ, এম্. এ., ডি. ফিল্.

নরেন্দ্রপুর রামকৃষ্ণ মিশন আবাসিক মহাবিদ্যালয়ের গণিতের অধ্যাপক। স্নাতকশ্রেণীর 'অ্যানালিসিস্' ও 'জ্যোতির্বিজ্ঞান' এবং নূতন পাঠ্যসূচী অনুযায়ী সপ্তম, অষ্টম, নবম ও দশম শ্রেণীর বীজগণিত, পাটীগণিত, জ্যামিতি ও পরিমিতি প্রভৃতি গ্রন্থের প্রণেতা এবং কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয়ের পরীক্ষক।

ও

অধ্যাপক এইচ. কে. গাঙ্গুলি, এম. এ. (গোল্ড মেডেলিষ্ট)

স্কটিশচার্চ কলেজের গণিত বিভাগের প্রাক্তন প্রধান অধ্যাপক ; বর্তমানে নরেন্দ্রপুর রামকৃষ্ণ মিশন আবাসিক মহাবিদ্যালয়ের গণিত বিভাগের অধ্যাপক এবং কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয়ের পরীক্ষক।

বি. সরকার এ্যাণ্ড কোং

পুস্তক-প্রকাশক ও বিক্রেতা

15 কলেজ স্কোয়ার, কলিকাতা-700073

প্রকাশক :
শ্রীভারতচন্দ্র সরকার
বি সরকার এ্যাণ্ড কোং
15, কলেজ স্কোয়ার
কলিকাতা-700073

প্রথম প্রকাশ :
নভেম্বর, 1976

মূল্য : চব্বিশ টাকা মাত্র

মুদ্রাকর :
শ্রীগঙ্গারাম পাল
মহাবিদ্যা প্রেস
156, তারক প্রমাণিক রোড
কলিকাতা-700006

ভূমিকা

পশ্চিমবঙ্গ উচ্চ মাধ্যমিক শিক্ষা-সংসদ কর্তৃক নির্ধারিত পাঠ্যসূচী অনুযায়ী একাদশ ও দ্বাদশ শ্রেণীর ছাত্র-ছাত্রীদের জন্য এই পুস্তকখানি **সম্পূর্ণ নূতন ভাবে** লিখিত। বাংলাভাষায়, বিশেষ করিয়া গণিতশাস্ত্রের পাঠ্যপুস্তক রচনা করা যে অতি দুরূহ কাজ সে বিষয়ে কোনও সন্দেহ নাই; ইহার প্রধান কারণ, বাংলাভাষায় বিভিন্ন ইংরাজী শব্দের পরিভাষার অত্যন্ত অভাব। যেখানে যেখানে বাংলা প্রতিশব্দ দেওয়া সম্ভব হয় নাই, সেই সমস্ত স্থানে ইংরেজী শব্দটি যথাযথভাবে রাখিয়াছি। এই সমস্ত অসুবিধা সত্ত্বেও সরল ভাষায় এবং বিভিন্ন উদাহরণের মাধ্যমে এই কঠিনতম বিষয়টিকে সহজভাবে বুঝাইয়া লিখিবার যথাসাধ্য চেষ্টা করিয়াছি। পুস্তকখানি যাহাতে একাদশ ও দ্বাদশ শ্রেণীর ছাত্র-ছাত্রীদের ঠিক ঠিক উপযুক্ত হয় সেই দিকে লক্ষ্য রাখিবার জন্য **C.U., Int., P.U., H.S., Joint Ent.,** প্রভৃতি পূর্বতন প্রশ্নগুলির প্রতি দৃষ্টি রাখিয়া এই পুস্তকখানি রচনা করিয়াছি এবং বিভিন্ন উদাহরণগুলিতে ঐ জাতীয় কিছু কিছু প্রশ্ন রাখিয়াছি।

পুরানো ধাঁচে পুস্তক লিখিতে অগ্রসর না হইয়া, পৃথিবীর বিভিন্ন দেশের আধুনিক শিক্ষাপদ্ধতির সঙ্গে সামঞ্জস্য রাখিবার উদ্দেশ্যে সম্পূর্ণ নূতন ভাবে এই পুস্তকখানি রচনায় প্রয়াস পাইয়াছে। সেইজন্য অন্যান্য প্রচলিত পুরানো পুস্তক হইতে এই পুস্তকের মধ্যে বেশ কিছু নূতন বৈশিষ্ট্য পরিলক্ষিত হইবে। যেমন, প্রতিটি অধ্যায়ের সূচনায় বিষয়-বস্তুর পাঠের উদ্দেশ্য উপস্থাপনায় দেওয়া আছে; প্রয়োজন বোধে চিত্রের মাধ্যমে বিষয়বস্তু সহজভাবে বুঝানো হইয়াছে। তাহাছাড়া নিম্নলিখিত বিষয়গুলির আলোচনা সম্পূর্ণ নূতন পদ্ধতিতে দেওয়া আছে:—

(a) **বীজগণিতে**—(i) সূচক-নিয়মাবলী; (ii) জটিল রাশি; (iii) লগরিদ্‌ম্; (iv) বিন্যাস ও সমবায়; (v) দ্বিপদ উপপাদ্য (vi) চক্রবৃদ্ধি সুদ ও বার্ষিকী।

(b) **ত্রিকোণমিতিতে**—(i) θ কোণের সহযোগে উৎপন্ন কোণের কোণানুপাত; (ii) মিশ্রকোণের কোণানুপাত; (iii) ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের সমাধান; (iv) বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষক; (v) ত্রিভুজের সমাধান; (vi) ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের লেখ ও সমাধান।

(c) **স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে**—(i) ঋজুসরণ ও ঘূর্ণন; (ii) সরলরেখা; (iii) কৌণিক; (iv) কণিকের স্পর্শক ও অভিলম্ব; (v) পরিশিষ্ট।

(d) **কলন শাস্ত্রে**—(i) সংখ্যা-পদ্ধতি; (ii) অপেক্ষক; (iii) সীমান্ত মান; (iv) অবকলন; (v) ক্ষেত্রফল; (vi) অবকলন সমীকরণ সমাধান।

(e) **বলবিদ্যায়**– (i) দ্রুতি ও বেগ ; (ii) আপেক্ষিক বেগ ; (iii) নিউটনের সূত্রের প্রয়োগ ; (iv) ভ্রামকের প্রয়োগ ; (v) ঘর্ষণ ; (vi) যন্ত্র ও যন্ত্রের প্রয়োগ।

তাহা ছাড়া, প্রতিটি উদাহরণে যথেষ্ট সংখ্যক নানাধরনের প্রশ্ন সহজতর হইতে কঠিনতম এই ক্রমে সাজানো আছে। এই জাতীয় বিভিন্ন অঙ্কগুলি হইতে, অথবা, এই জাতীয় প্রশ্ন অতি অবশ্যই শেষ পরীক্ষায় আসিবে। পরিশেষে উল্লেখ করা যাইতে পারে, এই পুস্তকের উদাহরণমালায় অঙ্কগুলি কষিয়া সমাধানগুলি একটি পুস্তক আকারে বাহির হইয়াছে। তাহার সাহায্যে বিভিন্ন ধরনের অঙ্ক কষিবার পদ্ধতি ও নিয়ম জানা যাইবে। কলিকাতাস্থ নেতাজী নগর কলেজের গণিত বিভাগের অধ্যাপক শঙ্কর কুমার দে এবং অধ্যাপক অমিতাভ ব্যানার্জী এই পুস্তক রচনার সময় হইতেই আমাদের সাহায্য করায় তাঁহাদের আমরা কৃতজ্ঞতা জানাই।

বিশেষ সতর্কতা সত্ত্বেও পুস্তকখানিতে কোন ত্রুটি পরিলক্ষিত হইলে, তাহা সংশোধনের উদ্দেশ্যে সকল প্রকার উপদেশ ও পরামর্শ সাদরে গৃহীত হইবে। বিনীত—

গ্রন্থকারদ্বয়।

SYLLABUS OF MATHEMATICS

Full Marks—200

Paper I (Marks—100)

Algebra, Trigonometry and Analytical Geometry of Two Dimensions

Algebra : *30 marks :*

Variation, Arithmetical Progression, Geometrical Progression. Surds, Laws of indices. Complex numbers. Theory of quadratic equations. Permutations and Combinations. Binomial theorem for positive integral index ; Idea of Infinite series—sum of infinite G. P. series. Use of Binomial theorem for fractional and negative indices. Logarithms—Compound interest and annuities. Use of logarithmic and exponential series.

Trigonometry : *30 marks :*

Measure of an angle—Degrees, Radians. Trigonometrical ratios of compound angles. Multiple and submultiple angles, complementary and supplementary angles, Graphs of trigonometrical functions ; Graphical and general solutions of Trigonometrical equations. Inverse circular functions. Properties of triangles. Solution of triangles. Problems relating to heights and distances.

Analytical Geometry of Two Dimensions : *40 marks :*

Rectangular cartesian co-ordinates ; Polar co-ordinates ; Transformation from one system to another. Analytical representation of reflexion, translation and rotation. Distance between two points. Division of a segment in a given ratio. Area of triangles. Concept of a locus. Equations of straight lines ; Angle between two lines—Conditions of perpendicularity and parallelism of two lines. Distance of a point from a given Line. Position of a point with respect to a line. Equations of bisectors of angles between two lines. Equations of circles. Idea of conic sections—Focus—Directrix ; definition of a conic section. Eccentricity and axes of conic sections. Equations of Parabola, Ellipse, and Hyperbola referred to their principal axes.

Equations of tangents and normals to circles and the different conics (use of Calculus may be indicated).

সূচীপত্র

বীজগণিত

ত্রিকোণমিতি

দ্বিমাত্রিক স্থানাঙ্ক জ্যামিতি

Meaning of Abbreviations and Notations used:

[1]

Sign	Meaning
(i) $\rightarrow$	Approximately
(ii) $\rightrightarrows$	Equivalence
(iii) $\surd$	Square root
(iv) $\frown$	Sign of angle
(v) $\angle$	Sign of angle
(vi) $\propto$	Variation
(vii) ∞	Infinity (i.e.. the number greater than any large number)
(viii) mod. a	$\lvert a \rvert$ i. e., absolute value of a.

[2]

(i) H. S.	Higher Secondary Examination
(ii) H. S. Comp.	Higher Secondary Compartmental Exa.
(iii) Joint Ent. Ex.	Joint Entrance Examination
(iv) P. U.	Pre-University Examination (Calcutta)
(v) C. U.	Intermediate Examination (Calcutta)
(vi) B. U,	Burdwan University Examination
(vii) N. B. U.	North Bengal University Examination

IMPORTANT FORMULAE AND RESULTS :

1. Fundamental Law of Index :

$$a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

(i) $a^0 = 1$; (ii) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$; (iii) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;

(iv) $(a^m)^n = a^{mn}$; (v) $(ab)^n = a^n \times b^n$; (vi) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

2. Imaginary quantities :

(i) $i = \sqrt{-1}$; $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$; etc.

(ii) If ω is a cube root of unity :

$\omega^3 = 1$; $\omega^4 = \omega$; $\omega^5 = \omega^2$; $\omega^6 = 1$; etc.

$1 + \omega + \omega^2 = 0.$

3, Quadratic equation :

$ax^2 + bx + c = 0$, roots : α, β,

(i) $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

(ii) $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$; $\alpha\beta = \frac{c}{a}$.

4. (i) $a + (a+b) + (a+2b) + \cdots\cdots + \{a + (n-1)b\}$
$= \frac{1}{2}[a + \{a + (n-1)b\}] \times n.$

(ii) $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots\cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

(iii) $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots\cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(iv) $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots\cdots + n^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$.

5. (i) $a + ar + ar^2 + \cdots\cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$

(ii) $A > G > H$.

6. (i) $\log_a(m \times n) = \log_a m + \log_a n$, $(m > 0,\ n > 0 ;\ a > 0,\ a \neq 1)$.

(ii) $\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$, $(m > 0,\ n > 0 ;\ a > 0,\ a \neq 1)$.

(iii) $\log_a(m^n) = n \log_a m$, $(m > 0 ;\ a > 0,\ a \neq 1)$.

(iv) $\log_a{}^b = \log_a{}^c \times \log_c{}^b$, $(a,\ b,\ c > 0,\ \neq 1)$.

(v) $\log_a{}^b = \frac{1}{\log_b{}^a}$, $(a,\ b > 0 ;\ a,\ b \neq 1)$.

7. $^nP_r = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1) = \dfrac{\lfloor n}{\lfloor n-r}$

8. $^nC_r = \dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{r.(r-1).(r-2)\ldots\ldots 3.2.1} = \dfrac{\lfloor n}{\lfloor r \lfloor n-r}$

(i) $^rC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$; (ii) $^nC_r = {}^nC_{n-r}$

(iii) $^nC_0 = {}^nC_n = 1$; $^nC_1 = n.$

(iv) $^nC_1 + {}^nC_2 + {}^nC_3 + \ldots\ \ldots + {}^nC_n = 2^n - 1.$

9. (i) When n is a positive integer,

$(a+x)^n = a^n + {}^nC_1 a^{n-1}x + {}^nC_2 a^{n-2}x^2 + \ldots\ \ldots + x^n.$

(ii) When $n \neq$ a positive integer, and $|x| < |$,

$(1+x)^n = 1 + nx + \dfrac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^2 + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}x^3 + \ldots\ldots$ to infinity.

10. (i) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots\ \ldots$ to infinity.

(ii) $a^x = e^{x \log_e a}$

$= 1 + x(\log_e a) + \dfrac{x^2}{2!}(\log_e a)^2 + \ldots\ \ldots$ to infinity.

11. (i) $\log_e(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \ldots\ \ldots$ to ∞ ; $(-1 < x \leq 1)$.

(ii) $\log(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} - \ldots\ \ldots$ to ∞ ; $(-1 \leq x < 1)$

12. Compound Interest :

When P = principal ; A = amount ;

n = number of years ; I = total Interest ;

r = Interest per rupee per year ;

$A = P(1+r)^n$; $I = A - P = P\{(1+r)^n - 1$

13. Annuity :

V = Present value of annuity A for n years,

when r = Interest per rupee per year :

$V = \dfrac{A}{r}\left\{1 - \dfrac{P}{(1+r)^n}\right\}$

14. If $A \propto B$ when C is constant, and

$A \propto C$ when B is constant, then

$A \propto BC$ when both B and C vary.

SOME USEFUL RESULTS

(1) $e = 2{\cdot}718,281,84\ldots$;

$\frac{1}{e} = 0{\cdot}367,879,44\ldots$

(2) $\pi = 3{\cdot}141,592,65\ldots$;

$\frac{1}{\pi} = 0{\cdot}318,309,89\ldots$

(3) $\sqrt{2} = 1{\cdot}414,213,5\ldots$

$\sqrt{3} = 1{\cdot}732,050,8\ldots$

$\sqrt{5} = 2{\cdot}236,706,8\ldots$

(4) $\log_{10}2 = {\cdot}3010300$

$\log_{10}3 = {\cdot}4771213$

$\log_{10}5 = {\cdot}6989700$

$\log_{10}7 = {\cdot}8450937$

(5) $\log_{10}N = \mu \times \log_e N$

$\mu = \log_{10}e = 0{\cdot}434,\ 294,\ 48\ldots$

$\frac{1}{\mu} = \log_e 10 = 2{\cdot}302,\ 585,\ 09\ldots$

বীজগণিত

প্রথম অধ্যায়

সূচক-নিয়মাবলী
[Laws of Indices]

1-1. উপস্থাপন।

(*a*) **ঘাত ঃ** কোন একটি রাশি a কে n সংখ্যক বার লইয়া ক্রমশঃ গুণ করিয়া গেলে যে গুণফল পাওয়া যাইবে তাহাকে a এর n-তম **ঘাত** বা **শক্তি** (power) বলা হয় এবং সংক্ষেপে এই গুণফলকে a^n রূপে লেখা হয় এবং n কে a^n-এর **সূচক** (index) এবং a কে **নিধান** (base) বলা হয়।

স্থতরাং,

$a \times a = a^2$;

$a \times a \times a = a^3$;

$a \times a \times a \times a = a^4$, ইত্যাদি।

$a \times a \times a \times \cdots\cdots n$ সংখ্যক a পর্যন্ত $= a^n$.

বিশেষতঃ, a^2 কে a এর **বর্গ** (square) এবং a^3 কে a এর **ঘন** (cube) বলা হয়। a^1 কে সাধারণতঃ a লেখা হয়।

এখন, $1 \times 1 \times 1 \times \cdots\cdots n$ সংখ্যক 1 পর্যন্ত $= 1$;

$0 \times 0 \times 0 \times \cdots\cdots n$ সংখ্যক 0 পর্যন্ত $= 0$;

স্থতরাং, n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইলে, $1^n = 1$ এবং $0^n = 0$.

লক্ষ্যণীয় ঃ m এবং n উভয়ই ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইলে,

$a^m \times a^n = (a \times a \times a \times \cdots\cdots m$ সংখ্যক বার)

$\times (a \times a \times a \times \cdots\cdots n$ সংখ্যক বার)

$= a \times a \times a \times \cdots\cdots (m+n)$ সংখ্যক বার

$= a^{m+n}$.

যেমন, $3^2 \times 3^3 = 3^5$; $4^3 \times 4^2 = 4^5$; $(\frac{2}{3})^2 \times (\frac{2}{3})^4 = (\frac{2}{3})^6$

(*b*) **মূল ঃ** (i) x ও a দুইটি বাস্তব রাশি যদি এমন হয় যে, $x^2 = a$, তাহা হইলে x কে a এর **দ্বিতীয় মূল বা বর্গমূল** (square root) বলা হয়, এবং ইহাকে সংক্ষেপে $x = a^{\frac{1}{2}}$ বা $\sqrt[2]{a}$ বা $\sqrt{a}$ লেখা হয়। যেমন, $5 = \sqrt{25}$, কারণ $5^2 = 25$.

(ii) x ও b বাস্তব রাশির জন্য যদি $x^3 = b$ হয়, তবে x কে b এর **তৃতীয় মূল** বা **ঘনমূল** (cube root) বলা হয় এবং ইহাকে সংক্ষেপে $x = b^{\frac{1}{3}}$ বা $\sqrt[3]{b}$ লেখা হয়। যেমন, $2 = \sqrt[3]{8}$, কারণ $2^3 = 8$.

(iii) সেইরূপ, x এবং k দুইটি বাস্তব রাশি যদি এইরূপ হয় যে $x^n = k$, যেখানে n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা, তাহা হইলে x কে k এর n-তম মূল (nth root) বলা হয়। এবং সংক্ষেপে ইহাকে $x = k^{\frac{1}{n}}$ বা $\sqrt[n]{k}$ লেখা হয়। যেমন, $2 = \sqrt[5]{32}$, কারণ $2^5 = 32$.

বিশেষ দ্রষ্টব্য :

$3^2 = 9$ বলিয়া, $\sqrt{9} = 3$; আবার, $(-3)^2 = 9$ বলিয়া, $\sqrt{9} = -3$;

সুতরাং, 9 এর বর্গমূল $+3$ বা -3 হইতে পারে। অতএব কোন একটি ধনাত্মক বাস্তব রাশি a এর বর্গমূল বলিতে $\pm\sqrt{a}$ কে বুঝাইবে।

কিন্তু কোন একটি ধনাত্মক বাস্তব রাশির পূর্বে '+' অথবা '−' সহ বর্গমূল চিহ্ন ($\sqrt{}$) থাকিলে এইরূপ ক্ষেত্রে কেবলমাত্র একটি মানকে বুঝাইবে। যেমন, $+\sqrt{4} = +2$; $-\sqrt{4} = -2$; $+\sqrt{9} = 3$; $-\sqrt{16} = -4$.

সাধারণতঃ, $+\sqrt{a}$ কে $\sqrt{a}$ লেখা হয়।

সেইরূপ, x ধনাত্মক বাস্তব রাশি এবং n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইলে, $x^{\frac{1}{n}}$ দ্বারা কেবল ধনাত্মক রাশিকেই বুঝাইবে।

1-2. মৌলিক সূচক নিয়ম (Fundamental Index Law) :

$$a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

পূর্বোল্লিখিত সংজ্ঞানুসারে, m ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইল a^m দ্বারা aকে m সংখ্যক বার গুণ করা বুঝায় ; এইরূপ ক্ষেত্রে a^m অর্থযুক্ত। তাহাছাড়া, m ও n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইলে সূচক নিয়ম $a^m \times a^n = a^{m+n}$ অর্থযুক্ত।

পূর্বে দেওয়া সংজ্ঞা থেকে, $(16)^{\frac{1}{4}} = 2$, কারণ $2^4 = 16$; $(64)^{\frac{1}{3}} = 4$, কারণ, $4^3 = 64$. কিন্তু $5^{\frac{1}{2}}$, $7^{\frac{1}{3}}$, $(15)^{\frac{1}{4}}$ ইত্যাদি রাশিগুলির মান কত তাহা পূর্ব সংজ্ঞা থেকে বুঝা যায় না। তাহাছাড়া, 5^0, 7^{-4}, $6^{\frac{2}{3}}$, $3^{-\frac{5}{2}}$ জাতীয় রাশিগুলির দ্বারা কি বুঝায় তাহাও জানা যায় না। সুতরাং সাধারণভাবে, m ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা ভিন্ন অপর কোন বাস্তব রাশি হইলে a^m এর অর্থ পূর্বের আলোচনা থেকে পাওয়া যায় না।

বীজগণিতে একটি নিয়ম কোন বিশেষ ক্ষেত্রে প্রযোজ্য হইলে তাহা সর্বক্ষেত্রে প্রযোজ্য হওয়া উচিত। $a^m \times a^n = a^{m+n}$ সূচক নিয়মটি m ও n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার ক্ষেত্রে প্রযোজ্য। সুতরাং, m এর যে কোন বাস্তব মানের জন্য a^m এর অর্থ এমন হওয়া উচিত যাহাতে $a^m \times a^n = a^{m+n}$ সূচক নিয়মটি সর্বক্ষেত্রে প্রযোজ্য হয়। সেইজন্য m ও n যে কোন বাস্তব রাশি হইলে $a^m \times a^n = a^{m+n}$ কে **মৌলিক সূচক নিয়ম** হিসাবে ধরিয়া a^m এর অর্থ নির্ণয় করিতে অগ্রসর হইব।

1-3. a^m এর অর্থ।

(i) m **ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা** হইলে, a^m দ্বারা a কে m সংখ্যকবার লইয়া গুণ করা বুঝায়।

(ii) $m=\frac{1}{n}$ (যেখানে n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা) হইলে 'মৌলিক সূচক নিয়ম' অনুযায়ী,

$$a^{\frac{1}{n}}\times a^{\frac{1}{n}}\times a^{\frac{1}{n}}\times\cdots\cdots n \text{ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত}$$
$$=a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots\cdots n \text{ সংখ্যক পদ পর্যন্ত}}$$
$$=a^{\frac{1}{n}\times n}=a^1=a$$

অর্থাৎ $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n=a.$ সুতরাং, $a^{\frac{1}{n}}$ দ্বারা a এর n-তম মূলকে বুঝায়। যেমন, $7^{\frac{1}{5}}$ দ্বারা 7 এর পঞ্চতম মূলকে বুঝাইবে।

(iii) $m=\frac{p}{q}$ (যেখানে p ও q ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা) হইলে, 'মৌলিক সূচক নিয়ম' অনুযায়ী

$$a^{\frac{p}{q}}\times a^{\frac{p}{q}}\times a^{\frac{p}{q}}\times\cdots\cdots q \text{ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত}$$
$$=a^{\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\cdots\cdots q \text{ সংখ্যক পদ পর্যন্ত}}$$
$$=a^{\frac{p}{q}\times q}=a^p$$

অর্থাৎ, $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q=a^p.$

সুতরাং, $a^{\frac{p}{q}}$ দ্বারা a^p এর q-তম মূলকে বুঝায় অর্থাৎ $a^{\frac{p}{q}}=\left(a^p\right)^{\frac{1}{q}}$ বা, $\sqrt[q]{a^p}.$

আবার, 'মৌলিক সূচক নিয়ম' দ্বারা পাই,

$$a^{\frac{1}{q}}\times a^{\frac{1}{q}}\times a^{\frac{1}{q}}\times\cdots\cdots p \text{ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত}$$
$$=a^{\frac{1}{q}+\frac{1}{q}+\frac{1}{q}+\cdots\cdots p \text{ সংখ্যক পদ পর্যন্ত}}$$
$$=a^{\frac{1}{q}\times p}=a^{\frac{p}{q}}.$$

সুতরাং, $\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p=a^{\frac{p}{q}}$ অর্থাৎ $a^{\frac{p}{q}}=\left(\sqrt[q]{a}\right)^p.$

তাহা হইলে, $a^{\frac{p}{q}}$ দ্বারা $\left(a^p\right)^{\frac{1}{q}}$ এবং $\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$ এর উভয়কেই বুঝাইবে।

যেমন, $8^{\frac{2}{3}}=\left(8^2\right)^{\frac{1}{3}}=\left(64\right)^{\frac{1}{3}}=4$;

আবার, $8^{\frac{2}{3}}=\left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2=(2)^2=4.$

মন্তব্য ঃ $\sqrt[q]{a^p}=(\sqrt[q]{a})^p$ সর্বক্ষেত্রে নাও হইতে পারে।
যেমন, $(\sqrt[2]{4})^4=(\pm 2)^4=16$;
কিন্তু, $\sqrt[2]{4^4}=\sqrt[2]{256}=\pm 16$;
যদিও $\sqrt[2]{4^4}$ এর **প্রধান মান** (Principal Value) $=16$.

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ m ধনাত্মক মূলদ (rational) রাশি হইলে a^m এর অর্থ পূর্ব আলোচনা হইতে পাওয়া গেল। m এর মান ধনাত্মক অমূলদ (irrational) রাশি হইলেও a^m এর অর্থ থাকিবে। কিন্তু সেই আলোচনা পাঠ্যসূচীর বহির্ভূত বলিয়া এখানে দেওয়া সম্ভব হইল না। m ধনাত্মক অমূলদ রাশি হইলে a^m এর অর্থ আছে ধরিয়া আমরা পরবর্তী আলোচনায় অগ্রসর হইব।

(iv) 'মৌলিক সূচক নিয়ম' অনুসারে

$$a^0\times a^m=a^{0+m}=a^m$$

তাহা হইলে, $a^0=a^m\div a^m=1$.

$$\therefore\quad \boldsymbol{a^0=1}.$$

মন্তব্য ঃ 0^0 **অর্থহীন।**

(v) m যে কোন ধনাত্মক বাস্তব রাশি হইলে, 'মৌলিক সূচক নিয়ম' হইতে,

$$a^{-m}\times a^m=a^{-m+m}=a^0=1.$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a^{-m}=\frac{1}{a^m}}\ \text{এবং}\ \boldsymbol{\frac{1}{a^{-m}}=a^m}$$

যেমন, $a^{-3}=\dfrac{1}{a^3}$; $a^{-\frac{2}{5}}=\dfrac{1}{a^{\frac{2}{5}}}$; $\dfrac{1}{a^{-2}}=a^2$.

1-4. (1) $\boldsymbol{\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}}$.

'মৌলিক সূচক নিয়ম' হইতে পাই,

$$a^{m-n}\times a^n=a^{m-n+n}=a^m$$

$$\therefore\quad a^{m-n}=a^m\div a^n.$$

$$\therefore\quad a^m\div a^n=a^{m-n}.$$

অর্থাৎ, $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$.

যেমন, $\dfrac{3^5}{3^3}=3^{5-3}=3^2=9$;

$$\frac{2^3}{2^5}=2^{3-5}=2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4};$$

$$a^{\frac{7}{2}}\div a^{\frac{5}{2}}=a^{\frac{7}{2}-\frac{5}{2}}=a^1=a.$$

(2) $\boldsymbol{(a^m)^n = a^{mn}}$

(*i*) m এর মান যাহাই হউক না কেন, n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইলে,

$(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times \cdots\cdots n$ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত

$= a^{m+m+m} + \cdots\cdots\cdots n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$= a^{m \times n} = a^{mn}.$

(*ii*) $n = \frac{p}{q}$ হইলে, যেখানে p এবং q ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা (m এর মান যাহাই হউক না কেন),

$$(a^m)^n = (a^m)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(a^m)^p} = \sqrt[q]{a^{mp}}$$

$$= a^{\frac{mp}{q}} = a^{m \times \frac{p}{q}} = a^{m \times n} = a^{mn}.$$

(*iii*) মনে করি, $n = -s$, যেখানে s একটি ধনাত্মক মূলদ রাশি। তাহা হইলে m-এর যে কোন মানের জন্য,

$$(a^m)^n = (a^m)^{-s} = \frac{1}{(a^m)^s} = \frac{1}{a^{ms}}$$

$$= a^{-ms} = a^{m(-s)} = a^{mn}.$$

সুতরাং, m এবং n যে কোন মূলদ রাশি হইলে, $(a^m)^n = a^{mn}$.

যেমন, $\left(4^{\frac{1}{8}}\right)^4 = 4^{\frac{1}{8} \times 4} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2.$

দ্রষ্টব্য : $\{(a^m)^n\}^p = (a^m)^{np} = a^{mnp}.$

(3) $\boldsymbol{(ab)^n = a^n \times b^n}$.

(*i*) n যে কোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইলে,

$(ab)^n = (ab) \times (ab) \times \cdots\cdots\cdots n$ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত

$= (a \times a \times a \times \cdots\cdots\cdots n$ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত)

$\times (b \times b \times b \times \cdots\cdots\cdots n$ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত)

$= a^n \times b^n = a^n b^n.$

(*ii*) মনে করি, $n = \frac{p}{q}$, যেখানে p এবং q ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। তাহা হইলে,

$$(ab)^n = (ab)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(ab)^p} = \sqrt[q]{a^p b^p}$$

$$= \sqrt[q]{a^{nq} b^{nq}} = \sqrt[q]{(a^n)^q (b^n)^q}$$

$$= \sqrt[q]{(a^n b^n)^q} = \{(a^n b^n)^q\}^{\frac{1}{q}} = a^n b^n.$$

(*iii*) মনে করি, $n = -s$, যেখানে s একটি ধনাত্মক মূলদ রাশি। তাহা হইলে,

$$(ab)^n = (ab)^{-s} = \frac{1}{(ab)^s} = \frac{1}{a^s b^s} = \frac{1}{a^s} \cdot \frac{1}{b^s}$$

$$= a^{-s} b^{-s} = a^n b^n.$$

সুতরাং, n যে কোন মূলদ রাশি হইলে,

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

যেমন, $\sqrt{a^2b^4} = (a^2b^4)^{\frac{1}{2}} = (a^2)^{\frac{1}{2}} \times (b^4)^{\frac{1}{2}} = ab^2.$

দ্রষ্টব্য : $(abc\cdots\cdots)^n = a^n b^n c^n \cdots\cdots\cdots$.

(4) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

n যে কোন মূলদ রাশি হইলে,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(a \times \frac{1}{b}\right)^n = (a \times b^{-1})^n = a^n \times (b^{-1})^n = a^n \times b^{-n} = \frac{a^n}{b^n},$$

যেমন, $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}.$

মন্তব্য : আলোচ্য নিয়মগুলি m এবং n মূলদ রাশির জন্য প্রমাণ করা হইল। m এবং n অমূলদ রাশি হইলেও এই নিয়মগুলি সিদ্ধ। কিন্তু সেই আলোচনা পাঠ্যসূচীর বহির্ভূত বলিয়া ইহাদের প্রমাণ এখানে দেওয়া হইল না।

উদাহরণ 1. মান বাহির কর :

(*i*) $16^{\frac{3}{2}}$, (*ii*) $\sqrt[4]{81}$, (*iii*) $(27^2)^{\frac{1}{3}}$ (*iv*) $(\sqrt[4]{16})^3$.

(*i*) প্রদত্ত রাশি $= \{(4)^2\}^{\frac{3}{2}} = 4^{2\times\frac{3}{2}} = 4^3 = 64.$

(*ii*) প্রদত্ত রাশি $= \sqrt[4]{3^4} = (3^4)^{\frac{1}{4}} = 3^{4\times\frac{1}{4}} = 3^1 = 3.$

(*iii*) প্রদত্ত রাশি $(27)^{\frac{2}{3}} = \{3^3\}^{\frac{2}{3}} = 3^{3\times\frac{2}{3}} = 3^2 = 9.$

(*iv*) প্রদত্ত রাশি $= \left\{(16)^{\frac{1}{4}}\right\}^3 = 16^{\frac{3}{4}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^3 = 8.$

উদাহরণ 2. মান নির্ণয় কর :

(*i*) $\sqrt[5]{32^4}$, (*ii*) $\left(\frac{125}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$, (*iii*) $\left(25^{-3} \times 16^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{6}}$.

(*i*) প্রদত্ত রাশি $= \sqrt[5]{(2^5)^4} = \sqrt[5]{2^{5\times4}} = \sqrt[5]{2^{20}}$

$$= (2^{20})^{\frac{1}{5}} = 2^{20\times\frac{1}{5}} = 2^4 = 16.$$

(*ii*) প্রদত্ত রাশি $= \left(\frac{5^3}{2^3}\right)^{-\frac{4}{3}} = (5^3 \,.\, 2^{-3})^{-\frac{4}{3}}$

$$= (5^3)^{-\frac{4}{3}} \times (2^{-3})^{-\frac{4}{3}} = 5^{-4} \times 2^4$$

$$= \frac{1}{5^4} \times 2^4 = \frac{1}{625} \times 16 = \frac{16}{625}.$$

(*iii*) প্রদত্ত রাশি $= \left\{(5^2)^{-3} \times (2^4)^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{6}} = \{5^{-6} \times 2^6\}^{\frac{1}{6}}$

$$= (5^{-6})^{\frac{1}{6}} \times (2^6)^{\frac{1}{6}} = 5^{-1} \times 2^1 = \tfrac{1}{5} \times 2 = \tfrac{2}{5}.$$

উদাহরণ 3. সরল কর :

$$4^{\frac{1}{3}}\times\left(2^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{1}{2}}\right)^7\div\left\{9^{\frac{1}{4}}\times12^0\right\}$$

প্রদত্ত রাশি $=(2^2)^{\frac{1}{3}}\times(2^{\frac{7}{3}}\times3^{\frac{7}{2}})\div\{(3^2)^{\frac{1}{4}}\times1\}$

$=2^{\frac{2}{3}}\times(2^{\frac{7}{3}}\times3^{\frac{7}{2}})\div3^{\frac{1}{2}}$

$=2^{\frac{2}{3}+\frac{7}{3}}\times3^{\frac{7}{2}}\div3^{\frac{1}{2}}$

$=2^3\times3^{\frac{7}{2}}\div3^{\frac{1}{2}}=2^3\times3^{\frac{7}{2}-\frac{1}{2}}$

$=2^3\times3^3=8\times27=216$

উদাহরণ 4. সরল কর : $\left\{(\sqrt[3]{a^4})^{-\frac{3}{2}}\right\}^{-\frac{1}{2}}$.

প্রদত্ত রাশি $=(\sqrt[3]{a^4})^{-\frac{3}{2}\times(-\frac{1}{2})}=(\sqrt[3]{a^4})^{\frac{3}{4}}$

$=\left\{(a^4)^{\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{3}{4}}=(a^4)^{\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}}=(a^4)^{\frac{1}{4}}$

$=a^{4\times\frac{1}{4}}=a^1=a.$

উদাহরণ 5. সরল কর : $\sqrt[5]{a^8\sqrt{a^6\sqrt{a^{-4}}}}$

প্রদত্ত রাশি $=\sqrt[5]{a^8.\sqrt{a^6a^{-2}}}=\sqrt[5]{a^8.\sqrt{a^4}}$

$=\sqrt[5]{a^8.a^2}=\sqrt[5]{a^{10}}=a^2.$

উদাহরণ 6. সরল কর : $\dfrac{a^{2(m+n)}.a^{3m-8n}}{a^{5m-7n}}$

প্রদত্ত রাশি $=\dfrac{a^{2m+2n+3m-8n}}{a^{5m-7n}}=\dfrac{a^{5m-6n}}{a^{5m-7n}}$

$=a^{5m-6n}.a^{-5m+7n}=a^n.$

প্রশ্নমালা 1

1. সঠিক উত্তরটি চিহ্নিত কর :

(i) $\sqrt[4]{16}=+2,\ -2,\ \pm2$; (ii) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}=2,\ -2,\ \pm2$;

(iii) $(\sqrt[2]{4})^4=16,\ -16,\ \pm16$; (iv) $\sqrt[2]{(2^4)}=+4,\ -4,\ \pm4.$

2. তারকাচিহ্নিত স্থানে উপযুক্ত পদ বসাও :

(i) $\sqrt{25}=*$, (ii) $4^{-\frac{3}{2}}=*$, (iii) $(\frac{1}{9})^{-\frac{3}{2}}=*$

(iv) $(9^{-2})^{-\frac{1}{4}}=*$, (v) $\left(\dfrac{8}{125}\right)^{\frac{2}{3}}=*$, (vi) $\sqrt[5]{243^4}=*$.

3. মান বাহির কর :

(i) $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{4}}$, (ii) $8^{-\frac{2}{3}} \times 32^{\frac{3}{5}} \times 16^{0}$, (iii) $\dfrac{27^{\frac{2}{3}}}{4^{-\frac{3}{2}}}$

(iv) $\left(1024^{-\frac{4}{5}}\right)^{\frac{1}{2}}$, (v) $\left\{\left(32^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}\right\}^{\frac{4}{5}}$, (vi) $\left(a^{\sqrt[3]{2}}\right)^{\sqrt[3]{4}}$

সরল কর :

4. $\{(\sqrt[5]{125})^{-2}\}^{-\frac{5}{3}}$,

5. $\sqrt[3]{16^{-\frac{3}{4}} \times 125^{-2}}$

6. $\dfrac{4^{n}.9^{3}}{2^{2n+1}.3^{4}}$,

7. $\dfrac{x^{p-2a}.x^{a+b}.x^{a-b}}{x^{p-a}}$

8. $(27a^{3} \div 64b^{-3})^{-\frac{2}{3}}$,

9. $(x^{-3})^{2} \times (x^{\frac{3}{4}})^{-4} \div (x^{\frac{2}{3}})^{-9}$

10. $(a^{\frac{3}{4}})^{\frac{2}{5}} \times (a^{-\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{3}} \div a^{\frac{2}{15}}$,

11. $\{(a^{-\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}}\}^{-3} \times \{(b^{-1})^{\frac{1}{2}}\}^{-\frac{2}{3}}$

12. $\dfrac{3x}{2} \cdot \sqrt[4]{\dfrac{400y^{2}}{81x^{2}}}$,

13. $\sqrt[3]{x^{4} \cdot \sqrt{x^{-5} \cdot \sqrt{x^{6}}}}$

14. $\sqrt{a^{-1}} \times \sqrt[3]{a} \times \sqrt[6]{a}$,

15. $2\sqrt[3]{a^{2}} \times 3\sqrt[4]{a^{3}} \div 4\sqrt[6]{a^{5}}$

16. $\left[\sqrt[3]{4} \times \dfrac{1}{\sqrt[6]{8}} \times \sqrt[12]{2^{-1}}\right]^{\frac{1}{4}}$,

17. $\left[\sqrt[3]{4} \times \dfrac{1}{\sqrt[9]{8}} \times \sqrt[12]{16^{-1}}\right]^{\frac{1}{4}}$ [H. S. 1960]

18. $\left\{81^{-\frac{3}{4}} \times \dfrac{16^{\frac{1}{4}}}{6^{-2}} \times \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}}\right\}^{\frac{1}{3}}$, [H. S. 1965]

19. $\left(\dfrac{x^{2}y^{-2}}{x^{-2}y^{2}}\right)^{3} \times \left(\dfrac{xy^{-1}}{x^{-1}y}\right)^{2}$,

20. $\sqrt[4]{ab^{2}c^{-3}} \times \sqrt[3]{a^{3}b^{-2}c}$,

21. $\sqrt{x^{2}y^{-\frac{9}{4}}} \times \sqrt[4]{x^{-\frac{8}{3}}y^{3}}$

22. $(8x^{3} \div 27a^{-3})^{\frac{2}{3}} \times (64x^{3} \div 27a^{-3})^{-\frac{2}{3}}$ [H. S. 1962]

23. $\left[\sqrt[3]{\dfrac{a^{2}}{b^{4}}} \times \sqrt{\dfrac{b^{3}}{a^{5}}}\right]^{12} \times a^{22}$,

24. $\sqrt{(a^{-\frac{5}{3}}b^{\frac{8}{3}}c^{-\frac{2}{3}})} \div \sqrt[3]{(a^{\frac{1}{2}}b^{4}c^{-4})}$.

1-5. সূচক-সংক্রান্ত জটিল প্রশ্নাবলী।

উদাহরণ 1. সরল কর :— $\dfrac{2^{m+1} \cdot 3^{2m-n} \cdot 5^{m+n} \cdot 6^{n}}{15^{m} \cdot 10^{n+2} \cdot 6^{m}}$.

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \frac{2^{m+1} \cdot 3^{2m-n} \cdot 5^{m+n} \cdot (2 \times 3)^{n}}{(3 \times 5)^{m} \cdot (2 \times 5)^{n+2} \cdot (2 \times 3)^{m}}$$

$$= \frac{2^{m+1} \cdot 3^{2m-n} \cdot 5^{m+n} \cdot 2^{n} \cdot 3^{n}}{3^{m} \cdot 5^{m} \cdot 2^{n+2} \cdot 5^{n+2} \cdot 2^{m} \cdot 3^{m}}$$

$$= \frac{2^{m+1+n} \cdot 3^{2m-n+n} \cdot 5^{m+n}}{2^{n+2+m} \cdot 3^{m+m} \cdot 5^{m+n+2}}$$

$$=\frac{2^{m+n+1} \cdot 3^{2m} \cdot 5^{m+n}}{2^{m+n+2} \cdot 3^{2m} \cdot 5^{m+n+2}}$$

$$=2^{m+n+1-m-n-2} \cdot 5^{m+n-m-n-2}$$

$$=2^{-1} \cdot 5^{-2}=\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5^2}=\frac{1}{50}$$

উদাহরণ 2. সরল কর : $\dfrac{2^a(2^{a-1})^a}{2^{a+1} \cdot 2^{a-1}}\left\{\dfrac{8^{\frac{a}{3}}}{4}\right\}^{-a}$

প্রদত্ত রাশি $=\dfrac{2^a.2^{a^2-a}}{2^{a+1+a-1}} \cdot \left\{\dfrac{(2^3)^{\frac{a}{3}}}{2^2}\right\}^{-a}$

$$=\frac{2^{a^2}}{2^{2a}} \cdot \left\{\frac{2^a}{2^2}\right\}^{-a}=2^{a^2-2a} \cdot \{2^{a-2}\}^{-a}$$

$$=2^{a^2-2a}.2^{-a^2+2a}=2^{a^2-2a-a^2+2a}$$

$$=2^0=1.$$

উদাহরণ 3. সরল কর : $\left\{\dfrac{\left(9^{n+\frac{1}{4}}\right) \cdot \sqrt{3.3^n}}{3 \cdot \sqrt{3^{-n}}}\right\}^{\frac{1}{n}}$.

প্রদত্ত রাশি $=\left\{\dfrac{(3^2)^{n+\frac{1}{4}} \cdot (3.3^n)^{\frac{1}{2}}}{3 \cdot (3^{-n})^{\frac{1}{2}}}\right\}^{\frac{1}{n}}=\left\{\dfrac{3^{2n+\frac{1}{2}} . 3^{\frac{1}{2}} . 3^{\frac{n}{2}}}{3.3^{-\frac{n}{2}}}\right\}^{\frac{1}{n}}$

$$=\left\{\frac{3^{2n} . 3^{\frac{1}{2}} . 3^{\frac{1}{2}} . 3^{\frac{n}{2}}}{3 . 3^{-\frac{n}{2}}}\right\}^{\frac{1}{n}}=\left\{\frac{3^{2n}.3.3^{\frac{n}{2}}}{3.3^{-\frac{n}{2}}}\right\}^{\frac{1}{n}}$$

$$=\left\{\frac{3^{2n} . 3^{\frac{n}{2}}}{3^{-\frac{n}{2}}}\right\}^{\frac{1}{n}}=\left\{3^{2n}.3^{\frac{n}{2}}.3^{\frac{n}{2}}\right\}^{\frac{1}{n}}$$

$$=\{3^{3n}\}^{\frac{1}{n}}=3^3=27.$$

উদাহরণ 4. সরল কর : $\dfrac{\left(p^2-\dfrac{1}{q^2}\right)^p\left(p-\dfrac{1}{q}\right)^{q-p}}{\left(q^2-\dfrac{1}{p^2}\right)^q\left(q+\dfrac{1}{p}\right)^{p-q}}$

প্রদত্ত রাশি $=\dfrac{\left(p+\dfrac{1}{q}\right)^p\left(p-\dfrac{1}{q}\right)^p\left(p-\dfrac{1}{q}\right)^{q-p}}{\left(q+\dfrac{1}{p}\right)^q\left(q-\dfrac{1}{p}\right)^q\left(q+\dfrac{1}{p}\right)^{p-q}}$

$$=\frac{\left(p+\frac{1}{q}\right)^p\left(p-\frac{1}{q}\right)^q}{\left(q+\frac{1}{p}\right)^p\left(q-\frac{1}{p}\right)^q}=\frac{\left(\frac{pq+1}{q}\right)^p\left(\frac{pq-1}{q}\right)^q}{\left(\frac{pq+1}{p}\right)^p\left(\frac{pq-1}{p}\right)^q}$$

$$=\frac{(pq+1)^p.q^{-p}.(pq-1)^q.q^{-q}}{(pq+1)^p.p^{-p}.(pq-1)^q.p^{-q}}$$

$$=\frac{q^{-p}.q^{-q}}{p^{-p}.p^{-q}}=q^{-p}.q^{-q}.p^p.p^q$$

$$=\frac{p^p}{q^p}\cdot\frac{p^q}{q^q}=\left(\frac{p}{q}\right)^p\cdot\left(\frac{p}{q}\right)^q=\left(\frac{p}{q}\right)^{p+q}$$

উদাহরণ 5. সরল কর :

$$\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a^2+ab+b^2}\times\left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b^2+bc+c^2}\times\left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c^2+ca+a^2}$$

[S. F. 1955]

প্রদত্ত রাশি $=x^{(a-b)(a^2+ab+b^2)}\times x^{(b-c)(b^2+bc+c^2)}\times x^{(c-a)(c^2+ca+a^2)}$

$$=x^{a^3-b^3}\times x^{b^3-c^3}\times x^{c^3-a^3}$$

$$=x^{a^3-b^3+b^3-c^3+c^3-a^3}=x^0=1$$

উদাহরণ 6. সরল কর :

$$\left(a^{\frac{1}{x-y}}\right)^{\frac{1}{x-z}}\times\left(a^{\frac{1}{y-z}}\right)^{\frac{1}{y-x}}\times\left(a^{\frac{1}{z-x}}\right)^{\frac{1}{z-y}}$$

প্রদত্ত রাশি

$$=a^{-\frac{1}{(x-y)(z-x)}}\times a^{-\frac{1}{(y-z)(x-y)}}\times a^{-\frac{1}{(z-x)(y-z)}}$$

$$=a^{\frac{-(y-z+z-x+x-y)}{(x-y)(y-z)(z-x)}}=a^0=1$$

উদাহরণ 7. সরল কর :

$$\frac{1}{1+x^{b-a}+x^{c-a}}+\frac{1}{1+x^{a-b}+x^{c-b}}+\frac{1}{1+x^{a-c}+x^{b-c}}$$

[C. U. 1940]

প্রদত্ত রাশি

$$=\frac{x^a}{x^a(1+x^{b-a}+x^{c-a})}+\frac{x^b}{x^b(1+x^{a-b}+x^{c-b})}+\frac{x^c}{x^c(1+x^{a-c}+x^{b-c})}$$

$$=\frac{x^a}{x^a+x^b+x^c}+\frac{x^b}{x^b+x^a+x^c}+\frac{x^c}{x^c+x^a+x^b}$$

$$=\frac{x^a+x^b+x^c}{x^a+x^b+x^c}=1.$$

উদাহরণ 8. সরল কর :

$$\sqrt[ln]{\frac{x^l}{x^n}} \times \sqrt[nm]{\frac{x^n}{x^m}} \times \sqrt[ml]{\frac{x^m}{x^l}}$$ [H. S. 1961]

প্রদত্ত রাশি $= \sqrt[ln]{x^{l-n}} \times \sqrt[nm]{x^{n-m}} \times \sqrt[ml]{x^{m-l}}$

$= x^{\frac{l-n}{ln}} \times x^{\frac{n-m}{nm}} \times x^{\frac{m-l}{ml}}$

$= x^{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{l}\right)} \times x^{\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)} \times x^{\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{m}\right)}$

$= x^{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{l}\right)+\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{m}\right)}$

$= x^0 = 1.$

উদাহরণ 9. সরল কর : $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}.$

প্রদত্ত রাশি $= \dfrac{\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)^2}{\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)}+\dfrac{\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)^2}{\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)}$

$= \dfrac{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2+\left(y^{\frac{1}{2}}\right)^2+2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2-\left(y^{\frac{1}{2}}\right)^2}+\dfrac{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2+\left(y^{\frac{1}{2}}\right)^2-2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2-\left(y^{\frac{1}{2}}\right)^2}$

$= \dfrac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}+\dfrac{x+y-2\sqrt{xy}}{x-y}$

$= \dfrac{(x+y+2\sqrt{xy})+(x+y-2\sqrt{xy})}{x-y}=\dfrac{2(x+y)}{x-y}.$

উদাহরণ 10. গুণ কর :

$\left(a^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{3}{8}}+b^{\frac{3}{4}}\right)\times\left(a^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{3}{8}}+b^{\frac{3}{4}}\right)$

প্রদত্ত রাশি $=\{(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{3}{4}})+(2^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{3}{8}})\}\times\{(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{3}{4}})-(2^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{3}{8}})\}$

$=\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{3}{4}}\right)^2-\left(2^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{3}{8}}\right)^2$

$=\left\{\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2+\left(b^{\frac{3}{4}}\right)^2+2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{3}{4}}\right\}-2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{3}{4}}$

$=a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{3}{2}}+2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{3}{4}}-2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{3}{4}}$

$=a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{3}{2}}.$

উদাহরণ 11. ভাগ কর :

$(a-b^2+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{4}{3}}-3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}})$ কে $(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{4}{3}}-2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}})$ দ্বারা

$a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{4}{3}}-2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}=\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{2}{3}}\right)^2$;

$$a-b^2+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{4}{3}}-3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}$$

$$=\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3-3\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2\left(b^{\frac{2}{3}}\right)+3\left(a^{\frac{1}{3}}\right)\left(b^{\frac{2}{3}}\right)^2-\left(b^{\frac{2}{3}}\right)^3=\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{2}{3}}\right)^3$$

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগফল $=\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{2}{3}}\right)^3\div\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{2}{3}}\right)^2=a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{2}{3}}.$

দ্বিতীয় প্রণালী :

ভাজ্য এবং ভাজককে a-এর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া সাধারণভাবে ভাগ করিয়া পাই,

$$a^{\frac{2}{3}}-2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{4}{3}}\Big)\,a-3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{4}{3}}-b^2\,\Big(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{2}{3}}$$

$$a-2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{4}{3}}$$

$$-a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{4}{3}}-b^2$$

$$-a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{4}{3}}-b^2$$

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগফল $=a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{2}{3}}$

প্রশ্নমালা 2

সরল কর :

1. $\dfrac{4^n\cdot 9^3}{2^{2n+1}\cdot 3^4}$ 2. $\dfrac{3^p\cdot 4^q\cdot 6^r}{2^{r+q}\cdot 12^{r+p}}$ 3. $\dfrac{6^n\cdot 2^{2n}\cdot 3^{3n}}{30^n\cdot 3^{2n}\cdot 2^{3n}}$

4. $\dfrac{2^{m+2}\cdot 3^{2m-n}\cdot 5^{m+n-2}\cdot 6^n}{6^m\cdot 10^{n+2}\cdot 15^m}$ 5. $\dfrac{2^n\cdot 6^{m+1}\cdot 10^{m-n}\cdot 15^{m+n-2}}{4^m\cdot 3^{2m+n}\cdot 25^{m-1}}$

[H. S. Comp. 1965]

6. $\left\{\dfrac{4^{m+\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{2\cdot 2^m}}{2\cdot\sqrt{2^{-m}}}\right\}^{\frac{1}{m}}$ [C. U. 1947] 7. $\dfrac{\left(p+\frac{1}{q}\right)^m\left(p-\frac{1}{q}\right)^n}{\left(q+\frac{1}{p}\right)^m\left(q-\frac{1}{p}\right)^n}$

8. $\left(\dfrac{x^p}{x^q}\right)^{p+q}\div\left(\dfrac{x^{p+q}}{x^{p-q}}\right)^{\frac{p^2}{q}}$ 9. $\left(\dfrac{a^l}{b^m}\right)^n\left(\dfrac{b^n}{c^l}\right)^m\left(\dfrac{c^m}{a^n}\right)^l$

10. $\left(\dfrac{x^l}{x^m}\right)^{l+m}\times\left(\dfrac{x^m}{x^n}\right)^{m+n}\times\left(\dfrac{x^n}{x^l}\right)^{n+l}$ [C. U. 1924]

11. $\dfrac{1}{1+x^{m-n}+x^{m-p}}+\dfrac{1}{1+x^{n-p}+x^{n-m}}+\dfrac{1}{1+x^{p-m}+x^{p-n}}$

12. $\dfrac{1}{1+a^{-m}b^n+a^{-m}c^p}+\dfrac{1}{1+b^{-n}c^p+b^{-n}a^m}+\dfrac{1}{1+c^{-p}a^m+c^{-p}b^n}$

13. $\left(\frac{x^m}{x^n}\right)^{m+n-l} \cdot \left(\frac{x^n}{x^l}\right)^{n+l-m} \cdot \left(\frac{x^l}{x^m}\right)^{l+m-n}$

14. $\left(x^{\frac{b+c}{c-a}}\right)^{\frac{1}{a-b}} \times \left(x^{\frac{c+a}{a-b}}\right)^{\frac{1}{b-c}} \times \left(x^{\frac{a+b}{b-c}}\right)^{\frac{1}{c-a}}$

15. $\left(x^{\frac{a}{a-b}}\right)^{\frac{a}{a-c}} \times \left(x^{\frac{b}{b-a}}\right)^{\frac{b}{b-c}} \times \left(x^{\frac{c}{c-a}}\right)^{\frac{c}{c-b}}$

16. $\sqrt[bc]{\frac{x^{\frac{b}{c}}}{x^{\frac{c}{b}}}} \times \sqrt[ca]{\frac{x^{\frac{c}{a}}}{x^{\frac{a}{c}}}} \times \sqrt[ab]{\frac{x^{\frac{a}{b}}}{x^{\frac{b}{a}}}}$ [C. U. 1938]

17. $\frac{(bc)^{b-c} \cdot (ca)^{c-a} \cdot (ab)^{a-b}}{\left(a^{b-c} \cdot b^{c-a} \cdot c^{a-b}\right)^{-1}}$

18. $\frac{\left(1+\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{a-b}} \cdot \left(1-\frac{b}{a}\right)^{\frac{b}{a-b}}}{\left(\frac{b}{a}+1\right)^{\frac{a}{a-b}} \cdot \left(\frac{a}{b}-1\right)^{\frac{b}{a-b}}}$

19. $\frac{a^2+b^2-a^{-2}-b^{-2}}{a^2b^2-a^{-2}b^{-2}} + \frac{(a-a^{-1})(b-b^{-1})}{ab+a^{-1}b^{-1}}$

20. $\frac{\left\{(a^m)^{\frac{1}{r}} \cdot (a^q)^{\frac{1}{n}}\right\}^{nr}}{\left\{\sqrt[q]{b^n} \times \sqrt[m]{b^r}\right\}^{mq}} \div \left\{\left(\frac{a}{b}\right)^q\right\}^r$

21. $\left\{\frac{\sqrt{a}\sqrt{b^{-1}}}{b\sqrt[3]{a^{-2}}} \div \sqrt{\frac{a\sqrt{b^{-4}}}{b\sqrt{a^{-2}}}}\right\}^6$

[H. S. 1973]

22. $\frac{1}{(4x^3-3x)^2} - \left\{\frac{\frac{3\sqrt{1-x^2}}{x} - \frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^3}}{1-3\,\frac{(1-x^2)}{x^2}}\right\}^2$ [C. U. 1878]

23. (i) $(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{8}}+b^{\frac{1}{8}})(a^{\frac{1}{8}}-b^{\frac{1}{8}})$

(ii) $(x^{\frac{1}{6}}+y^{\frac{1}{6}})(x^{\frac{1}{6}}-y^{\frac{1}{6}})(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}})$

24. $\frac{x^{\frac{4}{3}}+a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}}$ [C. U. 1861]

25. $\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}} \times \frac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{a-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b}$

26. $\frac{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}} \div \frac{a-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b}$

27. $\frac{a^{\frac{3}{2}}+ab}{ab-b^3} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-b}$ [C. U. 1934]

28. Show that $(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)\cdots\cdots(x^{2^{n-1}}+y^{2^{n-1}})$

$$=\frac{x^{2^n}-y^{2^n}}{x-y}$$ [C. U. 1945]

1-6. সূচক সংক্রান্ত সমীকরণ এবং অভেদাবলী।

a, x, y তিনটি বাস্তব রাশির জন্য যদি $a^x = a^y$ হয়, তাহা হইলে $x = y$ হইবে, যখন, $a \neq 0, 1, \infty$.

আবার, a, b, x তিনটি বাস্তব রাশির জন্য যদি $a^x = b^x$ হয়, তাহা হইলে হয় $a = b$ অথবা, $x = 0$ যখন $a \neq b$.

উদাহরণ 1. সমাধান কর :

(i) $(\sqrt{3})^{x+3} = 3^{2x+1}$; (ii) $5^{3x-2} = 3^{3x-2}$; (iii) $3^{x+2} - 3^x = 72$.

(i) $3^{\frac{x+3}{2}} = 3^{2x+1}$

$\therefore \quad \dfrac{x+3}{2} = 2x+1$, বা, $x + 3 = 4x + 2$

$\therefore \quad 3x = 1 \qquad \therefore \quad x = \frac{1}{3}$.

(ii) $5^{3x-2} = 3^{3x-2}$

$\therefore \quad 3x - 2 = 0, \quad (\because \quad 5 \neq 3)$

$\therefore \quad x = \frac{2}{3}$.

(iii) $3^{x+2} - 3^x = 72$,

বা, $3^x.3^2 - 3^x = 72$,

বা, $9.3^x - 3^x = 72$,

বা, $8.3^x = 72$,

বা, $3^x = 9 = 3^2$; $\quad \therefore \quad x = 2$.

উদাহরণ 2. সমাধান কর :

(i) $3^x + 2^y = 7$
$2^y - 3^x = 1$

(ii) $(\sqrt[3]{3})^x = 3^{5-2y}$
$2^{2x-1} = 32^{y-1}$.

(iii) $x^y = y^x$, $x = 2y$. [C. U. 1935]

(i) $3^x + 2^y = 7 \qquad \cdots \qquad (1)$

$2^y - 3^x = 1 \qquad \cdots \qquad (2)$

(1) এবং (2) যোগ করিয়া পাই,

$2.2^y = 8$, বা, $2^{y+1} = 2^3$

$\therefore \quad y + 1 = 3$; $\quad \therefore \quad y = 2$.

তাহা হইলে, (2) হইতে পাই,

$2^2 - 3^x = 1$, বা, $3^x = 3^1 \qquad \therefore \quad x = 1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $x = 1, y = 2$.

(ii) $(\sqrt[3]{3})^x = 3^{5-2y}$

বা, $3^{\frac{x}{3}} = 3^{5-2y}$

$\therefore \quad \frac{x}{3} = 5 - 2y$

বা, $x = 15 - 6y \quad \cdots \quad (1)$

আবার, $2^{2x-1} = 32^{y-1}$

বা, $2^{2x-1} = (2^5)^{y-1} = 2^{5y-5}$

$\therefore \quad 2x - 1 = 5y - 5$

বা, $2x = 5y - 4 \quad \cdots \quad (2)$

(1) এবং (2) হইতে পাই,

$30 - 12y = 5y - 4$

বা, $17y = 34$; $\therefore \quad y = 2.$

তাহা হইলে, (1) হইতে পাই, $x = 3.$

সুতরাং, নির্ণেয় সমাধান : $x = 3, \quad y = 2.$

(iii) যেহেতু, $x = 2y$, $\therefore \quad \frac{x}{y} = 2$, যখন $y \neq 0.$ $\rightarrow(1)$

যেহেতু, $x^y = y^x$, $\therefore \quad x = y^{\frac{x}{y}}$

$\therefore \quad x = y^2$ বা, $2y = y^2$

$\therefore \quad y(y-2) = 0$

$\therefore \quad y = 0$ বা, 2, $\quad y \neq 0 \ by \ (1)$

$y = 2$ হইলে, $x = 2y$ হইতে, $x = 4.$

$$\left.\begin{array}{l} x = 4 \\ y = 2 \end{array}\right\}$$

দ্রষ্টব্য : $y = 0$ ধরিলে $x = 2y$ হইতে $x = 0$ হয় ; তখন $x^y = y^x$ সমীকরণটি $0^0 = 0^0$ রূপ নেয়। এখন 0^0 অর্থহীন। $\therefore \quad (x = 0, y = 0)$ সমাধানটি অগ্রাহ্য।

উদাহরণ 3. $x^a = y^b$ এবং $y^a = x^b$ হইলে,

প্রমাণ কর যে, $x = y$, $(a + b \neq 0)$.

যেহেতু, $x^a = y^b$ এবং $x^b = y^a$

$\therefore \quad x^a . x^b = y^b . y^a$

বা, $x^{a+b} = y^{a+b} \quad \therefore \quad x = y.$

দ্রষ্টব্য : যদি $a + b = 0, \quad a \neq 0$ হয়, তবে $xy = 1$ হইবে।

উদাহরণ 4. যদি $a^x=b$, $b^y=c$ এবং $c^z=a$ হয়,
তবে দেখাও যে, $xyz=1$. [C. U. 1906]

এখন, $a=c^z=(b^y)^z=b^{yz}$.
$=(a^x)^{yz}=a^{xyz}$.
$\therefore\ a^{xyz}=a^1$; $\therefore\ xyz=1$.

উদাহরণ 5. $x^a=y^b=z^c$ এবং $xyz=1$ হইলে দেখাও যে,

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0.$$

মনে করি, $x^a=y^b=z^c=k$.

তাহা হইলে, $x=k^{\frac{1}{a}}$; $y=k^{\frac{1}{b}}$; $z=k^{\frac{1}{c}}$.

যেহেতু, $xyz=1$, $\therefore\ k^{\frac{1}{a}}.k^{\frac{1}{b}}.k^{\frac{1}{c}}=1$

বা, $k^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}=k^0$

$$\therefore\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0.$$

উদাহরণ 6. $x^{\frac{1}{a}}=y^{\frac{1}{b}}=z^{\frac{1}{c}}$ এবং $y^2=xz$ হইলে দেখাও যে, $a+c=2b$.

মনে করি, $x^{\frac{1}{a}}=y^{\frac{1}{b}}=z^{\frac{1}{c}}=k$.

তাহা হইলে, $x=k^a$; $y=k^b$; $z=k^c$.

যেহেতু, $xz=y^2$

$\therefore\ k^a.k^c=(k^b)^2$

বা, $k^{a+c}=k^{2b}$

$\therefore\ a+c=2b$.

উদাহরণ 7. $a=x^{q+r}.y^p$; $b=x^{r+p}.y^q$ এবং $c=x^{p+q}.y^r$ হইলে দেখাও যে.
$a^{q-r}.b^{r-p}.c^{p-q}=1$. [C. U. 1951]

$a^{q-r}.b^{r-p}.c^{p-q}$.

$=\left(x^{q+r}y^p\right)^{q-r}.\left(x^{r+p}.y^q\right)^{r-p}\left(x^{p+q}.y^r\right)^{p-q}$

$=x^{q^2-r^2}.y^{pq-pr}.x^{r^2-p^2}.y^{qr-pq}.x^{p^2-q^2}.y^{pr-qr}$

$=x^{q^2-r^2+r^2-p^2+p^2-q^2}.y^{pq-pr+qr-pq+pr-qr}$

$=x^0.y^0=1.1=1$.

প্রশ্নমালা 3

সমাধান কর :

1. $8^x = 4.2^{x-1}$. 2. $2^{2(x+2)} = 2.5^{2x+3}$.

3. $(\sqrt{6})^{2x+4} = 216$. [**C. U. 1932**]

4. $(\sqrt{3})^{x+3} = 3^{2x+1}$. 5. $(\sqrt[4]{2})^{7x+5} = (\sqrt[3]{2})^{2x+7}$.

6. $(\sqrt[5]{9})^{4x+6} = (\sqrt[7]{3})^{2x+49}$ 7. $(\sqrt{2})^{4x-4}.5^{2x-3} = 20$.

8. $3^{2x} + 9 = 10(3^x)$. [**H. S. 1974**]

9. $3^x + 2^y = 7,\ 4^y - 9^x = 7$.

10. (i) $2.3^x + 2^y = 8,\ 3^y - 2^x = 1$; (ii) $2.3^x + 2^y = 8$; $3^x - 2^y = 1$.

11. $a^{x+y} = (\sqrt{a})^{y+7},\ b^{x-y} = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{b}}\right)^{y+1}$.

12. $y^x = x^y,\ x^b = y^a$. 13. $a^x + b^y = a + b,\ a^{x-1} + b^{y-1} = 2$.

14. $a^x.a^{y+1} = a^7,\ a^{2y}.a^{3x+5} = a^{20}$.

15. $18y^x - y^{2x} = 81,\ y^2 = 3^x$. [**Joint Ent. Ex. 1973**]

16. $16^{x-y} = 4,\ 6^{z+x} = 36^x,\ 9^{x+y+z} = 243$.

17. $8^x 4^y = 128,\ 9^{x+y} = 27^{xy}$ [**H. S. 1972**]

18. $x^a = y^b$ এবং $y^a = x^b$ হইলে দেখাও যে, $a^2 = b^2$.

19. $x^y = y^x$ এবং $x = 2y$ হইলে দেখাও যে, $y = 2$. [**C. U. 1949**]

20. $a^x = z^y$ এবং $z^x = a^z$ হইলে দেখাও যে, $x^2 = yz$.

21. $a^x = m,\ a^y = n$ এবং $a^2 = (m^y n^x)^z$ হইলে দেখাও যে, $xyz = 1$ [**H. S. 1963**]

22. $x^{\frac{1}{a}} = y^{\frac{1}{b}} = z^{\frac{1}{c}}$ এবং $xyz = 1$ হইলে দেখাও যে, $a + b + c = 0$, [**H. S. 1964 ; H. S. Comp. 1967**]

23. $a^x = b^y = c^z$ এবং $ac = b^2$ হইলে দেখাও যে,
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2}{y}$$ [**H. S. Comp. 1966**]

24. যদি $2^x = 3^y = 12^z$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $xy = z(x + 2y)$ [**H. S. 1975**]

25. যদি $a = xy^{p-1},\ b = xy^{q-1},\ c = xy^{r-1}$ হয়, তাহা হইলে দেখাও যে,
$$a^{q-r}.b^{r-p}.c^{p-q} = 1.$$

26. $x^y = y^x$ হইলে প্রমাণ কর, $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}} = x^{\frac{x}{y}-1}$; এবং যদি $x = 2y$ হয় তবে দেখাও যে, $y = 2$.

দ্বিতীয় অধ্যায়

করণী

(Surd)

2-1. উপস্থাপন।

আমরা জানি, কোন রাশিকে দুইটি পূর্ণসংখ্যার অনুপাতে (**হর** ধনাত্মক) প্রকাশ করা সম্ভব হইলে তাহাকে **মূলদ সংখ্যা** (Rational Number) বলে। যেমন, $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{-7}{5}$, $\frac{5}{1}$ মূলদ সংখ্যার দৃষ্টান্ত। 0 (শূন্য) অবশ্যই মূলদ সংখ্যা।

যেহেতু, $\sqrt{4}=2$, $\sqrt[3]{64}=4$, $8^{\frac{2}{3}}=4$, সুতরাং ইহারা মূলদ সংখ্যা।

এখন, $\sqrt{2}$ এর সঠিক মান কত এবং ইহা মূলদ সংখ্যা কিনা দেখা যাক্। $\sqrt{2}$ এর মান 1 এর বেশী কিন্তু 2 এর কম। সুতরাং ইহা কোন পূর্ণসংখ্যা হইতে পারে না।

এখন, ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা 2 এর বর্গমূল নির্ণয় করা যাক্।

```
          2·00,00,···  | 1·4142···
          1            |
      ---------------- |-----------
24    | 100            |
      |  96            |
      ---------------- |
281   |  400           |
      |  281           |
      ---------------- |
2824  |  11900         |
      |  11296         |
      ---------------- |
28282 |   60400        |
      |   56564        |
      ---------------- |
      |    3836        |
```

$\therefore\ \sqrt{2}=1\cdot4142\cdots\cdots$

দেখা যাইতেছে, $\sqrt{2}$ এর মান 1 এর বেশী কিন্তু 1·5 এর কম ; 1·4 এর বেশী কিন্তু 1·42 এর কম ; 1·41 এর বেশী কিন্তু 1·415 এর কম, ইত্যাদি। সুতরাং, $\sqrt{2}$ এর মান সঠিকভাবে নির্ণয় করা যায় না। সেইরূপ, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $6^{\frac{3}{5}}$ $\sqrt[5]{7^3}$ এর মান সঠিকভাবে নির্ণয় করা যায় না।

সংজ্ঞা। কোন ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার কোন মূল (root) সঠিকভাবে নির্ণয় করা সম্ভব না হইলে সেই মূলকে **করণী** (Surd) বা **অমূলদ সংখ্যা** (Irrational Number) বলে। যেমন, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $6^{\frac{3}{5}}$, $\sqrt[5]{7^3}$ প্রভৃতির প্রত্যেকটি করণী।

যদিও $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt[3]{27}$ করণীর আকারে প্রকাশিত, ইহারা কিন্তু করণী নহে ; ইহারা মূলদ রাশি।

কিন্তু কোন বীজগণিতীয় রাশির যে কোন মূলই করণী। যেমন $\sqrt{a}$, $\sqrt{a^3}$, $\sqrt[3]{a}$ প্রত্যেকেই করণী, কারণ, a এর মান জানা না থাকায় ইহাদের মান জানা সম্ভব নয়। কিন্তু a এর মান এমন হইতে পারে যাহার জন্য $\sqrt{a}$ করণী নাও হইতে পারে। যেমন, $a=9$ হইলে $\sqrt{a}=\sqrt{9}=3$; এখানে $a=9$ এর জন্য $\sqrt{a}$ মূলদ রাশি।

2-2. করণীর ক্রম।

মূলজ্ঞাপক চিহ্ন দ্বারা করণী সমূহের **ক্রম** (Order) নির্দেশ করা হয়। $\sqrt{5}$, $\sqrt{7^3}$. $5^{\frac{3}{2}}$ প্রভৃতি দ্বিতীয় ক্রমের করণী (Second order surd) বা **দ্বিঘাত করণী** (**Quadratic Surd**); $\sqrt[3]{4}$, $5^{\frac{1}{3}}$, $6^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[3]{5^4}$ প্রভৃতি তৃতীয় ক্রমের করণী (Third order surd) বা **ত্রিঘাত করণী** (**Cubic Surd**); সাধারণভাবে, $a^{\frac{m}{n}}$ বা $\sqrt[n]{a^m}$ কে ***n*-তম** করণী (*n*th order surd) বলে।

যে সকল করণীর ক্রম একই তাহাদিগকে **সমমূলীয় করণী** (Equiradical surds) বলে।* যেমন, $\sqrt{2}$, $5\sqrt{3}$, $\sqrt{12}$ সমমূলীয় করণী ; কিন্তু $5\sqrt{3}$, $3\sqrt[3]{7}$, $5^{\frac{2}{5}}$ সমমূলীয় করণী নহে।

2-3. করণীর শ্রেণী বিভাগ।

(*a*) পূর্ণ করণী এবং মিশ্র করণী।

যে সকল করণীর 1 ভিন্ন অন্য কোন মূলদ সহগ থাকে না তাহাদিগকে **পূর্ণ করণী** (Complete surd) বা **শুদ্ধ করণী** (Pure surd) বলে। যেমন, $\sqrt{5}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt[3]{54}$, $\sqrt[4]{7}$ এর প্রত্যেকটি পূর্ণ করণী। কিন্তু $2\sqrt{3}$, $3\sqrt[4]{6}$ পূর্ণ করণী নহে।

কোন করণীর মূলদ সহগ থাকিলে তাহাকে **মিশ্র করণী** (Mixed Surd) বলে। যেমন, $2\sqrt{3}$, $3\sqrt[4]{6}$ এর প্রত্যেকেই মিশ্র করণী।

(*b*) সদৃশ করণী এবং অসদৃশ করণী।

দুই বা ততোধিক করণীর অমূলদ গুননীয়কগুলি একই থাকিলে অথবা তাহাদিগকে একই অমূলদ গুননীয়ক বিশিষ্ট করণীতে পরিণত করা গেলে তাহাদিগকে **সদৃশ করণী** (Similar or like surds) বলে। অন্যথায় উহাদিগকে **অসদৃশ করণী** (Dissimilar or unlike surds) বলা হয়। যেমন,

(*i*) $\sqrt{5}$, $3\sqrt{5}$, $7\sqrt{5}$ সদৃশ করণী ;

(*ii*) $\sqrt{12}$, $\sqrt{75}$ সদৃশ করণী ;

কারণ, $\sqrt{12}=\sqrt{2^2\times 3}=2\sqrt{3}$; $\sqrt{75}=\sqrt{5^2\times 3}=5\sqrt{3}$.

(*iii*) $2\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{5}$, $4\sqrt{5}$ অসদৃশ করণী।

(c) **সরল করণী এবং যৌগিক করণী।**

একপদ বিশিষ্ট করণীকে **একপদ করণী** (Monomial surd) বা **সরল করণী** (Simple surd) বলে। যেমন, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{54}$, $2\sqrt[3]{5}$ এর প্রত্যেকটি সরল করণী।

দুই বা ততোধিক সরল করণী '+' বা '−' বা উভয় চিহ্ন দ্বারা যুক্ত থাকিলে অথবা এক বা একাধিক মূলদ রাশি এবং এক বা একাধিক সরল করণী '+' বা '−' বা উভয় চিহ্ন দ্বারা যুক্ত থাকিলে তাহাকে **যৌগিক করণী** (Compound surd) বলে। যেমন, $2\sqrt{3}+\sqrt[5]{7}$ এবং $3-\sqrt[3]{5}+4\sqrt{7}$ যৌগিক করণী।

বিশেষ দ্রষ্টব্য :

(1) যে কোন মূলদ রাশিকে যে কোন ক্রমের করণীতে প্রকাশ করা যায়।

যেমন, $2=\sqrt[2]{4}=\sqrt[3]{8}=\sqrt[n]{2^n}$;

$a=\sqrt[2]{a^2}=\sqrt[3]{a^3}=\sqrt[n]{a^n}$

(2) যে কোন মিশ্র করণীকে পূর্ণ করণীতে প্রকাশ করা যাইতে পারে।

যেমন, $3\sqrt{7}=\sqrt{3^2}\times\sqrt{7}=\sqrt{9}\times\sqrt{7}=\sqrt{(9\times7)}=\sqrt{63}$;

$2\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{(8\times5)}=\sqrt[3]{40}.$

$a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^nb.}$

(3) একটি পূর্ণ করণীকে মিশ্র করণীতে প্রকাশ করা যাইতে পারে।

যেমন, $\sqrt{45}=\sqrt{3^2\times5}=\sqrt{3^2}\times\sqrt{5}=3\sqrt{5}$;

$\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{3^3\times2}=\sqrt[3]{3^3}\times\sqrt[3]{2}=3\sqrt[3]{2}.$

(4) করণীর মানের তুলনা।

$\sqrt[n]{a}$ এবং $\sqrt[n]{b}$ এর মধ্যে $a>b$ হইলে, $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$ হইবে। যেমন, $\sqrt[5]{29}$ এবং $\sqrt[5]{32}$ এর মধ্যে $32>29$ বলিয়া $\sqrt[5]{32}>\sqrt[5]{29}$.

উদাহরণ 1. পূর্ণ করণীতে প্রকাশ কর :

(i) $5\sqrt{7}$, (ii) $2\sqrt[4]{3}$, (iii) $4\sqrt[3]{5}$

(i) $5\sqrt{7}=(5^2)^{\frac{1}{2}}\times7^{\frac{1}{2}}=(5^2\times7)^{\frac{1}{2}}=(175)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{175}$;

(ii) $2\sqrt[4]{3}=(2^4)^{\frac{1}{4}}\times3^{\frac{1}{4}}=(2^4\times3)^{\frac{1}{4}}=(48)^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{48}$;

(iii) $4\sqrt[3]{5}=4\times5^{\frac{1}{3}}=(4^3)^{\frac{1}{3}}\times5^{\frac{1}{3}}=(4^3\times5)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{320}.$

উদাহরণ 2. মিশ্র করণীতে প্রকাশ কর :

(i) $\sqrt{75}$, (ii) $\sqrt[3]{128}$, (iii) $\sqrt[4]{405}$

(i) $\sqrt{75}=\sqrt{5^2\times3}=\sqrt{5^2}\times\sqrt{3}=5\sqrt{3}$;

(ii) $\sqrt[3]{128}=\sqrt[3]{4^3\times 2}=(4^3\times 2)^{\frac{1}{3}}=(4^3)^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{1}{3}}=4\sqrt[3]{2}$;

(iii) $\sqrt[4]{405}=(405)^{\frac{1}{4}}=(3^4\times 5)^{\frac{1}{4}}=(3^4)^{\frac{1}{4}}\times 5^{\frac{1}{4}}=3\sqrt[4]{5}$.

উদাহরণ 3. ন্যূনতম সমমূলীয় করণীতে প্রকাশ কর :

$\sqrt[3]{2},\ \sqrt[6]{5},\ \sqrt[9]{7}$.

যেহেতু, $\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[6]{5}=5^{\frac{1}{6}}$; $\sqrt[9]{7}=7^{\frac{1}{9}}$

প্রদত্ত করণীত্রয়ের মূল-জ্ঞাপক সংখ্যাগুলি যথাক্রমে 3, 6, 9 এবং উহাদের ল. সা. গু. $=18$. সুতরাং করণীত্রয়ের প্রত্যেকটিকে অষ্টাদশমূলীয় করণীতে প্রকাশ করিতে হইবে।

$$\therefore\ \sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{6}{18}}=(2^6)^{\frac{1}{18}}=(64)^{\frac{1}{18}}=\sqrt[18]{64}\ ;$$

$$\sqrt[6]{5}=5^{\frac{1}{6}}=5^{\frac{3}{18}}=(5^3)^{\frac{1}{18}}=(125)^{\frac{1}{18}}=\sqrt[18]{125}$$

$$\sqrt[9]{7}=7^{\frac{1}{9}}=7^{\frac{2}{18}}=(7^2)^{\frac{1}{18}}==(49)^{\frac{1}{18}}=\sqrt[18]{49}.$$

উদাহরণ 4. নিম্নোলিখিত করণীদ্বয়ের মধ্যে কোন্‌টি বৃহত্তর বল :

$\sqrt[3]{3}$, এবং $\sqrt[4]{4}$.

$\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[4]{4}=4^{\frac{1}{4}}$.

3 এবং 4 এর ল. সা. গু. $=12$.

$$\therefore\ \sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{4}{12}}=(3^4)^{\frac{1}{12}}=\sqrt[12]{81}\ ;$$

$$\sqrt[4]{4}=4^{\frac{1}{4}}=4^{\frac{3}{12}}=(4^3)^{\frac{1}{12}}=\sqrt[12]{64}.$$

এখন, $81>64$ বলিয়া $(81)^{\frac{1}{12}}>(64)^{\frac{1}{12}}$

$\therefore\ \sqrt[3]{3}>\sqrt[4]{4}$; $\therefore\ \sqrt[3]{3}$ করণীটি বৃহত্তর।

দ্রষ্টব্য : বিভিন্ন ক্রমের করণীগুলিকে মানের তুলনা করিতে হইলে উহাদিগকে সমমূলীয় করণীতে পরিণত করিয়া লইতে হইবে।

উদাহরণ 5. মানের অধঃক্রমে সাজাও :

$2,\ \sqrt{5},\ 2\sqrt[3]{2}$.

$2=2^1$; $\sqrt{5}=5^{\frac{1}{2}}$; $2\sqrt[3]{2}=2\times 2^{\frac{1}{3}}=16^{\frac{1}{3}}$

$$\therefore\ 2=(2^6)^{\frac{1}{6}}=(64)^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{64}\ ;$$

$$\sqrt{5}=5^{\frac{1}{2}}=(5^3)^{\frac{1}{6}}=(125)^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{125};$$

$$2\sqrt[3]{2}=2^{\frac{6}{6}}\times(2^2)^{\frac{1}{6}}=(2^6\times 2^2)^{\frac{1}{6}}=(256)^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{256}.$$

$\therefore$ নির্ণেয় উত্তর $=2\sqrt[3]{2},\ \sqrt{5},\ 2$.

উদাহরণ 6. যোগ কর : $5\sqrt{2},\ \sqrt{32},\ -7\sqrt{2}$.

নির্ণেয় যোগফল $= 5\sqrt{2} + \sqrt{32} + (-7\sqrt{2})$

$= 5\sqrt{2} + \sqrt{4^2 \times 2} - 7\sqrt{2}$

$= 5\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 7\sqrt{2}$

$= (5 + 4 - 7)\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

দ্রষ্টব্য : দুই বা ততোধিক করণীর যোগফল নির্ণয় করিতে হইলে আবশ্যকমত তাহাদিগকে সরলতম আকারে (Simplest form) পরিণত করিয়া লইতে হইবে। তাহার পর, সদৃশ করণীগুলির মূলদ সহগসমূহের যোগফল বাহির করিয়া তাহার ডান পার্শ্বে ঐ সদৃশ করণীটিকে গুণকরূপে বসাইলেই নির্ণেয় যোগফল পাওয়া যাইবে। কিন্তু দুই বা ততোধিক অসদৃশ করণীর যোগফল বাহির করিতে হইলে তাহাদের মধ্যে '+' বা '−' চিহ্ন দ্বারা যুক্ত করিয়া কেবল রাখিতে হইবে ; উৎপন্ন রাশিকে আর সরল করা যাইবে না।

উদাহরণ 7. যোগ কর :

$2\sqrt{5},\ \sqrt{18},\ \sqrt{50},\ \sqrt{125}$

নির্ণেয় যোগফল $= 2\sqrt{5} + \sqrt{18} + \sqrt{50} + \sqrt{125}$

$= 2\sqrt{5} + \sqrt{(3^2 \times 2)} + \sqrt{(5^2 \times 2)} + \sqrt{(5^2 \times 5)}$

$= 2\sqrt{5} + 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 5\sqrt{5}$

$= (3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}) + (2\sqrt{5} + 5\sqrt{5})$

$= (3 + 5) \times \sqrt{2} + (2 + 5) \times \sqrt{5} = 8\sqrt{2} + 7\sqrt{5}$;

ইহাকে আর সরল করা যাইবে না।

উদাহরণ 8. সরল কর।

$2\sqrt[3]{24} - 3\sqrt[3]{81} + 4\sqrt[3]{192}$

প্রদত্ত রাশিমালা $= 2 \times \sqrt[3]{(2^3 \times 3)} - 3 \times \sqrt[3]{(3^3 \times 3)} + 4 \times \sqrt[3]{(4^3 \times 3)}$

$= 2 \times 2 \times \sqrt[3]{3} - 3 \times 3 \times \sqrt[3]{3} + 4 \times 4 \times \sqrt[3]{3}$

$= 4\sqrt[3]{3} - 9\sqrt[3]{3} + 16\sqrt[3]{3}$

$= (4 - 9 + 16) \times \sqrt[3]{3} = 11\sqrt[3]{3}$.

উদাহরণ 9. সরল কর :

(i) $3\sqrt{2} \times \sqrt{27}$, (ii) $\sqrt[3]{16} \times \sqrt[3]{32}$, (iii) $2\sqrt[3]{3} \times 3\sqrt[4]{2}$

(iv) $3\sqrt[6]{3} \times 5\sqrt[9]{3}$

(i) $3\sqrt{2} \times \sqrt{27} = 3 \times \sqrt{2} \times \sqrt{(3^2 \times 3)} = 3 \times \sqrt{2} \times 3 \times \sqrt{3}$

$= (3 \times 3) \times (\sqrt{2} \times \sqrt{3})$

$= 9 \times \sqrt{(2 \times 3)} = 9\sqrt{6}$.

(ii) $\sqrt[3]{16} \times \sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{(2^3 \times 2)} \times \sqrt[3]{(2^3 \times 4)} = (2 \times \sqrt[3]{2}) \times (2 \times \sqrt[3]{4})$

$= (2 \times 2) \times (\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{4}) = 4 \times \sqrt[3]{(2 \times 4)} = 4 \times 2 = 8$.

(iii) $2\sqrt[3]{3} \times 3\sqrt[4]{2} = (2 \times 3) \times (3^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{4}}) = 6 \times 3^{\frac{4}{12}} \times 2^{\frac{3}{12}}$

$= 6 \times (3^4 \times 2^3)^{\frac{1}{12}} = 6 \times (648)^{\frac{1}{12}} = 6\sqrt[12]{648}$

(iv) $3\sqrt[6]{3} \times 5\sqrt[9]{3} = (3 \times 5) \times (3^{\frac{1}{6}} \times 3^{\frac{1}{9}}) = 15 \times 3^{\frac{1}{6}+\frac{1}{9}} = 15\sqrt[18]{243}.$

দ্রষ্টব্য ঃ দুই বা ততোধিক সরল করণীর গুণফল নির্ণয়ে প্রথমে উহাদিগকে আবশ্যকমত সরলতম আকারে পরিণত করিয়া লইতে হইবে। (1) যদি তাহারা সমমূলীয় হয়, তবে তাহাদের মূলদ সহগগুলির গুণফল নির্ণয় করিয়া তাহার ডান পার্শ্বে গুণক হিসাবে উহাদের অমূলদ গুণনীয়কগুলির গুণফলকে লিখিলেই নির্ণেয় গুনফল পাওয়া যাইবে। (2) যদি করণীগুলি সমমূলীয় না হয়, তবে উহাদিগকে সমমূলীয় করণীতে পরিণত করিয়া পূর্বের মত গুণ করিতে হইবে। (3) বিভিন্ন করণীগুলির **নিধান** যদি সমান হয় তবে তাহাদিগকে সমমূলীয় করণীতে পরিণত না করিয়া সূচক নিয়ম অনুসারে গুণ করা যাইতে পারে। (উপরের (iv) অংশ দ্রষ্টব্য)

উদাহরণ 10. সরল কর ঃ

(*i*) $(3\sqrt{3} + 4\sqrt{5}) \times (4\sqrt{3} - 3\sqrt{5})$

(*ii*) $(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})(2 + \sqrt{2} + \sqrt{6})$

(*i*) প্রদত্ত রাশিমালা $= 3\sqrt{3} \times (4\sqrt{3} - 3\sqrt{5}) + 4\sqrt{5} \times (4\sqrt{3} - 3\sqrt{5})$

$= (3\sqrt{3}) \times (4\sqrt{3}) - (3\sqrt{3}) \times (3\sqrt{5}) + (4\sqrt{5}) \times (4\sqrt{3}) - (4\sqrt{5}) \times (3\sqrt{5})$

$= 12 \times (\sqrt{3})^2 - 9 \times (\sqrt{3} \times \sqrt{5}) + 16 \times (\sqrt{5} \times \sqrt{3}) - 12 \times (\sqrt{5} \times \sqrt{5})$

$= 12 \times 3 - 9\sqrt{15} + 16\sqrt{15} - 12 \times 5$

$= (36 - 60) + (16 - 9) \times \sqrt{15} = -24 + 7\sqrt{15}$

(*ii*) প্রদত্ত রাশিমালা

$= 1 \times (2 + \sqrt{2} + \sqrt{6}) + \sqrt{2} \times (2 + \sqrt{2} + \sqrt{6}) - \sqrt{3} \times (2 + \sqrt{2} + \sqrt{6})$

$= 2 + \sqrt{2} + \sqrt{6} + 2\sqrt{2} + 2 + \sqrt{12} - 2\sqrt{3} - \sqrt{6} - \sqrt{18}$

$= 2 + \sqrt{2} + \sqrt{6} + 2\sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - \sqrt{6} - 3\sqrt{2}$

$= (2 + 2) + (1 + 2 - 3) \times \sqrt{2} + (2 - 2) \times \sqrt{3} + (1 - 1) \times \sqrt{6}$

$= 4$

প্রশ্নমালা 4

1. তারকা চিহ্নিত স্থানে উপযুক্ত পদ বসাও ঃ

(*i*) $\sqrt{3} + * = 2\sqrt{3}$ (*ii*) $3\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{5} = *$ (*iii*) $\sqrt{3} \times * = 6$

(*iv*) $3\sqrt[3]{3} \times * = 9$ (*v*) $\sqrt[5]{*} = 3$ (*vi*) $3\sqrt{2} = \sqrt{*}$

(*vii*) $\sqrt[3]{81} = *\sqrt[3]{3}$ (*viii*) $7 = \sqrt[3]{*}$ (*ix*) $2\sqrt{3} = \sqrt[4]{*}$

2. সঠিক উত্তরটি চিহ্নিত কর :

(i) $\sqrt{7}+\sqrt{5}=\sqrt{5}+\sqrt{7},\ \sqrt{12},\ \sqrt[4]{12},\ \sqrt{35}$

(ii) $\sqrt{8}+\sqrt{16}=\sqrt{24},\ 4+\sqrt{8},\ \sqrt{128},\ \sqrt[4]{24}$

(iii) $\sqrt[3]{27}+\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{35},\ 5,\ \sqrt[6]{35},\ \sqrt[3]{216}$

(iv) $\sqrt[2]{8}+\sqrt[3]{8}=\sqrt[5]{8},\ 2+2\sqrt{2},\ \sqrt[6]{8},\ \sqrt[6]{8^5}$

(v) $\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{10},\ \sqrt[6]{5},\ \sqrt[6]{10},\ \sqrt[3]{5^2}$

(vi) $\sqrt[4]{4}\times\sqrt[5]{4}=\sqrt[9]{4},\ \sqrt[9]{4^2},\ \sqrt[20]{4},\ \sqrt[20]{4^9}$

(vii) $\sqrt{8}\times\sqrt{18}=\sqrt{26},\ \sqrt[4]{26},\ 12,\ \sqrt{10}$

(viii) $\sqrt[3]{5}\times\sqrt[2]{3}=\sqrt[5]{15},\ \sqrt[6]{15},\ \sqrt[6]{200},\ \sqrt[5]{8},\ \sqrt[6]{675}.$

3. সরল কর :

(i) $\sqrt{45}$ (ii) $\sqrt[3]{56}$ (iii) $\sqrt[4]{405}$ (iv) $\sqrt[3]{-216}$

(v) $\sqrt[5]{729}$ (vi) $\sqrt[3]{1080}$ (vii) $\sqrt[3]{a^4b^6}$ (viii) $\sqrt[3]{8ab^4}$

(ix) $\sqrt[3]{-54a^3b^6}$ (x) $\sqrt[4]{32a^8b^5}$ (xi) $\sqrt[5]{486x^6y^{12}}$.

4. পূর্ণ করণীতে প্রকাশ কর :

(i) $2\sqrt{5}$ (ii) $6\sqrt[3]{4}$ (iii) $3\sqrt[4]{5}$ (iv) $3\sqrt[5]{7}$

(v) $a\sqrt{b}$ (vi) $ab\sqrt[3]{c}$ (vii) $x^2y\sqrt[3]{z}$ (viii) $a^2b^3\sqrt[3]{a^2b^3}$

5. (a) দেখাও যে নিম্নলিখিত করণীগুলি সদৃশ :

(i) $\sqrt{12},\ \sqrt{75}$, এবং $\sqrt{147}$ (ii) $\sqrt[3]{54},\ \sqrt[3]{250}$ এবং $\sqrt[3]{432}$

(b) দেখাও যে নিম্নলিখিত করণীগুলি অসদৃশ :

(i) $5\sqrt{3},\ \sqrt{32}$, এবং $\sqrt{50}$ (ii) $\sqrt[3]{32},\ \sqrt[4]{80}$ এবং $\sqrt[5]{64}$

6. ন্যূনতম সমমূলীয় করণীতে প্রকাশ কর :

(i) $\sqrt{3}$ এবং $\sqrt[3]{2}$ (ii) $2\sqrt{5}$ এবং $\sqrt[4]{3}$ (iii) $\sqrt[3]{2}$ এবং $\sqrt[4]{5}$

(iv) $\sqrt[3]{3},\ \sqrt{5}$ এবং $\sqrt[3]{2}$, (v) $\sqrt[3]{2},\ \sqrt[4]{3}$ এবং $\sqrt[6]{5}$.

7. (a) ত্রিঘাত করণীতে প্রকাশ কর :

$5,\ a,\ a+b,\ b^2,\ 2\sqrt[3]{27}$

(b) চতুর্থতম ক্রমের করণীতে প্রকাশ কর :

$3,\ a+b,\ \sqrt{ab^2},\ \sqrt{7},\ 2\sqrt{5}$

8. (a) নিম্নের সংখ্যাগুলিকে মানের অধঃক্রমে সাজাও :

(i) $5,\ 2\sqrt{6},\ 3\sqrt{3}$ (ii) $\sqrt{8},\ 2\sqrt[4]{5},\ 2\sqrt{3}$.

(b) নিম্নের করণীগুলিকে মানের উর্দ্ধক্রমে সাজাও :

(i) $\sqrt[3]{3},\ \sqrt[4]{5},\ \sqrt[6]{8}$, (ii) $\sqrt[6]{6},\ \sqrt[3]{12},\ \sqrt{2}$

(c) কোন্‌টি বৃহত্তম এবং কোন্‌টি ক্ষুদ্রতম বল :

(i) $2\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{625}, \sqrt{81}$, (ii) $\sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{5}, \sqrt[6]{12}$

(iii) $\sqrt[3]{2}, \sqrt[6]{5}, \sqrt[9]{7}$, (iv) $\sqrt[9]{8}, \sqrt[12]{9}, \sqrt[18]{12}$.

9. যোগ কর :

(i) $\sqrt{5}, 3\sqrt{5}, -2\sqrt{5}$ (ii) $\sqrt{8}, -\sqrt{18}, 7\sqrt{2}$

(iii) $\sqrt[3]{27}, \sqrt[3]{24}, 5\sqrt[3]{3}$ (iv) $\sqrt{20}, -\sqrt[3]{81}, 3\sqrt{2}, 2\sqrt[3]{3}$.

10. সরল কর :

(i) $\sqrt{108}-\sqrt{75}$ [**C. U. 1922**] (ii) $\sqrt{175}-\sqrt{112}$ [**C. U. 1923**]

(iii) $\sqrt{27}-\sqrt{48}+\sqrt{75}$ (iv) $\sqrt{50}+\sqrt{18}-\sqrt{48}+\sqrt{75}$

(v) $3\sqrt{48}-4\sqrt{75}+5\sqrt{192}$ [**C. U. 1947**]

(vi) $\sqrt[3]{56}-\sqrt[3]{875}-+\sqrt[3]{189}$ (vii) $\sqrt{4ab^2}+3\sqrt{a^3b^2}-b\sqrt{9a}$

(viii) $b\sqrt{a^3}+\sqrt{(b^2a)}+\sqrt{(a^5c^2)}$ (ix) $2\sqrt[3]{a^3x}+a\sqrt[3]{-8a^3x}$.

11. সরল কর :

(i) $3\sqrt{2}\times 2\sqrt{5}$ (ii) $\sqrt{45}\times\sqrt{20}$ (iii) $5\sqrt{3}\times\sqrt{8}$

(iv) $\sqrt{45}\times\sqrt{50}\times\sqrt{72}$ (v) $\sqrt{18}\times 2\sqrt{24}\times 3\sqrt{27}$

(vi) $\sqrt[3]{54}\times\sqrt[3]{72}$ (vii) $2\sqrt[3]{4}\times 3\sqrt{5}$ (viii) $3\sqrt[5]{4}\times 4\sqrt[10]{4}$

(ix) $4\sqrt[3]{3}\times 5\sqrt[4]{5}$ (x) $6\sqrt[6]{5}\times 9\sqrt[9]{5}$ (xi) $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[4]{3}\times 2\sqrt[6]{4}$.

12. সরল কর :

(i) $(3+\sqrt{5})\times\sqrt{5}$ (ii) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})\times\sqrt{5}$

(iii) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})\times\sqrt{6}$ (iv) $\sqrt{15}\times(3\sqrt{3}-\sqrt{5})$

(v) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})\times\sqrt{ab}$ (vi) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$

(vii) $(\sqrt{5}+\sqrt{7})(3\sqrt{5}-\sqrt{7})$ (viii) $(\sqrt{a+x}+\sqrt{a})(\sqrt{a+x}-\sqrt{a})$

(ix) $(\sqrt{6}-1)(\sqrt{3}+2)(2\sqrt{2}-\sqrt{3})$ [**C. U. 1933**]

(x) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})$

2-4. (a) **করণী-নিরসন।**

কোন করণীকে অপর একটি উপযুক্ত করণী দ্বারা গুণ করিয়া একটি মূলদ রাশিতে পরিণত করার প্রণালীকে করণী-নিরসন (Rationalisation of surd) বলে এবং ঐ গুণক করণীকে করণী-নিরসক গুণনীয়ক (Rationalising factor) বলে। যেমন,

$$2\sqrt{5}\times\sqrt{5}=2\times(\sqrt{5})^2=2\times 5=10\ ;$$
$$(2+\sqrt{3})\times(2-\sqrt{3})=2^2-(\sqrt{3})^2=4-3=1\ ;$$
$$(\sqrt{7}-\sqrt{3})\times(\sqrt{7}+\sqrt{3})=(\sqrt{7})^2-(\sqrt{3})^2=7-3=4\ ;$$

এখানে, $2\sqrt{5}$, $2+\sqrt{3}$, $\sqrt{7}-\sqrt{3}$-এর করণী-নিরসক গুণনীয়ক যথাক্রমে $\sqrt{5}$, $2-\sqrt{3}$ এবং $\sqrt{7}+\sqrt{3}$.

(b) **প্রতিযোগী বা অনুবন্ধী করণী বা পূরক করণী।**

দুইটি দ্বিঘাত সরল করণীর সমষ্টি এবং অন্তরের একটিকে অপরটির **প্রতিযোগী বা অনুবন্ধী** (Conjugate) বা **পূরক** (Complementary) করণী বলে। যেমন, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ এবং $\sqrt{a}-\sqrt{b}$-এর একটি অপরটির প্রতিযোগী। সেইরূপ, $2\sqrt{5}+\sqrt{3}$ এবং $2\sqrt{5}-\sqrt{3}$ এর একটি অপরটির পূরক। $-3\sqrt{5}+\sqrt{7}$ এবং $-3\sqrt{5}-\sqrt{7}$ এর একটি অপরটির পূরক।

অনুরূপভাবে, একটি মূলদ রাশি এবং একটি দ্বিঘাত সরল করণীর সমষ্টি এবং অন্তরের একটিকে অপরটির অনুবন্ধী বা পূরক করণী বলে। যেমন, $c+\sqrt{d}$ এবং $c-\sqrt{d}$ পরস্পর পূরক; $-5+\sqrt{7}$ এবং $-5-\sqrt{7}$ পরস্পর পূরক; $3-2\sqrt{5}$ এবং $3+2\sqrt{5}$ পরস্পর পূরক।

বিশেষ দ্রষ্টব্য।

একটি দ্বিপদ দ্বিঘাত করণী এবং তাহার প্রতিযোগীর গুণফল সর্বদাই একটি মূলদ রাশি। যেমন,

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=a-b;$$
$$(c+\sqrt{d})(c-\sqrt{d})=c^2-(\sqrt{d})^2=c^2-d.$$

2-5. দ্বিঘাত করণীর কতিপয় ধর্ম।

(1) দুইটি অসদৃশ দ্বিঘাত করণীর গুণফল মূলদ রাশি হইতে পারে না।

[*The product of two dissimilar quadratic surds cannot be a rational.*]

মনে করিলাম, $\sqrt{a}$ এবং $\sqrt{b}$ দুইটি অসদৃশ দ্বিঘাত করণী।

যদি সম্ভব হয়, ধরিলাম,

$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=x$, যেখানে x একটি মূলদ রাশি;

তাহা হইলে,

$$\sqrt{a}=\frac{x}{\sqrt{b}}=\frac{x\times\sqrt{b}}{\sqrt{b}\times\sqrt{b}}=\frac{x}{b}\sqrt{b};$$

অর্থাৎ $\sqrt{a}$ এবং $\sqrt{b}$ সদৃশ করণী। সুতরাং আমাদের কল্পনা ঠিক নহে; অর্থাৎ $\sqrt{a}\times\sqrt{b}$-কে মূলদ রাশিতে প্রকাশ করা সম্ভব নহে।

(2) একটি সরল দ্বিঘাত করণী একটি মূলদ রাশি এবং একটি দ্বিঘাত করণীর সমষ্টি অথবা অন্তরের সমান হইতে পারে না।

[*A simple quadratic surd cannot be equal to the sum or difference of a rational quantity and a simple quadratic surd*].

মনে করি, $\sqrt{a}$ একটি দ্বিঘাত করণী। যদি সম্ভব হয়, ধরিলাম

$\sqrt{a}=x+\sqrt{y}$, যেখানে x একটি মূলদ রাশি এবং $\sqrt{y}$ একটি দ্বিঘাত করণী। তাহা হইলে উভয় পক্ষকে বর্গ করিয়া পাই

$$a=x^2+y+2x\sqrt{y}$$

বা, $\sqrt{y}=\frac{a-x^2-y}{2x}$ = একটি মূলদ রাশি।

কিন্তু ইহা অসম্ভব, কারণ $\sqrt{y}$ একটি করণী। সুতরাং, আমাদের কল্পনা ঠিক নহে। অনুরূপভাবে দেখানো যায়, $\sqrt{a}=x-\sqrt{y}$ হইতে পারে না।

(3) একটি সরল দ্বিঘাত করণী দুইটি অসদৃশ সরল দ্বিঘাত করণীর সমষ্টি বা অন্তরের সমান হইতে পারে না।

[*A simple quadratic surd cannot be equal to the sum or difference of two simple quadratic dissimilar surds.*]

মনে করি, $\sqrt{a}$ একটি সরল দ্বিঘাত করণী। যদি সম্ভব হয়, ধরিলাম,
$\sqrt{a}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$, যেখানে $\sqrt{x}$ এবং $\sqrt{y}$ দুইটি অসদৃশ করণী।
তাহা হইলে, উভয় পক্ষকে বর্গ করিয়া পাই,

$$a=x+y+2\sqrt{xy}$$

বা, $\sqrt{xy}=\frac{1}{2}(a-x-y)$ = একটি মূলদরাশি,

কিন্তু $\sqrt{x}$ এবং $\sqrt{y}$ অসদৃশ করণী বলিয়া $\sqrt{xy}$ একটি করণী। সুতরাং একটি করণী একটি মূলদ রাশির সমান হইবে ইহা অসম্ভব। সুতরাং আমাদের কল্পনা $\sqrt{a}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ ঠিক নহে।

অনুরূপভাবে দেখানো যাইবে

$\sqrt{a}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$ হইতে পারে না।

(4) a ও x মূলদরাশি, $\sqrt{b}$ ও $\sqrt{y}$ করণী এবং $a+\sqrt{b}=x+\sqrt{y}$ হইলে $a=x$ এবং $b=y$ হইবে।

[*If* $a+\sqrt{b}=x+\sqrt{y}$ *where* a *and* x *are both rationals and* $\sqrt{b}$ *and* $\sqrt{y}$ *are both surds then* $a=x$ *and* $b=y$.]

যদি a এবং x সমান না হয়, মনে করিলাম, $x=a+m$; তাহা হইলে

$$a+\sqrt{b}=a+m+\sqrt{y}$$

বা, $\sqrt{b}=m+\sqrt{y}$; কিন্তু ইহা অসম্ভব।

তাহা হইলে, $a=x$ এবং $\sqrt{b}=\sqrt{y}$ অর্থাৎ $b=y$.

মন্তব্য : $a+\sqrt{b}=x+\sqrt{y}$ হইলে, $a-\sqrt{b}=x-\sqrt{y}$ হইবে। কারণ, $a+\sqrt{b}=x+\sqrt{y}$ থেকে $a=x$, $b=y$; সুতরাং $a-\sqrt{b}=x-\sqrt{y}$.

2-6. দ্বিঘাত করণীযুক্ত দ্বিপদ রাশিমালার বর্গমূল নির্ণয়।

(a) লক্ষ্যণীয়, $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=(x+y)+2\sqrt{xy}=(x+y)+\sqrt{4xy}$;

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2=(x+y)-2\sqrt{xy}=(x+y)-\sqrt{4xy} ;$$

$$(x+\sqrt{y})^2=(x^2+y)+2x\sqrt{y}=(x^2+y)+\sqrt{4x^2y}.$$

$$(x-\sqrt{y})^2=(x^2+y)-2x\sqrt{y}=(x^2+y)-\sqrt{4x^2y}.$$

সুতরাং, $a+\sqrt{b}$ আকারের দ্বিপদ দ্বিঘাত করণীর বর্গমূল $\pm(\sqrt{x}+\sqrt{y})$ অথবা $\pm(x+\sqrt{y})$ আকারের এবং $a-\sqrt{b}$ আকারের দ্বিপদ দ্বিঘাত করণীর বর্গমূল $\pm(\sqrt{x}-\sqrt{y})$ অথবা $\pm(x-\sqrt{y})$ আকারের হইতে পারে যদি a^2-b ধনাত্মক পূর্ণবর্গ সংখ্যা হয়।

মনে করিলাম,

$$\sqrt{(a+\sqrt{b})}=\sqrt{x}+\sqrt{y} \text{ এবং } x>y.$$

এখন, উভয় পক্ষকে বর্গ করিয়া পাই,

$$a+\sqrt{b}=x+y+2\sqrt{xy}.$$

তাহা হইলে, $x+y=a$ এবং $2\sqrt{xy}=\sqrt{b}$

অর্থাৎ, $x+y=a$ এবং $4xy=b$

এখন, $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=a^2-b.$

মনে করি, $a^2-b>0$; $\therefore\ x-y=\sqrt{a^2-b}.$

তাহা হইলে, $x=\frac{1}{2}\{a+\sqrt{a^2-b}\}$; $y=\frac{1}{2}\{a-\sqrt{a^2-b}\}$

$$\therefore\ \sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\tfrac{1}{2}\{a+\sqrt{(a^2-b)}\}}+\sqrt{\tfrac{1}{2}\{a-\sqrt{(a^2-b)}\}}$$

সুতরাং, $a+\sqrt{b}$ এর বর্গমূল

$$=\ \pm\left[\sqrt{\tfrac{1}{2}\{a+\sqrt{(a^2-b)}\}}+\sqrt{\tfrac{1}{2}\{a-\sqrt{(a^2-b)}\}}\right]$$

অনুরূপভাবে, $a-\sqrt{b}$ এর বর্গমূল

$$=\ \pm\left[\sqrt{\tfrac{1}{2}\{a+\sqrt{(a^2-b)}\}}-\sqrt{\tfrac{1}{2}\{a-\sqrt{(a^2-b)}\}}\right].$$

মন্তব্য ঃ a^2-b রাশিটি ধনাত্মক পূর্ণবর্গ না হইলে উপরোক্ত নিয়মে বর্গমূল নির্ণয় করা যাইবে না। a^2-b ধনাত্মক কিন্তু পূর্ণবর্গ নয়, তাহা হইলে $a\pm\sqrt{b}$ এর বর্গমূল নির্ণয় করা যাইতে পারে, কিন্তু ওইরূপ ক্ষেত্রে বর্গমূল দ্বিঘাত করণী হইবে না। তখন, $a\pm\sqrt{b}=\sqrt{k}(c\pm\sqrt{d})$ আকারে লিখিয়া $c\pm\sqrt{d}$ এর বর্গমূল উপরোক্ত নিয়মে বাহির করিলে $a\pm\sqrt{b}$ এর বর্গমূল পাওয়া যাইবে।

অনুরূপভাবে, $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}=\sqrt{k}(c\pm\sqrt{d})$ আকারে লিখিয়া $c\pm\sqrt{d}$ এর বর্গমূল উপরোক্ত নিয়মে বাহির করিলে $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ এর বর্গমূল পাওয়া যাইবে।

(b) লক্ষ্যণীয়,

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2=(x+y+z)+2\sqrt{xy}+2\sqrt{yz}+2\sqrt{zx}\ ;$$

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z})^2=(x+y+z)-2\sqrt{xy}-2\sqrt{yz}+2\sqrt{zx}\ ;$$

$$(x+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2=(x^2+y+z)+2x\sqrt{y}+2\sqrt{yz}+2x\sqrt{z}\ ;$$

$$(x-\sqrt{y}+\sqrt{z})=(x^2+y+z)-2x\sqrt{y}-2\sqrt{yz}+2x\sqrt{z}\ ;$$

তাহা হইলে, $a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$ এর বর্গমূল $\pm(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})$ অথবা $\pm(x+\sqrt{y}+\sqrt{z})$ আকারে হইতে পারে ; এবং $a+\sqrt{b}-\sqrt{c}-\sqrt{d}$ এর বর্গমূল $\pm(\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z})$ অথবা $\pm(x-\sqrt{y}+\sqrt{z})$ আকারে হইতে পারে।

ধরিলাম, $\sqrt{a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$;

উভয় পক্ষকে বর্গ করিয়া পাই,

$$a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}=x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{yz}+2\sqrt{zx} ;$$

তাহা হইলে,

$$x+y+z=a ;\ 2\sqrt{xy}=\sqrt{b} ;\ 2\sqrt{yz}=\sqrt{c} ;\ 2\sqrt{zx}=\sqrt{d}.$$

$$\therefore\ 2\sqrt{zx}\,.\,2\sqrt{xy}=\sqrt{d}\times\sqrt{b}$$

বা, $2x\,.\,2\sqrt{yz}=\sqrt{bd}$

বা, $2x\,.\,\sqrt{c}=\sqrt{bd}$

$$\therefore\ x=\frac{\sqrt{bd}}{2\sqrt{c}}=\sqrt{\frac{bd}{4c}};$$

অনুরূপভাবে, $y=\sqrt{\frac{bc}{4d}};\ z=\sqrt{\frac{cd}{4b}}$.

সুতরাং, $a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$ এর বর্গমূল

$$=\pm\left[\sqrt[4]{\frac{bd}{4c}}+\sqrt[4]{\frac{bc}{4d}}+\sqrt[4]{\frac{cd}{4b}}\right].$$

[প্রয়োজনীয় শর্ত : $2a=\sqrt{\frac{bc}{d}}+\sqrt{\frac{cd}{b}}+\sqrt{\frac{db}{c}}$, কারণ, উভয় পক্ষই $2(x+y+z)$ এর সমান।]

অনুরূপভাবে, $\sqrt{a+\sqrt{b}-\sqrt{c}-\sqrt{d}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z}$ লিখিয়া পূর্বোক্ত নিয়মে বর্গমূল পাওয়া যাইতে পারে।

বিশেষ দ্রষ্টব্য :

অনেক সময়ে পর্যবেক্ষণ দ্বারা অতি সহজেই বর্গমূল নির্ণয় করা যাইতে পারে। $a\pm\sqrt{b}$ আকারের করণীকে $a\pm2\sqrt{c}\sqrt{d}$ অর্থাৎ $(\sqrt{c}\pm\sqrt{d})^2$ অথবা $a\pm2c\sqrt{d}$ অর্থাৎ $(c\pm\sqrt{d})^2$ আকারে লিখিয়া অতি সহজেই বর্গমূল নির্ণয় করা যায়।

অনুরূপ পদ্ধতিতে $(a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d})$ এবং $(a+\sqrt{b}-\sqrt{c}-\sqrt{d})$ এর বর্গমূল নির্ণয় করা যাইতে পারে।

উদাহরণ 1. a মূলদ রাশি এবং $\sqrt{b}$ অমূলদ রাশি এবং $\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})}=x+\sqrt{y}$ হইলে দেখাও যে, $\sqrt[3]{(a-\sqrt{b})}=x-\sqrt{y}$ হইবে।

$\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})}=x+\sqrt{y}$ এর উভয় পক্ষকে ঘন করিয়া পাই,

$$\begin{aligned} a+\sqrt{b} &= (x+\sqrt{y})^3 \\ &= x^3+3x^2\sqrt{y}+3x(\sqrt{y})^2+(\sqrt{y})^3 \\ &= x^3+3x^2\sqrt{y}+3xy+y\sqrt{y} \\ &= (x^3+3xy)+(3x^2+y)\sqrt{y} \end{aligned}$$

মূলদ অংশের সহিত মূলদ অংশ এবং অমূলদ অংশের সহিত অমূলদ অংশের সমতা হইতে পাই,

$$x^3+3xy=a \;;\; (3x^2+y)\sqrt{y}=\sqrt{b}.$$

$$\therefore \quad a-\sqrt{b}=(x^3+3xy)-(3x^2+y)\sqrt{y}$$
$$=(x-\sqrt{y})^3.$$
$$\therefore \quad \sqrt[3]{(a-\sqrt{b})}=x-\sqrt{y}.$$

উদাহরণ 2. $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}$ এর করণী-নিরসক উৎপাদক বাহির কর।

যেহেতু, $(\sqrt[3]{x})^3-(\sqrt[3]{y})^3=x-y$,

$$\begin{aligned} \therefore \quad x-y &= (\sqrt[3]{x})^3-(\sqrt[3]{y})^3 \\ &= (\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})\{(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}\times\sqrt[3]{y}+(\sqrt[3]{y})^2\} \\ &= (\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}). \end{aligned}$$

$\therefore$ নির্ণেয় করণী-নিরসক উৎপাদক

$$=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}.$$

উদাহরণ 3. হরের করণী নিরসণ কর :

(i) $\dfrac{2}{5\sqrt[3]{4}}$, (ii) $\dfrac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$, (iii) $\dfrac{7}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

(iv) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

(i) প্রদত্ত রাশি $=\dfrac{2}{5\sqrt[3]{2^2}}=\dfrac{2\sqrt[3]{2}}{5\sqrt[3]{2^2}\times\sqrt[3]{2}}=\dfrac{2\sqrt[3]{2}}{5\times 2}=\dfrac{\sqrt[3]{2}}{5}$.

(ii) প্রদত্ত রাশিমালা $=\dfrac{(3-\sqrt{5})\times(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})\times(3-\sqrt{5})}=\dfrac{(3-\sqrt{5})^2}{3^2-(\sqrt{5})^2}$

$$=\frac{9+5-6\sqrt{5}}{9-5}=\frac{14-6\sqrt{5}}{4}=\frac{7-3\sqrt{5}}{2}.$$

(iii) $\dfrac{7}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\dfrac{7\times(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}=\dfrac{7(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{2}$.

(iv) প্রদত্ত রাশি $=\dfrac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}=\dfrac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$$=\frac{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})\times\sqrt{2}}{2\times 2}=\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}.$$

উদাহরণ 4. সরল কর :— $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

$$\text{প্রদত্ত রাশিমালা}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})\times(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$$

$$=\frac{(5+2\sqrt{6})-(5-2\sqrt{6})}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$=\frac{4\sqrt{6}}{3-2}=4\sqrt{6}.$$

উদাহরণ 5. বর্গমূল নির্ণয় কর :

(*i*) $7+4\sqrt{3}$ (*ii*) $5-2\sqrt{6}$ (*iii*) $7\sqrt{2}+4\sqrt{6}$

(*i*) $7+4\sqrt{3}=7+2.2.\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^2$

∴ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(2+\sqrt{3})$.

(*ii*) $5-2\sqrt{6}=5-2\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$

∴ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

(*iii*) $7\sqrt{2}+4\sqrt{6}=\sqrt{2}(7+4\sqrt{3})=\sqrt{2}(2+\sqrt{3})^2$

∴ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\sqrt[4]{2}(2+\sqrt{3})$.

উদাহরণ 6. বর্গমূল নির্ণয় :

$$14+6\sqrt{2}-6\sqrt{3}-2\sqrt{6}.$$

প্রদত্ত রাশিমালা $=14+2.3.\sqrt{2}-2.3.\sqrt{3}-2.\sqrt{2}.\sqrt{3}$

$=(3+\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$.

∴ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(3+\sqrt{2}-\sqrt{3})$.

উদাহরণ 7. বর্গমূল নির্ণয় কর :

(*i*) $8-2\sqrt{15}$ (*ii*) $6+2\sqrt{3}-\sqrt{8-2\sqrt{6}}$

(*i*) ধরিলাম, $\sqrt{8-2\sqrt{15}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$ এবং $x>y$

∴ $8-2\sqrt{15}=x+y-2\sqrt{xy}$.

∴ $x+y=8$; $2\sqrt{xy}=2\sqrt{15}$ বা, $xy=15$.

তাহা হইলে, $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$

$=8^2-4\times15=4$.

∴ $x-y=2$

সুতরাং, $2x=10$, ∴ $x=5$; $y=3$.

∴ $8-2\sqrt{15}$ এর বর্গমূল $=\pm(\sqrt{5}-\sqrt{3})$.

(*ii*) ধরিলাম,

$$\sqrt{6+2\sqrt{3}-\sqrt{8-2\sqrt{6}}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}.$$

∴ বর্গ করিয়া পাই,

$$6+2\sqrt{3}-\sqrt{8-2\sqrt{6}}=x+y+z+2\sqrt{xy}-2\sqrt{yz}-2\sqrt{zx}$$

∴ $x+y+z=6$; $\sqrt{xy}=\sqrt{3}$; $\sqrt{yz}=\sqrt{2}$; $\sqrt{zx}=\sqrt{6}$.

∴ $\sqrt{xy}\cdot\sqrt{zx}=\sqrt{3}\times\sqrt{6}$, বা, $x\sqrt{yz}=3\sqrt{2}$

বা, $x\times\sqrt{2}=3\sqrt{2}$, ∴ $x=3$;

আবার, $\sqrt{xy}\times\sqrt{yz}=\sqrt{3}\times\sqrt{2}$, বা, $y\sqrt{zx}=\sqrt{6}$

বা, $y\times\sqrt{6}=\sqrt{6}$, ∴ $y=1$;

আবার, $\sqrt{yz}\times\sqrt{zx}=\sqrt{2}\times\sqrt{6}$, বা, $z\sqrt{xy}=2\sqrt{3}$

বা, $z\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$; ∴ $z=2$

∴ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(\sqrt{3}+\sqrt{1}-\sqrt{2})$

$$=\pm(1+\sqrt{3}-\sqrt{2}).$$

প্রশ্নমালা 5

1. a ও x মূলদ এবং $\sqrt{b}$ ও $\sqrt{y}$ অমূলদ রাশির জন্য $a+\sqrt{b}=x+\sqrt{y}$ হইলে দেখাও যে, $a-\sqrt{b}=x-\sqrt{y}$.

2. যদি a, b, c, d মূলদ রাশির জন্য $a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}$ হয় তবে (i) $a=c$, এবং $b=d$ হইবে অথবা (ii) b ও d পূর্ণবর্গ রাশি হইবে।

3. a মূলদ এবং $\sqrt{b}$ অমূলদ এবং $\sqrt{(a+\sqrt{b})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ হইলে দেখাও যে

$$\sqrt{(a-\sqrt{b})}=\sqrt{x}-\sqrt{y}.$$

4. a^2-b ধনাত্মক মূলদ রাশি হইলে $\sqrt{(a+\sqrt{b})}+\sqrt{(a-\sqrt{b})}$ মূলদ রাশি হইবে যদি a^2-b এবং $\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-b})$ উভয়ে পূর্ণবর্গ রাশি হয়।

5. করণী-নিরসক উৎপাদক নির্ণয় কর :

(*i*) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}$, (*ii*) $\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}$, (*iii*) $\sqrt[p]{a}+\sqrt[q]{b}$.

6. হরের করণী নিরসন কর :

(*i*) $\dfrac{2}{5\sqrt[3]{3}}$ (*ii*) $\dfrac{5}{2\sqrt[3]{9}}$ (*iii*) $\dfrac{3}{\sqrt{5}-2}$

(*iv*) $\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ (*v*) $\dfrac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$ (*vi*) $\dfrac{2}{3\sqrt{5}-2\sqrt{11}}$

(*vii*) $\dfrac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$ (*viii*) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

(ix) $\dfrac{1}{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{15}}$ (x) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$

(xi) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}$ (xii) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$

7. সরল কর :—

(i) $\dfrac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}+\dfrac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$ (ii) $\dfrac{1}{a+\sqrt{a^2-1}}+\dfrac{1}{a-\sqrt{a^2-1}}$

(iii) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}$

(iv) $(2+\sqrt{3})^{-3}+(2-\sqrt{3})^{-3}$ (v) $\dfrac{5}{\sqrt[3]{9}-1}+\dfrac{4}{\sqrt[3]{9}+1}$

(vi) $\dfrac{2}{4+3\sqrt{2}}-\dfrac{4}{\sqrt{6}+2}+\dfrac{6}{2\sqrt{6}+3\sqrt{2}}$ (vii) $\dfrac{5}{\sqrt[3]{9}+1}+\dfrac{4}{\sqrt[3]{9}-1}$

8. বর্গমূল নির্ণয় কর :—

(i) $9+4\sqrt{5}$ (ii) $19-8\sqrt{3}$ (iii) $12-2\sqrt{35}$

(iv) $28+5\sqrt{12}$ [**P. U. 1965**]

(v) $17-12\sqrt{2}$ [**H. S. 1962**]

(vi) $33-4\sqrt{35}$ [**H. S. 1961**]

(vii) $a+b+c-2\sqrt{ac+bc}$ (viii) $a^2-2b\sqrt{a^2-b^2}$

(ix) $2x+1+2\sqrt{x^2+x-2}$ (x) $5+\sqrt{21}$

(xi) $7-3\sqrt{5}$ (xii) $x+\sqrt{x^2-y^2}$

(xii) $4-\sqrt{15}$ [**P. U. 1969**] (xiv) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$ [**H. S. 1963**]

(xv) $28-6\sqrt{3}$ [**H. S. 1974**] (xvi) $18+6\sqrt{5}$ [**H. S. 1965**]

(xvii) $7\sqrt{2}-4\sqrt{6}$ (xvii) $\sqrt{75}-\sqrt{72}$

(xix) $\sqrt{147}-\sqrt{135}$

(xx) $a+b+\sqrt{2ab+b^2}$ [**H. S. 1967**] (xxi) $1+x+\sqrt{2x+x^2}$ [**H. S. Comp. 1973**]

(xxii) $\frac{1}{2}(3x+1)-\sqrt{2x^2-x-6}$ [**H. S. 1971**] (xxiii) $1+x^2+\sqrt{1+x^2+x^4}$ [**H. S. 1969**]

(xxiv) $8+2\sqrt{2}-2\sqrt{5}-2\sqrt{10}$ [**H. S. 1964**]

(xxv) $5-\sqrt{10}-\sqrt{15}+\sqrt{6}$ [**P. U. 1961**]

9. সরল কর :—

(i) $\sqrt{(28-5\sqrt{12})}$ (ii) $\sqrt{(101+28\sqrt{13})}$ [**P. U. 1971**]

(iii) $\sqrt{5\sqrt{2}-4\sqrt{3}}$ (iv) $\sqrt{\{6-4\sqrt{3}+\sqrt{(16-8\sqrt{3})}\}}$

(v) $\sqrt[4]{(49+20\sqrt{6})}$ (vi) $\sqrt[4]{(97-56\sqrt{3})}$

(vii) $\sqrt{[6+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}]}$ (viii) $\sqrt{\{11+2(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{7})\}}$

(ix) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{45}}{\sqrt{2}+\sqrt{(7-2\sqrt{10})}}$ (x) $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{(2+\sqrt{3})}}$

2-7. করণী সম্বন্ধীয় জটিল প্রশ্নাবলী :—

উদাহরণ 1. সরল কর :

$$\frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}-\frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} \quad [\text{H. S. 1966}]$$

প্রদত্ত রাশিমালা

$$=\frac{3\sqrt{7}\times(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}-\frac{5\sqrt{5}\times(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{2})^2}+\frac{2\sqrt{2}\times(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{5})^2}$$

$$=\frac{3\sqrt{35}-3\sqrt{14}}{5-2}-\frac{5\sqrt{35}-5\sqrt{10}}{7-2}+\frac{2\sqrt{14}-2\sqrt{10}}{7-5}$$

$$=(\sqrt{35}-\sqrt{14})-(\sqrt{35}-\sqrt{10})+(\sqrt{14}-\sqrt{10})=0$$

উদাহরণ 2. সরল কর :

$$\frac{\sqrt{(5+2\sqrt{6})}-\sqrt{(5-2\sqrt{6})}}{\sqrt{(5+2\sqrt{6})}+\sqrt{(5-2\sqrt{6})}}$$

$$\sqrt{(5+2\sqrt{6})}=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}+\sqrt{2};$$

$$\sqrt{(5-2\sqrt{6})}=\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}.$$

∴ প্রদত্ত রাশিমালা

$$=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})-(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{3}\sqrt{6}$$

উদাহরণ 3. $x=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ এবং $y=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ হইলে $\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$ এর মান নির্ণয় কর। [**P. U. 1969**]

$$x+y=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

$$=\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2+(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{2(5+3)}{5-3}=8.$$

$$xy = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = 1.$$

$\therefore \quad x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy=64-1=63$

$x^2-xy+y^2=(x+y)^2-3xy=64-3=61$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালার মান $= \frac{63}{61}$.

উদাহরণ 4. $x=\frac{2}{7}\sqrt{10}$ হইলে

$\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$ এর মান নির্ণয় কর। [H. S. 1968]

$$1+x=1+\frac{2\sqrt{10}}{7}=\tfrac{1}{7}(7+2\sqrt{5}\times\sqrt{2})=\tfrac{1}{7}(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2 ;$$

$$1-x=1-\frac{2\sqrt{10}}{7}=\tfrac{1}{7}(7-2\sqrt{5}\times\sqrt{2})=\tfrac{1}{7}(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2.$$

$$\therefore \quad \sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}=\frac{1}{\sqrt{7}}(\sqrt{5}+\sqrt{2})-\frac{1}{\sqrt{7}}(\sqrt{5}-\sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=\frac{1}{\sqrt{7}}(\sqrt{5}+\sqrt{2})+\frac{1}{\sqrt{7}}(\sqrt{5}-\sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালার মান

$$=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\times\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{1}{5}\sqrt{10}$$

উদাহরণ 5. $x=2+2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}$ হইলে,

x^3-6x^2+6x+7 এর মান বাহির কর। [H. S. Comp. 1974]

এখানে, $x-2=2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}$;

$$\therefore \quad (x-2)^3=\left(2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}\right)^3$$

$$=\left(2^{\frac{2}{3}}\right)^3+\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3+3\times2^{\frac{2}{3}}\times2^{\frac{1}{3}}\times\left(2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$=2^2+2+3\times2\times(x-2)$$

$$=6+6(x-2)$$

বা, $x^3-6x^2+12x-8=6+6x-12$

বা, $x^3-6x^2+6x=2$

$\therefore \quad x^3-6x^2+6x+7=9.$

উদাহরণ 6. দেখাও যে,

$$\sqrt{x^2+2y\sqrt{(x^2-y^2)}}-\sqrt{x^2-2y\sqrt{(x^2-y^2)}}=2y$$

যদি $x^2>2y^2$ হয়। [H. S. 1970]

মনে করি, $\sqrt{x^2+2y\sqrt{(x^2-y^2)}}-\sqrt{x^2-2y\sqrt{(x^2-y^2)}}=k.$

উভয় পক্ষকে বর্গ করিয়া পাই,

$$(x^2+2y\sqrt{(x^2-y^2)})+(x^2-2y\sqrt{(x^2-y^2)})$$
$$-2.\sqrt{x^2+2y\sqrt{(x^2-y^2)}}\times\sqrt{x^2-2y\sqrt{(x^2-y^2)}}=k^2$$

বা, $2x^2-2\sqrt{\{x^4-4y^2(x^2-y^2)\}}=k^2$

বা, $2x^2-2\sqrt{(x^2-2y^2)^2}=k^2$

বা, $2x^2-2(x^2-2y^2)=k^2,\quad\therefore\quad k^2=4y^2.$

$$\therefore\quad k=2y.$$

প্রশ্নমালা 6

সরল কর :—

1. $\dfrac{\sqrt5}{\sqrt3+\sqrt2}-\dfrac{3\sqrt3}{\sqrt2+\sqrt5}+\dfrac{2\sqrt2}{\sqrt5+\sqrt3}$ [H. S. Comp. 1974]

2. $\dfrac{3\sqrt2}{\sqrt3+\sqrt6}-\dfrac{4\sqrt3}{\sqrt6+\sqrt2}+\dfrac{\sqrt6}{\sqrt2+\sqrt3}$ [Joint Ent. Ex. 1974]

3. $\dfrac{\sqrt3}{\sqrt7+\sqrt{11}}-\dfrac{2\sqrt7}{\sqrt{11}+\sqrt3}+\dfrac{\sqrt{11}}{\sqrt3+\sqrt7}$ [P. U. 1970]

4. $\dfrac{1}{\sqrt2+\sqrt3}-\dfrac{\sqrt3+1}{2+\sqrt3}+\dfrac{\sqrt2+1}{3+2\sqrt2}$ [H. S. 1969]

5. $\dfrac{1}{1-\sqrt2+\sqrt3}+\dfrac{1}{1-\sqrt2-\sqrt3}-\dfrac{2}{1+\sqrt2-\sqrt3}+\dfrac{3}{\sqrt2}$ [H.S. 1975]

6. $\dfrac{1}{\sqrt{(11-2\sqrt{30})}}-\dfrac{3}{\sqrt{(7-2\sqrt{10})}}-\dfrac{4}{\sqrt{(8+4\sqrt3)}}$
[Joint Ent. Ex. 1970 ; P. U. 1974]

7. $\dfrac{1}{\sqrt{(12-\sqrt{140})}}-\dfrac{1}{\sqrt{(8-\sqrt{60})}}-\dfrac{2}{\sqrt{(10+\sqrt{84})}}$

8. (i) $\dfrac{\sqrt3+\sqrt2}{\sqrt2+\sqrt{(2+\sqrt3)}}-\dfrac{\sqrt3-\sqrt2}{\sqrt2-\sqrt{(2+\sqrt3)}}$

(ii) $\dfrac{\sqrt3+\sqrt2}{\sqrt2+\sqrt{(2+\sqrt3)}}-\dfrac{\sqrt3-\sqrt2}{\sqrt2-\sqrt{(2-\sqrt3)}}$

9. $\dfrac{\sqrt{(\sqrt{12}-\sqrt{8})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}}{\sqrt{(5+\sqrt{24})}}$ [**H. S. 1963 ; Joint Ent. Ex. 1969**]

10. $\dfrac{(3+\sqrt{3})(3+\sqrt{5})(\sqrt{5}-2)}{(5-\sqrt{5})(1+\sqrt{3})}$ [**H. S. 1972**]

11. $\dfrac{(5+\sqrt{7})(7-2\sqrt{5})(31+13\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(6-2\sqrt{7})(11+4\sqrt{7})}$

12. $\dfrac{(4+\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}+(4-\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}}{(6+\sqrt{35})^{\frac{3}{2}}-(6-\sqrt{35})^{\frac{3}{2}}}$ [**Joint Ent. Ex. 1972**]

13. দেওয়া আছে $\sqrt{5}=2{\cdot}23607$; মান নির্ণয় কর :—

$$\frac{\sqrt{(3-\sqrt{5})}}{\sqrt{2}+\sqrt{(7-3\sqrt{5})}}$$ [**Joint Ent. Ex. 1973**]

14. নিম্নের প্রদত্ত রাশিটির সরল কর :—

$$\left(\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\frac{6\sqrt{7}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}\right)-\left(\frac{10\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}\right)$$

এবং $\sqrt{14}=3{\cdot}742$ হইলে, এই রাশিটির মান নির্ণয় কর। [**H. S. 1976**]

15. $x=1+3^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{1}{3}}$ হইলে, দেখাও যে, $x^3-3x^2-6x-4=0$

[**H. S. 1967**]

16. যদি $x=(a+\sqrt{a^2+b^3})^{\frac{1}{3}}+(a-\sqrt{a^2+b^3})^{\frac{1}{3}}$ হইলে

$x^3+3bx-2a$-এর মান নির্ণয় কর।

17. $x=a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$ হইলে, দেখাও যে, $a(bx^3-3bx-a)=b^2$

[**C. U. 1951**]

18. $x=\dfrac{\sqrt{a+2b}+\sqrt{a-2b}}{\sqrt{a+2b}-\sqrt{a-2b}}$ হইলে, দেখাও যে, $bx^2-ax+b=0$

19. $x=9+4\sqrt{5}$ হইলে, $\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ এর মান নির্ণয় কর। [**P. U. 1966**]

20. সরল কর :—

$$\frac{1+x}{1+\sqrt{1+x}}+\frac{1-x}{1-\sqrt{1-x}},$$ যখন $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

[**Joint Ent. Ex. 1972**]

21. যদি $2x=\sqrt{a}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ হয়, দেখাও যে, $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{2}(a-1)$

[**H. S. 1973**]

22. $x=\sqrt{\dfrac{n-1}{n+1}}$ হইলে, $\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2+\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2$ এর মান বাহির কর।

23. $x=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ এবং $y=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ হইলে, দেখাও যে,

$$\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}=\frac{15}{13}$$ [**H. S. 1960 ; P. U. 1973**]

24. $x=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ এবং $y=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ হইলে,

(i) $4y^2-2xy-3x^2$ (ii) $3y^2-2xy+3x^2$-এর মান নির্ণয় কর।

25. $x=\frac{1}{2}\left[a+\sqrt{\dfrac{4b^3-a^3}{3a}}\right]$ এবং $y=\frac{1}{2}\left[a-\sqrt{\dfrac{4b^3-a^3}{3a}}\right]$

হইলে, দেখাও যে, $x^3+y^3=b^3$

26. $2x=a+\dfrac{1}{a}$ এবং $2y=b+\dfrac{1}{b}$ হইলে, $xy+\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}$

এর মান নির্ণয় কর।

27. দেখাও যে, $\sqrt{y+\sqrt{(2xy-x^2)}}+\sqrt{y-\sqrt{(2xy-x^2)}}=\sqrt{(2x)}$

[**C. U. 1927**]

28. সরল কর :—

$\sqrt{a^2+2b\sqrt{(a^2-b^2)}}+\sqrt{a^2-2b\sqrt{(a^2-b^2)}}$

29. দেখাও যে, $\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)}-\sqrt[3]{(\sqrt{5}-2)}=1$

30. $\sqrt[3]{(6\sqrt{3}+10)}-\sqrt[3]{(6\sqrt{3}-10)}$ এর বাস্তব মান বাহির কর।

31. $\sqrt[3]{(x+y)}+\sqrt[3]{(y+z)}+\sqrt[3]{(z+x)}=0$ হইলে,

প্রমাণ কর, $(x+y+z)^3=9(x^3+y^3+z^3)$

32. $\sqrt{x}+\sqrt{a-x}=\sqrt{y}+\sqrt{a-y}=\sqrt{z}+\sqrt{a-z}$ হইলে

দেখাও যে, $(y-z)(z-x)(x-y)=0$ [**C. U. 1930**]

33. $(x+\sqrt{x^2-bc})(y+\sqrt{y^2-ca})(z+\sqrt{z^2-ab})$

$=(x-\sqrt{x^2-bc})(y-\sqrt{y^2-ca})(z-\sqrt{z^2-ab})$ হইলে,

প্রমাণ কর যে, উভয় পক্ষের মান $\pm abc$ হইবে।

2-8. করণী সম্বন্ধীয় সমীকরণের সমাধান।

উদাহরণ 1. সমাধান কর :— $\sqrt{x}+\sqrt{x-5}=\dfrac{10}{\sqrt{x-5}}$

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই,

$$\sqrt{x}\times\sqrt{x-5}+(x-5)=10$$

বা, $\sqrt{x(x-5)}=15-x$

উভয় পক্ষকে বর্গ করিয়া পাই,

$$x(x-5)=(15-x)^2$$

বা, $x^2-5x=225-30x+x^2$

বা, $25x=225,\quad \therefore\ x=9.$

উদাহরণ 2. সমাধান কর :—

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}=\sqrt{4x+7}$$ [**C. U. 1920**]

সমীকরণের উভয় পক্ষকে বর্গ করিয়া পাই,

$$(x+1)+(x+3)+2\sqrt{x+1}\times\sqrt{x+3}=4x+7$$

বা, $\sqrt{(x+1)(x+3)}=x+\frac{3}{2}$

ইহার উভয় পক্ষকে বর্গ করিয়া পাই,

$$(x+1)(x+3)=(x+\tfrac{3}{2})^2$$

বা, $x^2+4x+3=x^2+3x+\frac{9}{4}$

বা, $4x-3x=\frac{9}{4}-3;\quad \therefore\ x=-\frac{3}{4}.$

উদাহরণ 3. সমাধান কর :—

$$\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}=\sqrt[3]{2}.$$

$$\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}=\sqrt[3]{2} \quad \cdots \quad (1)$$

উভয় পক্ষকে ঘন করিয়া পাই,

$$(1+x)+(1-x)+3\ .\ \sqrt[3]{1+x}\times\sqrt[3]{1-x}\times[\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}]=2$$

বা, $2+3\sqrt[3]{1-x^2}\times[\sqrt[3]{2}]=2$

বা, $\sqrt[3]{1-x^2}=0,\quad$ বা, $1-x^2=0,\quad \therefore\ x=\pm 1.$

উদাহরণ 4. সমাধান কর :—

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}=5$$ [**C. U. 1942**]

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}=5 \quad \cdots \quad (1)$$

যেহেতু, $(x+2)-(x-3)=5,$

$\therefore\ (\sqrt{x+2})^2-(\sqrt{x-3})^2=5$

বা, $(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3})(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3})=5 \quad \cdots \quad (2)$

(1) এবং (2) হইতে পাই,

$$5\times(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3})=5$$

বা, $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3}=1$ ... (3)

(1) এবং (3) যোগ করিয়া পাই,

$2\sqrt{x+2}=6,$ বা, $\sqrt{x+2}=3$

বা, $x+2=9,$ $\therefore\ x=7.$

উদাহরণ 5. সমাধান কর :—

$$\sqrt{3x^2+2x+8}+\sqrt{3x^2+2x-7}=15$$

$$\sqrt{3x^2+2x+8}+\sqrt{3x^2+2x-7}=15 \quad \cdots \quad (1)$$

যেহেতু, $(3x^2+2x+8)-(3x^2+2x-7)=15,$

$\therefore\ (\sqrt{3x^2+2x+8})^2-(\sqrt{3x^2+2x-7})^2=15$

বা, $(\sqrt{3x^2+2x+8}+\sqrt{3x^2+2x-7})(\sqrt{3x^2+2x+8}-\sqrt{3x^2+2x-7})$
$=15$

(1) এবং (2) হইতে পাই, ... (2)

$15\times(\sqrt{3x^2+2x+8}-\sqrt{3x^2+2x-7})=15$

বা, $\sqrt{3x^2+2x+8}-\sqrt{3x^2+2x-7}=1$ ... (3)

(1) এবং (3) যোগ করিয়া পাই,

$2\times\sqrt{3x^2+2x+8}=16,$ বা, $3x^2+2x+8=64$

বা, $3x^2+2x-56=0$

বা, $3x^2-12x+14x-56=0.$

বা, $3x(x-4)+14(x-4)=0$

বা, $(x-4)(3x+14)=0,$

$\therefore\ x=4,\ -4\frac{2}{3}.$

উদাহরণ 6. সমাধান কর :—

$$x^2+5x+\sqrt{x^2+5x+2}=18$$

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই,

$(x^2+5x+2)+\sqrt{x^2+5x+2}=20.$ ... (1)

$\sqrt{x^2+5x+2}=a$ ধরিলাম.

তাহা হইলে (1) হইতে পাই,

$a^2+a-20=0$ বা, $(a-4)(a+5)=0.$

$\therefore\ a=4,\ -5.$

$\sqrt{x^2+5x+2}$ একটি ধনাত্মক রাশি বলিয়া ইহার মান ঋণাত্মক হইতে পারে না। কাজেই $a=-5$ এর জন্য সমীকরণটিকে পরিত্যাগ করিতে হইবে।

এখন, $a=4$ এর জন্য

$$\sqrt{x^2+5x+2}=4 \quad বা, \quad x^2+5x+2=16$$

$$বা, \quad x^2+5x-14=0 \quad বা, \quad (x-2)(x+7)=0$$

$\therefore$ নির্ণেয় উত্তর : $x=2, -7$.

প্রশ্নমালা 7

সমাধান কর :—

1. $\sqrt{x+6}+\sqrt{x-2}=4$ [C. U. 1947]

2. $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}=5$ [C. U. 1946]

3. $2(x+2)=1+\sqrt{4x^2+9x+4}$.

4. $4\sqrt{x+2}-\sqrt{x+7}=\sqrt{x+23}$.

5. $\sqrt{x}+\sqrt{x-9}=\dfrac{36}{\sqrt{x-9}}$ [C. U. 1950]

6. $\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\dfrac{1}{2}$.

7. $\dfrac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}=2$

8. $\dfrac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-b}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-b}}=\dfrac{a-b}{a+b}$

9. $x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}=2$ [C. U. 1930]

10. $\sqrt[3]{4a+x}+\sqrt[3]{4a-x}=2\sqrt[3]{a}$.

11. $(a+x)^{\frac{2}{3}}+2(a-x)^{\frac{2}{3}}=3(a^2-x^2)^{\frac{1}{3}}$

12. $\sqrt{5x+3}+\sqrt{5x-3}=3\sqrt{2x}$

13. $\sqrt{4x-9}+\sqrt{4x+9}=5+\sqrt{7}$. [Joint Ent. Ex. 1975]

14. $\sqrt{x^2-9}+\sqrt{x^2+9}=4+\sqrt{34}$. [C. U. 1927]

15. $\sqrt{2x^2+7}-\sqrt{2x^2-7}=5-\sqrt{11}$. [C. U. 1948]

16. $\sqrt{2x^2+5x-2}-\sqrt{2x^2+5x-9}=1$. [P. U. 1970]

17. $\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{3x^2-5x+2}=x+1$.

18. $\sqrt{x^2+11x+20}-\sqrt{x^2+5x-1}=3$. [C. U. 1918]

19. $4x^2+6x+\sqrt{2x^2+3x+4}=13$. [Joint Ent. Ex. 1972]

20. $4x^2-10x+\sqrt{2x^2-5x+6}=9$.

তৃতীয় অধ্যায়

জটিল সংখ্যা

(Complex Number)

3-1. উপস্থাপন।

ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যে কোন বাস্তব সংখ্যার বর্গ সর্ব্বদাই ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা। যেমন, $4^2=16$, $(-3)^2=9$, $(\pm\sqrt{5})^2=5$ ইত্যাদি। সুতরাং যে কোন ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার বর্গমূল বাস্তব সংখ্যা। কিন্তু কোন ঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যার বর্গমূল বাস্তব সংখ্যা হইতে পারে না। সেইজন্য বীজগণিতে, $x^2=-1$, $x^2=-5$, $x^2+x+1=0$ জাতীয় সমীকরণের কোন বাস্তব বীজ পাওয়া সম্ভব নয়। এই জাতীয় সমীকরণ-সমূহের সমাধানের জন্য যে নূতন সংখ্যার প্রবর্তন হইয়াছে তাহাদের জটিল সংখ্যা (Complex number) বলা হয়। এই জটিল সংখ্যার প্রবর্তনের ফলে সংখ্যা সমষ্টির পরিধি বৃদ্ধি পাইয়াছে। যে সমস্ত প্রশ্ন ইহার পূর্বে সমাধান সম্ভব ছিল না তাহাদের প্রায়শঃ সমাধান সম্ভব হইয়াছে; তাহা ছাড়া, অত্যন্ত-জটিল প্রশ্নও অতি সহজেই সমাধান সম্ভব হইয়াছে। পরবর্ত্তী আলোচনায় এই জটিল সংখ্যার সংজ্ঞা, তাহাদের ধর্ম এবং জ্যামিতিক পরিচিতি আলোচিত হইবে।

3-2. জটিল সংখ্যা বিষয়ক কতিপয় সংজ্ঞা।

(1) জটিল সংখ্যা :

a এবং b যে কোন বাস্তব রাশিযুগল (a, b)—এই ক্রমপর্যায়ানুসারে প্রকাশিত করিলে ইহাকে জটিল সংখ্যা বলা হয়। অনুরূপভাবে, a এবং b-কে (b, a)—এই ক্রমপর্য্যায়নুসারে প্রকাশিত করিলে ইহাকেও জটিল সংখ্যা বলা হয়। সাধারণভাবে, $(a, b)\neq(b, a)$; কেবলমাত্র $a=b$ হইলে $(a, b)=(b, a)$ হইবে। যেমন,

$(3, 4)\neq(4, 3)$; $(-3, 2)\neq(2, -3)$; $(\frac{3}{4}, 5)\neq(5, \frac{3}{4})$.

দুইটি জটিল সংখ্যা (a, b) এবং (c, d) সমান হইবে কেবলমাত্র যদি $a=c$ এবং $b=d$ হয়; এবং তখন $(a, b)=(c, d)$ লেখা যাইবে। (a, b) জটিল সংখ্যাকে z বলিলে $z=(a, b)$-কে বুঝাইবে।

দ্রষ্টব্য : (i) $(x, y)=(0, 0)$ হইলে, $x=0$ এবং $y=0$;

(ii) $(x, y)=(0, 1)$ হইলে, $x=0$, এবং $y=1$;

(iii) $(x, y)=(3, \frac{1}{2})$ হইলে, $x=3$, এবং $y=\frac{1}{2}$.

(2) জটিল সংখ্যার যোগ :

$z_1=(a, b)$ এবং $z_2=(c, d)$ দুইটি জটিল সংখ্যার যোগফলকে z_1+z_2 লেখা হয় এবং ইহাকে $z_1+z_2=(a, b)+(c, d)=(a+c, b+d)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। যেমন,

$(3, 5)+(2, 3)=(3+2, 5+3)=(5, 8)$;

$$(3, 4)+(-3, 2)=(3-3, 4+2)=(0, 6);$$
$$(2, 3)+(-2, -3)=(2-2, 3-3)=(0, 0).$$

(3) জটিল সংখ্যার বিয়োগ :

$z_1=(a, b)$ এবং $z_2=(c, d)$ দুইটি জটিল সংখ্যা দেওয়া থাকিলে অপরটি একটি জটিল সংখ্যা $z=(x, y)$ যদি থাকে যাহাতে $z_1+z=z_2$ হয় তাহা হইলে $z=z_2-z_1$ বুঝাইবে।

যেহেতু, $z_1+z=z_2$

$\therefore \quad (a, b)+(x, y)=(c, d)$

অর্থাৎ, $(a+x, b+y)=(c, d)$

$\therefore \quad a+x=c; \quad b+y=d; \qquad \therefore \quad x=c-a; \; y=d-b.$

$\therefore \quad z=(x, y)=(c-a, d-b).$

$\qquad =(c, d)+(-a, -b).$

কিন্তু, $z=z_2-z_1=z_2+(-z_1).$

সুতরাং, $-z_1=(-a, -b).$

অর্থাৎ $-(a, b)=(-a, -b).$

দ্রষ্টব্য : $(5, 4)-(7, 2)=(5-7, 4-2)=(-2, 2).$

$(5, -2)-(3, -3)=(5-3, -2+3)=(2, 1).$

$(6, 4)-(3, -2)=(6, 4)+(-3, 2)=(6-3, 4+2)=(3, 6).$

(4) জটিল সংখ্যার গুণন :

$z_1=(a, b)$ এবং $z_2=(c, d)$ যে কোন দুইটি জটিল সংখ্যা হইলে, উহাদের গুণফলকে z_1z_2 লেখা হয় এবং ইহাকে

$z_1z_2=(a, b)(c, d)=(ac-bd, ad+bc)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

zz-কে সংক্ষেপে z^2 লেখা হইবে ; তেমনি, zzz-কে z^3 লেখা হইবে ; ইত্যাদি।

$z_1=(3, 4), z_2=(2, 3)$ এবং $z=(3, 5)$ হইলে,

$z_1z_2=(3, 4)(2, 3)=(6-12, 9+8)=(-6, 17);$

$z^2=zz=(3, 5)(3, 5)=(9-25, 15+15)=(-16, 30).$

(5) জটিল সংখ্যার ভাগ :

যদি $z_1=(a, b)$ এবং $z_2=(c, d)$ হয় যেখানে a এবং b-এর উভয়ে শূন্য নয় ; তাহা হইলে, $\dfrac{1}{z_1}$ এবং $\dfrac{z_2}{z_1}$ দ্বারা যথাক্রমে

$\dfrac{1}{z_1}=z_1^{-1}=\left(\dfrac{a}{a^2+b^2}, \dfrac{-b}{a^2+b^2}\right), \; (a^2+b^2\neq 0)$ এবং $\dfrac{z_2}{z_1}=z_2 z_1^{-1}$-কে বুঝাইবে।

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ

(1) $(a, b)+(0, 0)=(a, b)$

(2) $(a, b)+(-a, -b)=(0, 0)$

(3) $(a, b)(0, 0)=(0, 0)$

(4) $(a, b)(1, 0)=(a, b)$.

3-3. $(x, 0)$ এবং x অভিন্ন।

পূর্ব্বের আলোচনা হইতে আমরা পাই,

(i) $(a, 0)+(c, 0)=(a+c, 0)$,

(ii) $(a, 0)-(c, 0)=(a-c, 0)$,

(iii) $(a, 0)(c, 0)=(ac, 0)$,

(iv) $(a, 0)/(c, 0)=(a/c, 0)$, $(c \neq 0)$.

উপরোক্ত চারিটি সম্বন্ধ হইতে ইহাই স্পষ্ট যে, পাটীগণিতের যোগ, বিয়োগ, গুণন ও ভাগ প্রক্রিয়া (Operation) যে কোন দুইটিই বাস্তব রাশি a ও c-এর উপর প্রয়োগ করিয়া যেমন যথাক্রমে $a+c, a-c, ac, a/c, (c \neq 0)$ বাস্তব রাশিগুলি পাই, সেইরূপ, $(x, 0)$ জাতীয় সমুদয় জটিল রাশি হইতে পাটীগণিতে ঐ চারিটি প্রক্রিয়ার সাহায্যে ঐ জাতীয় জটিল রাশি কেবলমাত্র পাই। সেইজন্য বাস্তব রাশিসমূহকে সমুদয় জটিল রাশির একটি বিশেষ অংশ এবং $(x, 0)$ জাতীয় ধরা হয়।

$(x, 0)$ জাতীয় জটিল রাশি এবং বাস্তব রাশি x অভিন্ন তাহাতে আমরা একমত অর্থাৎ $(x, 0)$ এবং x একই। সুতরাং, $(x, 0)=x$;

বিশেষভাবে, $(0, 0)=0$; $(1, 0)=1$.

অতএব, $(x, 0)$ এর একক $(1, 0)$ অর্থাৎ 1.

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ

(i) $(a, b)+(-a, -b)=(0, 0)=0$; $\therefore \quad -(a, b)=(-a, -b)$.

(ii) $k(a, b)=(k, 0)(a, b)=(ka, kb)$.

3-4. $(a, b)=a+ib$, যেখানে, $i=(0, 1)$.

$(0, y)$ জাতীয় রাশিগুলি সমুদয় জটিল রাশির অপর একটি অংশ এবং ইহাদিগকে **কাল্পনিক রাশি** (Imaginary quantity) বলা হয়। $(0, 1)$ কাল্পনিক রাশিটিকে $(0, y)$ সমুদয় কাল্পনিক রাশির একক হিসাবে ধরা হয় এবং ইহাকে i দ্বারা সূচিত করা হয়। তাহা হইলে, $(0, 1)=i$.

সুতরাং, $i^2=ii=(0, 1)(0, 1)=(-1, 0)=-1$.

অনুরূপভাবে, $i^3=-i$; $i^4=+1$.

পরবর্তী আলোচনায়, $i=\sqrt{-1}$-কে বুঝাইবে যদি অন্যরূপ কিছু বলা না থাকে।

এখন যেহেতু, $a=(a, 0)$ এবং $ib=(0, 1)(b, 0)=(0, b)$

$\therefore \quad (a, b)=(a, 0)+(0, b)=a+ib.$

মন্তব্য : a যে কোন ধনাত্মক বাস্তব রাশি হইলে $\sqrt{-a}$ দ্বারা কেবলমাত্র $\sqrt{-1}\times\sqrt{a}$ কে বুঝাইবে, অর্থাৎ, $\sqrt{-a}=\sqrt{-1}\times\sqrt{a}=i\sqrt{a}.$

সুতরাং, $(\sqrt{-a})^2=i^2(\sqrt{a})^2=-a.$

তাহা হইলে, $\sqrt{-9}=\sqrt{-1}\times\sqrt{9}=\sqrt{-1}\times 3=3i$;

$$\sqrt{-75}=\sqrt{-1}\times\sqrt{75}=\sqrt{-1}\times 5\sqrt{3}=i5\sqrt{3}.$$

$$\sqrt{-b^2}=\sqrt{-1}\times\sqrt{b^2}=ib.$$

বিশেষ দ্রষ্টব্য :

(i) $(a, b)+(c, d)=(a+c, b+d)$

$\therefore \quad (a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d).$

(ii) $(a, b)-(c, d)=(a-c, b-d)$

$\therefore \quad (a+ib)-(c+id)=(a-c)+i(b-d).$

(iii) $(a, b)(c, d)=(ac-bd, ad+bc)$

$\therefore \quad (a+ib)(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc).$

(iv) $k(a, b)=(ka, kb)$

$\therefore \quad k(a+ib)=(ka)+i(kb).$

(v) $\dfrac{1}{(a, b)}=\left(\dfrac{a}{a^2+b^2}, \dfrac{-b}{a^2+b^2}\right)$

$$\therefore \quad \frac{1}{a+ib}=\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{i(-b)}{a^2+b^2}$$

$$=\frac{1}{a^2+b^2}(a-ib), \ (a^2+b^2)\neq 0$$

দ্রষ্টব্য :

(i) z_1 এবং z_2 যে কোন দুইটি জটিল রাশি হইলে,

$$(-z_1)z_2=-(z_1z_2)=z_1(-z_2).$$

3-5. প্রতিযোগী জটিল রাশি।

a এবং b দুইটি বাস্তব রাশি এবং $i=\sqrt{-1}$ হইলে $a+ib$ এবং $a-ib$ এই দুইটি জটিল রাশির একটিকে অপরটির প্রতিযোগী (Conjugate) বলা হয়। যেমন, $3+4i$-এর প্রতিযোগী রাশি $3-4i$; $-2-3i$-এর প্রতিযোগী রাশি $-2+3i$; $5i$-এর প্রতিযোগী রাশি $-5i$ এবং $-3i$-এর প্রতিযোগী রাশি $3i$.

জটিল রাশি z-এর প্রতিযোগী রাশিকে $\bar{z}$ দ্বারা লেখা হয়। সুতরাং, $z = a + bi$ হইলে, $\bar{z} = a - ib$; তাহা হইলে $z + \bar{z} = 2a$ = একটি বাস্তব রাশি এবং $z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2$ = একটি বাস্তব রাশি।

দ্রষ্টব্য ঃ (*i*) $\bar{\bar{z}} = z$; (*ii*) $\bar{\bar{z}}\,\bar{z} = \bar{z}\,\bar{\bar{z}} = z\,\bar{z}$ = বাস্তব রাশি।

3-6. কতিপয় নিয়মাবলী।

বিনিময় নিয়ম (Commutative Law), সংযোগ নিয়ম (Associative Law) এবং বিচ্ছেদ নিয়ম (Distributive Law) যেমন বাস্তব সংখ্যার ক্ষেত্রে প্রযোজ্য, সেইরূপ এই তিনটি নিয়ম জটিল রাশির ক্ষেত্রেও প্রযোজ্য।

z_1, z_2 এবং z_3 যে কোন তিনটি জটিল রাশি হইলে, ইহাদের ক্ষেত্রে এই তিনটি নিয়ম প্রযোজ্য হইবে অর্থাৎ

(1) বিনিময় নিয়ম ঃ

(*i*) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$; (*ii*) $z_1 z_2 = z_2 z_1$

(2) সংযোগ নিয়ম ঃ

(*i*) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$; (*ii*) $(z_1 z_2)z_3 = z_1(z_2 z_3)$

(3) বিচ্ছেদ নিয়ম ঃ

(*i*) $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.

প্রমাণ ঃ

ধরি, $z_1 = a + ib$; $z_2 = c + id$; $z_3 = e + if$.

1. (*i*) $z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d)$
$= (c + a) + i(d + b) = z_2 + z_1$.

(*ii*) $z_1 z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc)$
$= (ca - db) + i(cb + da) = z_2 z_1$.

2. (*i*) $(z_1 + z_2) + z_3 = \{(a + c) + i(b + d)\} + (e + if)$
$= (a + c + e) + i(b + d + f)$
$= (a + ib) + \{(c + e) + i(d + f)\}$
$= z_1 + (z_2 + z_3)$.

(*ii*) $(z_1 z_2)z_3 = \{(ac - bd) + i(ad + bc)\}(e + if)$
$= (ace - bde - adf - bcf) + i(acf - bdf + ade + bce)$
$= (a + ib)\{(ce - df) + i(cf + de)\} = z_1(z_2 z_3)$.

3. (*i*) $z_1(z_2 + z_3) = (a + ib)\{(c + e) + i(d + f)\}$
$= (ac + ae - bd - bf) + i(ad + af + bc + be)$
$= \{(ac - bd) + i(ad + bc)\} + \{(ae - bf) + i(af + be)\}$
$= z_1 z_2 + z_1 z_3$.

3-7. জটিল সংখ্যার ক্রম।

z_1 এবং z_2 যে কোন দুইটি বিভিন্ন জটিল সংখ্যা হইলে তাহাদের ক্রম সম্বন্ধ $z_1 = z_2$ অথবা $z_1 > z_2$ অথবা $z_1 < z_2$ থাকিতে পারে না। যদি ইহা সম্ভব হয়, তাহা হইলে $z_1 = (0, 1) = i$ এবং $z_2 = (0, 0) = 0$ এর জন্যও সত্য হইবে। কিন্তু $(0, 1) \neq (0, 0)$ অর্থাৎ $i \neq 0$. তাহা হইলে $z_1 \neq z_2$; সুতরাং, হয় $z_1 > z_2$ অথবা $z_1 < z_2$ অর্থাৎ $i > 0$ অথবা $i < 0$.

মনে করি, $i > 0$; $\therefore\ i^2 > 0$

অর্থাৎ $-1 > 0$; কিন্তু ইহা অসম্ভব।

আবার, মনে করি, $i < 0$; তাহা হইলে, $i^2 < 0$; $i^4 < 0$

কিন্তু $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$;

$\therefore$ $i^4 < 0$ হইতে পাই $1 < 0$; কিন্তু, ইহা অসম্ভব।

সুতরাং, আমরা বলিতে পারি জটিল সংখ্যার ক্ষেত্রে ক্রম সম্বন্ধ থাকিতে পারে না।

উদাহরণ 1. সরল কর :—

(i) $3\sqrt{-4} + \sqrt{-9}$; (ii) $\sqrt{-50} - \sqrt{-18}$

(i) প্রদত্ত রাশি $= 3i\sqrt{4} + i\sqrt{9}$

$= 3i \times 2 + i \times 3 = 6i + 3i$

$= 9i$; $i = \sqrt{-1}$.

(ii) প্রদত্ত রাশি $= i\sqrt{50} - i\sqrt{18}$

$= i \times 5\sqrt{2} - i \times 3\sqrt{2}$

$= (5\sqrt{2} - 3\sqrt{2})i = 2\sqrt{2}i$; $i = \sqrt{-1}$.

উদাহরণ 2. মান নির্ণয় কর :—

(1) i^5, (2) $i^4 + \frac{1}{i^4}$,

(3) $i^5 + \frac{1}{i^{-6}}$, (4) $\sqrt{-3} \times \sqrt{-12} + \sqrt{25}$.

(1) $i^2 = -1$; $\therefore\ i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$.

$\therefore\ i^5 = i^4 \times i = i$.

(2) $i^2 = -1$; $\therefore\ i^4 = (-1)^2 = 1$;

প্রদত্ত রাশি $= 1 + \frac{1}{1} = 1 + 1 = 2$.

(3) $i^2 = -1$; $\therefore\ i^4 = (-1)^2 = 1$.

$\therefore\ i^5 = i^4 \times i = i$; $i^6 = i^4 \times i^2 = 1 \times (-1) = -1$.

প্রদত্ত রাশি $= i^5 + i^6 = i - 1$.

(4) প্রদত্ত রাশি $=(\sqrt{-1}\times\sqrt{3})\times(\sqrt{-1}\times\sqrt{12})+\sqrt{25}$

$$=(\sqrt{-1}\times\sqrt{-1})\times(\sqrt{3}\times\sqrt{12})+5$$

$$=(i\times i)\times(\sqrt{36})+5$$

$$=(-1)\times 6+5=-6+5=-1.$$

উদাহরণ 3. কোন্‌টি সঠিক উত্তর বল :

(1) $\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=\sqrt{ab},\ -\sqrt{ab}$; $(a>0, b>0)$.

(2) $\sqrt{-3}+\sqrt{-12}=\sqrt{-15},\ \sqrt{-9},\ 3\sqrt{3}\ \sqrt{-1}$.

(3) $\dfrac{1}{3+2i}=\dfrac{1}{5}(3-2i), \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}i,\ \dfrac{3-2i}{13}$.

(1) $\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=(\sqrt{-1}\times\sqrt{a})\times(\sqrt{-1}\times\sqrt{b})$

$$=(\sqrt{-1}\times\sqrt{-1})\times(\sqrt{a}\times\sqrt{b})$$

$$=(-1)\times\sqrt{ab}=-\sqrt{ab}$$

$\therefore$ সঠিক উত্তর $=-\sqrt{ab}$

(2) $\sqrt{-3}+\sqrt{-12}=\sqrt{-1}\times\sqrt{3}+\sqrt{-1}\times\sqrt{12}$

$$=\sqrt{-1}\times\sqrt{3}+\sqrt{-1}\times(2\sqrt{3})$$

$$=\sqrt{-1}\times[\sqrt{3}+2\sqrt{3}]$$

$$=\sqrt{-1}\times 3\sqrt{3}=3\sqrt{3}\ \sqrt{-1}$$

$\therefore$ সঠিক উত্তর $=3\sqrt{3}.\sqrt{-1}$

(3) $\dfrac{1}{3+2i}=\dfrac{3}{3^2+2^2}+i\dfrac{(-2)}{3^2+2^2}=\dfrac{3}{13}-\dfrac{2i}{13}=\dfrac{3-2i}{13}$

$\therefore$ সঠিক উত্তর $=\dfrac{3-2i}{13}$.

প্রশ্নমালা 8

1. সমাধান কর :

(i) $x^2+1=0$. (ii) $x^2=-4$. (iii) $x^2+2=0$.

(iv) $2x^2+5=0$. (v) $x^4-16=0, (i=\sqrt{-1})$.

2. সঠিক উত্তর লিখ :

(i) $\sqrt{-16}\times\sqrt{-1}=4,\ -4,\ \pm 4$,

(ii) $\sqrt{-4}\times\sqrt{-9}=6,\ \pm 6,\ -6$;

(iii) $\sqrt{-3}\times\sqrt{-2}=\sqrt{6},\ -\sqrt{6},\ \sqrt[4]{6}$;

(iv) $\sqrt{-9}+\sqrt{-4}=\sqrt{-13},\ -\sqrt{13},\ 5\sqrt{-1}$

(v) $\sqrt{-16}-\sqrt{-9}=\sqrt{-7},\ \sqrt{7},\ -\sqrt{-1}$; $\sqrt{-1}$

(vi) $\sqrt{-16}\div\sqrt{-4}=4,\ \sqrt{-4},\ 2.$

3. তারকা চিহ্নিত স্থানে উপযুক্ত পদ বসাও :

(i) $\sqrt{-9}\times\sqrt{-1}=*$ (ii) $2\sqrt{-4}\times\sqrt{-25}=*$

(iii) $-3\sqrt{-5}\times\sqrt{-5}=*$ (iv) $-\sqrt{-16}+2\sqrt{-9}=*$

(v) $5\sqrt{-4}-2\sqrt{-9}=*$ (vi) $-2\sqrt{-3}-\sqrt{-12}=*$

(vii) $2\sqrt{-6}\div\sqrt{-12}=*$ (viii) $(\sqrt{-4})^2+(-\sqrt{4})^2=*$

4. সঠিক উত্তরটির পার্শ্বে টিক্ (✓) চিহ্ন এবং ভুল উত্তরটির পার্শ্বে ক্রশ্ (×) চিহ্ন বসাও :

(i) $(3+4\sqrt{-1})+(2-3\sqrt{-1})=5+\sqrt{-1}$, ( )

(ii) $(3-5i)+(-3i+5)=0$, ( )

(iii) $(5-2i)-(3+2i)=2(1+i)$, ( )

(iv) $2\times(3+2\sqrt{-1})=6+4\sqrt{-1}$, ( )

(v) $(3i-4)\times(-2i)=8i-6$, ( )

(vi) $3\times(5i-3i)=6i$, ( )

5. সরল কর :

(i) $3\sqrt{-4}+5\sqrt{-9}$ (ii) $4\sqrt{-16}-3\sqrt{-9}$

(iii) $3\sqrt{-4}\times4\sqrt{-9}$ (iv) $3\sqrt{-5}\times2\sqrt{-5}$

(v) $6\sqrt{-25}\div5\sqrt{-9}$ (vi) $3\sqrt{-8}\div2\sqrt{-9}$

(vii) $(2\sqrt{-3})^2$ (viii) $(-3\sqrt{-4})^2$ (ix) $(2\sqrt{-4})^4$

(x) $(\sqrt{-27})^2\times(\sqrt{-2})^4$ (xi) $(2\sqrt{-8})^2\times(3\sqrt{-4})^4$.

6. মান নির্ণয় কর, যেখানে $i=\sqrt{-1}$; $n=$পূর্ণসংখ্যা :

(i) i^7 (ii) i^{16} (iii) i^{-12} (iv) i^{-15}

(v) i^{2n+1} (vi) i^{4n+1} (vii) i^{4n-3} (viii) i^{-4n}

(ix) i^5+i^{-5} (x) $2i^4-i^{-6}$

(xi) $2i^4+\dfrac{1}{i^{-6}}$ (xii) $\dfrac{1}{(2i^2+i^4)}+(i^{-4}-2i^2)$.

7. নিম্নলিখিত রাশিগুলির অনুরূপ প্রতিযোগী রাশি লিখ :

(i) $3+4i$ (ii) $5-3i$ (iii) $-7+2i$

(iv) $-2-4i$ (v) $4i$ (vi) $-4i$ (vii) 5.

8. x এবং y বাস্তব রাশি এবং $i=\sqrt{-1}$ হইলে

(i) $x+iy=3+i2$ হইলে, x এবং y-এর মান কত ?

(ii) $x+iy=-3i$ হইলে x এবং y-এর মান কত ?

9. $-i(3-4i)=x-iy$ যেখানে x এবং y বাস্তব রাশি এবং $i=\sqrt{-1}$. x এবং y এর মান কত ?

10. $z=3+2i$ এবং $\frac{1}{z}=x+iy$ যেখানে x এবং y বাস্তব রাশি এবং $i=\sqrt{-1}$. x এবং y এর মান বাহির কর।

11. নিম্নলিখিতগুলি ঠিক আছে কিনা বল :

(i) $(3+4i)(3-4i)=$ একটি বাস্তব রাশি,

(ii) $(2i)(-4i)=$ একটি অবাস্তব সংখ্যা ;

(iii) $5i > 4i$; (iv) $2i < 7i$;

(v) $3+4i > 1-5i$; (vi) $9-40i < 12+9i$.

12. নিম্নলিখিত সম্বন্ধগুলি ঠিক আছে কিনা বল :

(i) $(4+3i) > (0+3i)$, $(i=\sqrt{-1})$;

(ii) $(4+0.i) > (0+3i)$, $(i=\sqrt{-1})$;

(iii) $(3+i.0) < (7+0.i)$, $(i=\sqrt{-1})$.

(iv) $(a+ib) > (c+id)$ যেখানে a, b, c, d বাস্তব রাশি এবং $b=d=0$, $a > c$; $i=\sqrt{-1}$.

(v) $(x_1+iy_1) > (x_2+iy_2)$ যেখানে, x_1, y_1, x_2, y_2 বাস্তব রাশি এবং $x_2=y_2=0$, $x_1 > y_1$ এবং $i=\sqrt{-1}$.

(vi) $z_1=4+5i$ এবং $z_2=3+2i$ যেখানে $i=\sqrt{-1}$; সুতরাং $z_1 > z_2$.

(vii) $z-\bar{z}=$ একটি কাল্পনিক রাশি।

(viii) $z+\bar{z}=0$; সুতরাং z একটি কাল্পনিক রাশি

(ix) $z-\bar{z}=0$; সুতরাং, z একটি বাস্তব রাশি।

3-8. যে কোন দুইটি জটিল রাশির যোগফল, বিয়োগফল, গুণফল এবং ভাগফলকে সর্বদাই $A+iB$ আকারে প্রকাশ করা যাইবে যেখানে A এবং B বাস্তব।

x এবং y দুইটি বাস্তব রাশি এবং $i=\sqrt{-1}$ হইলে $x+iy$ কে জটিল রাশি এবং iy $(y\neq 0)$ কে কাল্পনিক রাশি বলা হয়। $x=y=0$ হইলে, $x+iy=0$ হইবে। $x+iy$ এবং $x-iy$ এর যে কোন একটিকে অপরটির প্রতিযোগী (Conjugate) বলা হয়। $z=x+iy$ হইলে, ইহার প্রতিযোগী $\bar{z}=x-iy$ হইবে।

[1] মনে করি, $a+ib=x+iy$, যেখানে, a, b, x, y বাস্তব রাশি।

তাহা হইলে, $(a-x)+i(b-y)=0.$

$\therefore\ a-x=0$ এবং $b-y=0.$

অর্থাৎ $x=a$ এবং $y=b.$

[2] $$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$$
$$=A+iB$$

যেখানে, $A=a+c$ এবং $B=b+d.$

[3] $$(a+ib)-(c+id)=(a-c)+i(b-d)$$
$$=A+iB$$

যেখানে, $A=a-c$ এবং $B=b-d.$

[4] $$(a+ib)(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc)$$
$$=A+iB$$

যেখানে $A=ac-bd$ এবং $B=ad+bc.$

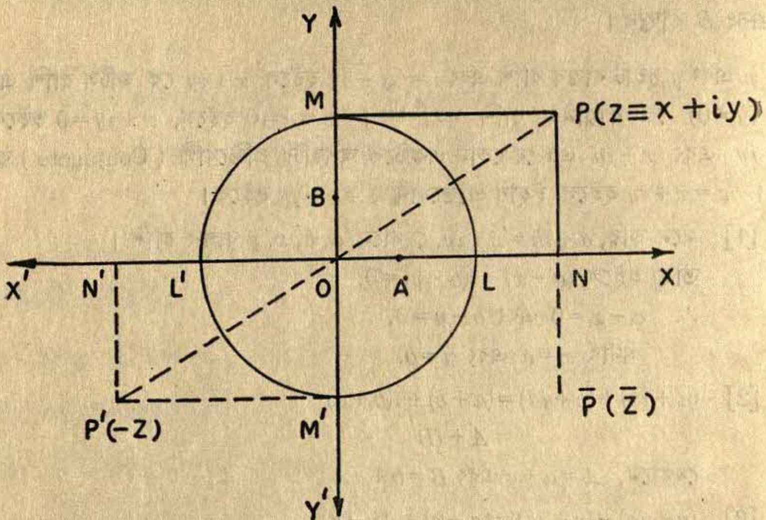
[5] $$\frac{a+ib}{c+id}=\frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}$$
$$=\frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2},\ (c^2+d^2\neq 0)$$
$$=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)+i\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$$
$$=A+iB$$

যেখানে, $A=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}$ এবং $B=\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}.$

[6] $$(a+ib)^2=(a^2-b^2)+i(2ab)\ ;$$
$$(a+ib)^3=(a^3-3ab^2)+i(3a^2b-b^3)\ ;$$
$$(a+ib)^4=(a^4-6a^2b^2+b^4)+i(4a^3b-4ab^3)$$ ইত্যাদি।

সুতরাং, n যে কোন ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হইলে $(a+ib)^n$ কে $A+iB$ আকারে সর্বদাই প্রকাশ করা যাইবে।

3·9. জটিল রাশির জ্যামিতিক প্রকাশ।



একই সমতলে (বা কাগজে) দুইটি সরলরেখা X′OX এবং Y′OY লইলাম যাহারা পরস্পরকে O বিন্দুতে সমকোণে ছেদ করে।

মনে করি, O বিন্দুটি 0 (শূন্য)-কে সূচিত করে। OX এর উপর একটি বিন্দু A লইয়া OA কে দৈর্ঘ্যের একক হিসাবে ধরিলাম; তাহা হইলে A বিন্দু 1কে সূচিত করে। x একটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হইলে OX এর উপর N বিন্দুটি লইলাম যেন ON : OA $=x$ হয়; তাহা হইলে N বিন্দুটি x কে সূচিত করিবে। এইভাবে বিভিন্ন ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যাগুলিকে OX এর উপর অবস্থিত বিভিন্ন বিন্দুগুলি সূচিত করিবে। x যদি ঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যা হয় তবে OX′ উপর N′ বিন্দু লইলাম যেন, ON′ : OA $=-x$ হয়; তাহা হইলে N′ বিন্দুটি ঋণাত্মক সংখ্যা x কে সূচিত করিবে। এইভাবে বিভিন্ন ঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যাগুলিকে OX′ এর উপর অবস্থিত বিভিন্ন বিন্দুগুলি সূচিত করিবে। সুতরাং, X′OX এর অবস্থিত বিভিন্ন বিন্দুগুলি বিভিন্ন বাস্তব সংখ্যাগুলিকে সূচিত করিবে এবং একটি বিন্দু কেবলমাত্র একটি বাস্তব সংখ্যাকে সূচিত করিবে। এইরূপ ক্ষেত্রে X′OX কে **বাস্তব অক্ষ** (Real axis) বলা হয়।

মনে করি, y একটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা এবং OX এর উপর L বিন্দুটি y কে সূচিত করে। Oকে কেন্দ্র করিয়া এবং OL দৈর্ঘ্যের সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন করিলাম যাহা OX, OY, OX′, OY′কে যথাক্রমে L, M, L′, M′ বিন্দুতে ছেদ করে। তাহা হইলে OL = OM = OL′ = OM′ $=y$ এবং L′ বিন্দুটি $-y$ কে সূচিত করে।

সুতরাং, দেখা যাইতেছে ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীতক্রমে কেবলমাত্র দুই সমকোণে আবর্তন করিয়া L বিন্দুটি যখন L′ বিন্দুতে আসে তখন এই L′ বিন্দুটি

$-y$কে সূচিত করে। কিন্তু $-y=i^2y=i.(i.y)$ অর্থাৎ জ্যামিতিক দৃষ্টিকোণ হইতে i কে এমন একটি **কার্য-কারক** (operator) ভাবা যাইতে পারে যে ইহাকে y এর উপর পরপর দুইবার প্রয়োগ করিলে i^2y পাওয়া যায় যাহা L´ বিন্দুটি সূচিত করে। তাহা হইলে i কে y এর উপর একবার মাত্র প্রয়োগ করিয়া পাই iy এবং ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীতক্রমে কেবলমাত্র এক সমকোণে আবর্তন করিয়া L বিন্দুটি M অবস্থানে আসিলে এই M বিন্দুটি iy কে সূচিত করিবে। অনুরূপভাবে, M´ বিন্দুটি i^3y অর্থাৎ $-iy$ কে সূচিত করিবে। সুতরাং, y যে কোন ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হইলে y এর বিভিন্ন মানের জন্য iy সংখ্যাগুলিকে OY এর উপর অবস্থিত বিভিন্ন বিন্দুগুলি এবং $-iy$ সংখ্যাগুলিকে OY´ এর অবস্থিত বিভিন্ন বিন্দুগুলি সূচিত করিবে। এইরূপ ক্ষেত্রে Y´OYকে **কাল্পনিক অক্ষ** (Imaginary axis) বলা হয়।

এখন, ONPM আয়তক্ষেত্রটি অঙ্কন করিলাম। তাহা হইলে, P বিন্দুটি $x+iy$ কে সূচিত করিবে এবং x ও y এর নির্দিষ্ট মানের জন্য P বিন্দুর অবস্থানও নির্দিষ্ট হইবে। এইভাবে x এবং y এর বিভিন্ন মানের জন্য বিভিন্ন বিন্দুর অবস্থান পাওয়া যাইবে এবং $x=y=0$ এর জন্য O বিন্দুটি পাইব; ইহারা সকলে XOY সমতলে থাকিবে। এইরূপ ক্ষেত্রে, XOY সমতলকে **আর্‌গ্যাণ্ড** (Argand) চিত্র বলা হয়।

দ্রষ্টব্য ঃ P বিন্দুটি $z\equiv x+iy$ কে সূচিত করে ; OX এর উপর PN লম্ব ; বর্ধিত PN হইতে $N\bar{P}=PN$ লইলে, $\bar{P}$ বিন্দুটি $\bar{z}$ কে সূচিত করিবে। বর্ধিত PO হইতে OP´ = OP লইলে, P´ বিন্দুটি $-z$ কে সূচিত করিবে।

3-10 জটিল রাশির মডিউলাস্ এবং আরগুমেণ্ট।

[a] জটিল রাশির মডিউলাস্।

মনে করি, $z=a+ib$, যেখানে a এবং b বাস্তব রাশি, $i=\sqrt{-1}$ এবং $a^2+b^2\neq 0$. এইরূপক্ষেত্রে a^2+b^2 এর ধনাত্মক বর্গমূলকে $a+ib$ এর **মডিউলাস্** (Modulus) বলা হয় এবং ইহাকে mod(z) বা mod.z বা $|z|$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। তাহা হইলে,

$|z|$ বা mod $(z)=+\sqrt{a^2+b^2}$. যেমন,

(i) $z=3+i4$ হইলে, $|z|=\sqrt{3^2+4^2}=5$;

(ii) $z=-3+4i$ হইলে, $|z|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$;

(vi) $z=2-5i$ হইলে, $|z|=\sqrt{2^2+(-5)^2}=\sqrt{29}$;

(iv) $z=-\sqrt{2}-5i$ হইলে, $|z|=\sqrt{(-\sqrt{2})^2+(-5)^2}=3\sqrt{3}$.

মন্তব্য ঃ $z=x+iy$ (যেখানে $x=y=0$) হইলে,

mod(z) বা $|z|=0$.

দ্রষ্টব্য ঃ (i) $|z|=|\bar{z}|$; (ii) $|-z|=|z|$.

[b] জটিল রাশির আরগুমেণ্ট।

ধরি, $z=a+ib$, যেখানে a ও b বাস্তব রাশি, $i=\sqrt{-1}$ এবং $a^2+b^2\neq 0$. এইরূপক্ষেত্রে θ এর যে মান যুগপৎ

$$a=|z|\cos\theta \text{ এবং } b=|z|\sin\theta$$

কে সিদ্ধ করিবে তাহাকে z অর্থাৎ $a+ib$ এর **আরগুমেণ্ট** (Argument) বা **অ্যাম্প্লিটিউড্** (Amplitude) বলা হয়। এইরূপ ক্ষেত্রে θ এর অসংখ্য মান পাওয়া যাইবে। সুতরাং $a+ib$ এর আরগুমেণ্ট অসংখ্য হইবে। θ এর যে মান কেবলমাত্র একই সঙ্গে

$$a=|z|\cos\theta,\ b=|z|\sin\theta, \text{ এবং } -\pi<\theta\leq\pi.$$

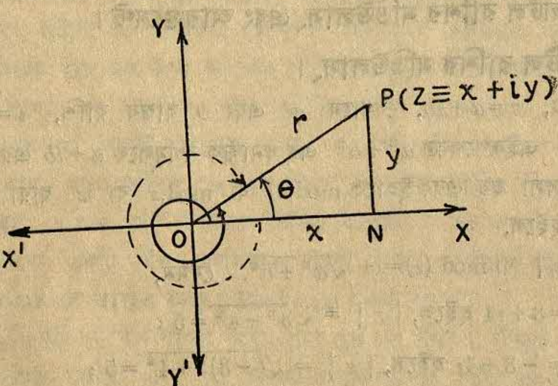
কে সিদ্ধ করিবে তাহাকে $a+ib$ এর আরগুমেণ্টের **প্রধান মান** (Principal value) বলা হয় এবং সংক্ষেপে ইহাকে arg (z), (বা arg. z) বা amp (z), (বা amp. z) রূপে লেখা হয়। অন্য কিছু বলা না থাকিলে যে কোন জটিল রাশির আরগুমেণ্ট বলিতে ইহার প্রধান মানকে বুঝাইবে। সুতরাং,

$$\theta=\arg(z)+2n\pi$$

যেখানে, n এর মান শূন্য অথবা যে কোন পূর্ণ সংখ্যা।

মন্তব্য : $z=x+iy$ জটিল রাশিতে $x=y=0$ হইলে, ইহা মূলবিন্দুটিকে সূচিত করে। $z=0+i0$ এর আরগুমেণ্ট **অনির্ণীত।**

3-11 মডিউলাস্ এবং আরগুমেণ্টের জ্যামিতিক পরিচয়।



[1] $x>0$ ও $y>0$ হইলে এবং $z=x+iy$ কে P বিন্দুটি সূচিত করিলে P বিন্দুটি প্রথম পাদে (first quadrant) অবস্থিত হইবে। OX এর উপর PN লম্ব হইলে, ON $=x$ এবং PN $=y$ হইবে। তাহা হইলে,

$$\text{OP}^2=\text{ON}^2+\text{PN}^2=x^2+y^2 \text{ অর্থাৎ OP}=\sqrt{x^2+y^2}\neq 0.$$

ধরি, OP $=r$ এবং $\angle$XOP $=\theta$.

তাহা হইলে, $x = r\cos\theta$ এবং $y = r\sin\theta$.

$\therefore \quad z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta$.

অর্থাৎ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

যেখানে, $r = |z| =$ OP এবং z এর আরগুমেন্টের যে কোন মান $\theta = \angle$XCP কে বুঝাইবে।

এখানে, $0 <$ (θ এর প্রধান মান) $< \pi/2$.

[2] $x < 0$ এবং $y > 0$ হইলে এবং $z \equiv x + iy$ কে P বিন্দুটি সূচিত করিলে ইহা দ্বিতীয় পাদে থাকিবে। OX এর উপর PN লম্ব হইলে.

$OP^2 = ON^2 + PN^2 = x^2 + y^2$ অর্থাৎ $OP = \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$.

$OP = r$ এবং $\angle XOP = \theta$ হইলে,

$z = x + iy = r\cos\theta + i\,r\sin\theta$

অর্থাৎ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

যেখানে, $r = |z| =$ OP এবং $\theta = \angle$XOP, z এর আরগুমেন্টের যে কোন মানকে বুঝাইবে। এখানে, $\frac{\pi}{2} <$ (θ এর প্রধান মান) $< \pi$

[3] $x < 0$ ও $y < 0$ হইলে এবং $z \equiv x + iy$ কে P বিন্দু সূচিত করিলে ইহার অবস্থান তৃতীয় পাদে হইবে। OX এর উপর PN লম্ব হইলে,

$OP^2 = ON^2 + PN^2 = x^2 + y^2$ অর্থাৎ $OP = \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$.

$OP = r$ এবং $\angle XOP = \theta$ হইলে

$z = x + iy = r\cos\theta + i\,r\sin\theta$

অর্থাৎ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

যেখানে, $r = |z| =$ OP এবং z এর আরগুমেন্টের যে কোন মানকে

$\theta = \angle$XOP বুঝাইবে।

এখানে, $-\pi <$ (θ এর প্রধান মান) $< -\pi/2$.

[4] $x > 0$ ও $y < 0$ হইলে এবং $z \equiv x + iy$ কে P বিন্দু সূচিত করিলে ইহার অবস্থান চতুর্থ পাদে হইবে। OX এর উপর PN লম্ব হইলে,

$OP^2 = ON^2 + PN^2 = x^2 + y^2$ অর্থাৎ $OP = \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$

$QP = r$ এবং $\angle XOP = \theta$ হইলে,

$z = x + iy = r\cos\theta + i\,r\sin\theta$

অর্থাৎ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

যেখানে, $r = |z| =$ OP এবং z এর আরগুমেন্টের যে কোন মানকে

$\theta = \angle$XOP বুঝাইবে।

এখানে, $-\pi/2 <$ (θ এর প্রধান মান) < 0

[5] (i) $a>0$ হইলে,

$$z=a=a+i0=a(\cos 0^\circ+i\sin 0^\circ)$$
$$=a\{\cos(0^\circ+2n\pi)+\sin(0^\circ+2n\pi)\}$$
$$=a(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$\therefore\quad |z|=a$; $\arg(z)=0^\circ$; $\theta=0^\circ+2n\pi$.

(ii) $b>0$ হইলে,

$$z=ib=0+ib=b\left\{\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right\}$$
$$=b\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\right\}$$
$$=b(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$\therefore\quad |z|=b$; $\arg(z)=\frac{\pi}{2}$; $\theta=\frac{\pi}{2}+2n\pi$.

(iii) $a>0$ হইলে,

$$z=-a=-a+i0=a(\cos\pi+i\sin\pi)$$
$$=a\{\cos(\pi+2n\pi)+i\sin(\pi+2n\pi)\}$$
$$=a(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$\therefore\quad |z|=a$; $\arg(z)=\pi$; $\theta=\pi+2n\pi$.

(iv) $b>0$ হইলে,

$$z=-ib=0+i(-b)=b\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$
$$=b\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\right\}$$
$$=b(\cos\theta+i\sin\theta).$$

$\therefore\quad |z|=b$; $\arg(z)=-\frac{\pi}{2}$; $\theta=-\frac{\pi}{2}+2n\pi$.

এখানে প্রত্যেক ক্ষেত্রে n এর মান 0 (শূন্য) অথবা যে কোন পূর্ণসংখ্যা ।

বিশেষ প্রয়োজনীয় সিদ্ধান্ত।

z বাস্তব রাশি অথবা জটিল রাশি যাহাই হউক না কেন ইহাকে $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ আকারে সর্ব্বদাই প্রকাশ করা যাইবে যেখানে, $r=|z|$ এবং $\theta=\arg(z)+2n\pi$, যেখানে $n=0$ অথবা যে কোন পূর্ণসংখ্যা ।

দ্রষ্টব্য ঃ মনে করি, $z=x+iy$, যেখানে x এবং y বাস্তব রাশি এবং $i=\sqrt{-1}$. তাহা হইলে,

(i) $\arg(z)=0$, যদি $x>0$, $y=0$;

(ii) $\arg(z)=\frac{\pi}{2}$, যদি $x=0$, $y>0$;

(iii) $\arg(z)=\pi$, যদি $x<0,\ y=0$;

(iv) $\arg(z)=-\frac{\pi}{2}$, যদি $x=0,\ y<0$;

(v) $\arg(z)=\alpha$, যদি $x>0,\ y>0$; $(\alpha>0)$;

(vi) $\arg(z)=\alpha+\pi$, যদি $x<0,\ y>0$; $(\alpha<0)$;

(vii) $\arg(z)=\alpha-\pi$, যদি $x<0,\ y<0$; $(\alpha>0)$;

(viii) $\arg(z)=\alpha$, যদি $x>0,\ y<0$; $(\alpha<0)$;

যেখানে $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\tan\alpha=\frac{y}{x}$.

3-12. $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$.

মনে করি, $z_1=a+ib,\ z_2=c+id$.

এখন, $z_1+z_2=(a+c)+i(b+d)$.

$\therefore\quad |z_1|=\sqrt{a^2+b^2}$; $|z_2|=\sqrt{c^2+d^2}$; এবং,

$$\begin{aligned}&|z_1+z_2|\\&=\sqrt{\{(a+c)^2+(b+d)^2\}}\\&=\sqrt{\{(a^2+b^2)+(c^2+d^2)+2(ac+bd)\}}\\&=\sqrt{[(\sqrt{a^2+b^2})^2+(\sqrt{c^2+d^2})^2+2(ac+bd)]}\end{aligned}$$

এখন, $ac+bd=\sqrt{(ac+bd)^2}$

$$\begin{aligned}&=\sqrt{\{(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ad-bc)^2\}}\\&\leqslant\sqrt{\{(a^2+b^2)(c^2+d^2)\}}\end{aligned}$$

$\therefore\quad |z_1+z_2|$

$$\begin{aligned}&\leqslant\sqrt{[(\sqrt{a^2+b^2})^2+(\sqrt{c^2+d^2})^2+2\sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{c^2+d^2}]}\\&=\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}=|z_1|+|z_2|\end{aligned}$$

$\therefore\quad |z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$

দ্রষ্টব্য ঃ

(1) $|z_1+z_2+z_3|\leqslant|z_1|+|z_2+z_3|\leqslant|z_1|+|z_2|+|z_3|$.

অনুরূপভাবে,

$|z_1+z_2+z_3+\cdots\cdots|\leqslant|z_1|+|z_2|+|z_3|+\cdots\cdots$

(2) $|z_1-z_2|=|z_1+(-z_2)|\leqslant|z_1|+|-z_2|$

$$=|z_1|+|z_2|$$

$\therefore\quad |z_1-z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$.

(3) $|z_1|=|(z_1-z_2)+z_2|\leqslant|z_1-z_2|+|z_2|$

$\therefore\quad |z_1-z_2|\geqslant|z_1|-|z_2|$.

$$|z_2| = |(z_2 - z_1) + z_1| \leqslant |z_2 - z_1| + |z_1|$$
$$= |z_1 - z_2| + |z_1|$$

$\therefore \quad |z_1 - z_2| \geqslant |z_2| - |z_1|$

$\therefore \quad |z_1 - z_2| \geqslant |z_1| \sim |z_2|$

অর্থাৎ $\quad |z_1 - z_2| \geqslant \big||z_1| - |z_2|\big|$

মন্তব্য ঃ $|z_1| = |z_2|$ হইলেও, $|z_1 - z_2|$ এর মান 0 (শূন্য) হইতে পারে আবার নাও হইতে পারে।

3-13. দুইটি জটিল রাশির গুণফল এবং ভাগফলের মডিউলাস্ এবং আরগুমেণ্ট নির্ণয়।

মনে করি, z_1 এবং z_2 দুইটি জটিল রাশি এবং $|z_1| = r_1$, $|z_2| = r_2$ $\arg(z_1) = \theta_1$ এবং $\arg(z_2) = \theta_2$ যেখানে $-\pi < \theta_1 \leqslant \pi$, $-\pi < \theta_2 \leqslant \pi$.

তাহা হইলে, $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$

$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$.

[a] $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$= r_1 r_2\{(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2)$

$+ i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\}$

$= r_1 r_2\{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\}$

$= R(\cos\odot + i\sin\odot)$, $(R \neq 0)$,

যেখানে, $R = r_1 r_2$, এবং $\odot = \theta_1 + \theta_2$.

$\therefore \quad |z_1 z_2| = R = r_1 r_2 = |z_1|\,|z_2.|$

যেহেতু, $-\pi < \theta_1 \leqslant \pi$ এবং $-\pi < \theta_2 \leqslant \pi$.

$\therefore \quad -2\pi < \theta_1 + \theta_2 \leqslant 2\pi$;

$-\pi < \theta_1 + \theta_2 + 2k\pi \leqslant \pi$

যেখানে $k = 0$ অথবা $k = 1$ অথবা $k = -1$.

$\therefore \quad \arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 + 2k\pi$

অর্থাৎ $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2k\pi$.

এখন, $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

যদি $-\pi < \arg(z_1) + \arg(z_2) \leqslant \pi$ হয় ;

$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2\pi$

যদি $-2\pi < \arg(z_1) + \arg(z_2) \leqslant -\pi$ হয় ;

$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) - 2\pi$

যদি $\pi < \arg(z_1) + \arg(z_2) \leqslant 2\pi$.

দ্রষ্টব্য ঃ $z_1 = a + ib$ এবং $z_2 = c + id$ হইলে,

$$|z_1| = \sqrt{a^2+b^2} \quad \text{এবং} \quad |z_2| = \sqrt{c^2+d^2}.$$

এখন, $z_1 z_2 = (a+ib)(c+id) = (ac-bd) + i(ad+bc)$

$$\therefore \quad |z_1 z_2| = \sqrt{[(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2]}$$
$$= \sqrt{[a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2]}$$
$$= \sqrt{[(a^2+b^2)(c^2+d^2)]}$$
$$= \sqrt{(a^2+b^2)} \times \sqrt{(c^2+d^2)} = |z_1|\,|z_2|.$$

[b] $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} \cdot \dfrac{(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}, \quad (r_2 \neq 0, r_1 \neq 0).$

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}$$
$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2}$$
$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \{\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$$
$$= R(\cos\odot + i\sin\odot)$$

যেখানে, $R = \dfrac{r_1}{r_2}$ এবং $\odot = \theta_1 - \theta_2$.

$$\therefore \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = R = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

যেহেতু, $-\pi < \theta_1 \leq \pi$ এবং $-\pi < \theta_2 \leq \pi$,

$\therefore \quad -\pi < \theta_1 \leq \pi$ এবং $-\pi \leq -\theta_2 < \pi$.

$\therefore \quad -2\pi < \theta_1 - \theta_2 < 2\pi$

$\therefore \quad -\pi < \theta_1 - \theta_2 + 2k\pi \leq \pi,$

যেখানে $k=0$ অথবা $k=1$ অথবা $k=-1$.

$\therefore \quad \arg(z_1/z_2) = \theta_1 - \theta_2 + 2k\pi$

অর্থাৎ $\arg(z_1/z_2) = \arg z_1 - \arg_2 + 2k\pi$,

যেখানে, $k=0$, বা, $k=1$, বা, $k=-1$

দ্রষ্টব্য ঃ $z_1 = a + ib$ এবং $z_2 = c + id$ হইলে,

$$|z_1| = \sqrt{a^2+b^2} \quad \text{এবং} \quad |z_2| = \sqrt{c^2+d^2} \neq 0.$$

এখন, $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a+ib}{c+id} = \dfrac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}$

$$= \frac{(ac+bd) + i(bc-ad)}{c^2+d^2}$$
$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\,\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

$$\therefore \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \sqrt{\left[\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)^2 + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)^2\right]}$$

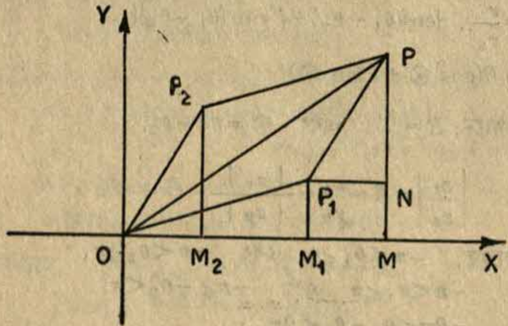
$$= \sqrt{\left[\frac{a^2c^2+b^2d^2+b^2c^2+a^2d^2}{(c^2+d^2)^2}\right]}$$

$$= \sqrt{\left[\frac{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}{(c^2+d^2)^2}\right]}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}} = \frac{\sqrt{(a^2+b^2)}}{\sqrt{(c^2+d^2)}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

3-14 দুইটি জটিল রাশির যোগফল, বিয়োগফল, গুণফল এবং ভাগফলের জ্যামিতিক প্রকাশ।

[1] যোগফলের জ্যামিতিক প্রকাশ ঃ



মনেকরি, P_1 এবং P_2 বিন্দুদ্বয় z_1 এবং z_2 জটিল রাশিদ্বয়কে যথাক্রমে সূচিত করে এবং $z_1 = x_1 + iy_1$ ও $z_2 = x_2 + iy_2$

তাহা হইলে, $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.

এখন, OP_1PP_2 সামান্তরিক অঙ্কন করিলাম। তারপর, OX এর উপর P_1M_1, P_2M_2 ও PM লম্ব এবং OX এর সমান্তরাল P_1N টানিলাম। তাহা হইলে,

$OM_1 = x_1$; $OM_2 = x_2$; $P_1M_1 = y_1$; $P_2M_2 = y_2$

PP_1N এবং P_2OM_2 ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম বলিয়া,

$P_1N = OM_2$ এবং $PN = P_2M_2$

$\therefore \quad OM = OM_1 + M_1M = OM_1 + P_1N = OM_1 + OM_2 = x_1 + x_2$;

$PM = NM + PN = NM + P_2M_2 = P_1M_1 + P_2M_2 = y_1 + y_2$;

সুতরাং P বিন্দুটি $(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ অর্থাৎ $z_1 + z_2$ কে সূচিত করে।

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ

চিত্র হইতে, $|z_1| = OP_1$; $|z_2| = OP_2$; $|z_1 + z_2| = OP$.

যেহেতু, $OP \leq OP_1 + PP_1$

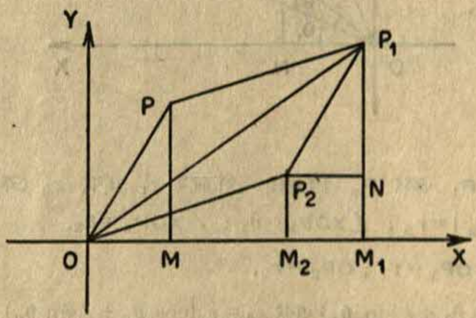
অর্থাৎ $OP \leq OP_1 + OP_2$, $(\because PP_1 = OP_2)$.

$\therefore \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

মন্তব্য ঃ OP_1 এবং OP_2 একই সরলরেখায় থাকিলে

$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ হইবে।

[2] বিয়োগফলের জ্যামিতিক প্রকাশ ঃ



মনে করি, P_1 এবং P_2 বিন্দুদ্বয় যথাক্রমে z_1 এবং z_2 রাশিদ্বয়কে সূচিত করে। OP_2P_1P সামান্তরিক অঙ্কন করিলাম। মনে করি, P বিন্দুটি জটিল রাশি z-কে সূচিত করে। তাহা হইলে, P_1 বিন্দুটি $z_2 + z$ কে সূচিত করিবে। সুতরাং $z_2 + z = z_1$; $\therefore z = z_1 - z_2$; তাহা হইলে, P বিন্দুটি $z_1 - z_2$ কে সূচিত করে।

দ্রষ্টব্য ঃ (i) চিত্র হইতে, $|z_1| = OP_1$; $|z_2| = OP_2$; $|z_1 - z_2| = OP$,

এখন $OP < OP_1 + PP_1$

অর্থাৎ, $OP \leq OP_1 + OP_2$, $(\because PP_1 = OP_2)$

$\therefore \quad |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

(ii) চিত্র হইতে, $OP_1 \leq OP_2 + P_2P_1$

অর্থাৎ, $OP_1 \leq OP_2 + OP$

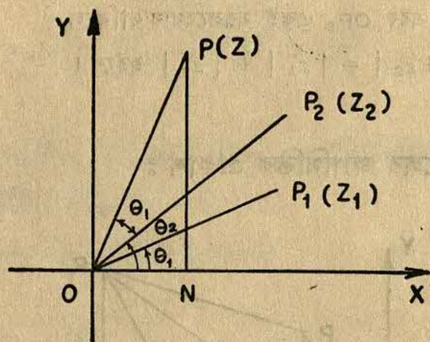
$\therefore \quad |z_1| \leq |z_2| + |z_1 - z_2|$

বা, $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

মন্তব্য : $|z_1 - z_2| = OP = P_2P_1$

সুতরাং, P_1 এবং P_2 যথাক্রমে z_1 এবং z_2 কে সূচিত করিলে, P_1 এবং P_2 এর দূরত্ব $|z_1 - z_2|$ বা $|z_2 - z_1|$ হইবে।

[3] গুণফলের জ্যামিতিক প্রকাশ :



মনে করি, P_1 এবং P_2 বিন্দুদ্বয় যথাক্রমে z_1 এবং z_2 কে সূচিত করে এবং $|z_1| = r_1$; $|z_2| = r_2$; $\angle XOP_1 = \theta_1$; $\angle XOP_2 = \theta_2$.

তাহা হইলে, $OP_1 = r_1$; $OP_2 = r_2$,

$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ এবং $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$\therefore\ z_1z_2 = r_1r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$= r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$

এখন, $\theta_1 + \theta_2$ এর সমান করিয়া,

$\angle XOP$ অঙ্কন করিলাম যেখানে $OP = r_1r_2\ (\neq 0)$.

এখন, OX এর উপর PN লম্ব টানিলাম।

$\therefore\ ON = OP\cos(\widehat{NOP}) = r_1r_2\cos(\theta_1+\theta_2)$,

$PN = OP\sin(\widehat{NOP}) = r_1r_2\sin(\theta_1+\theta_2)$.

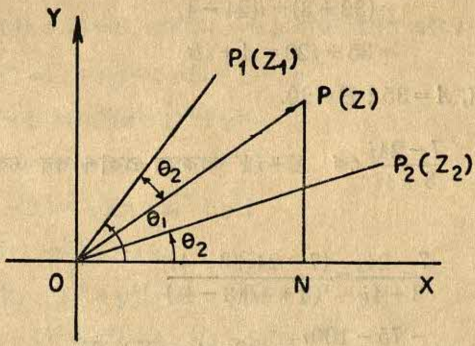
তাহা হইলে, P বিন্দুটি

$r_1r_2\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,r_1r_2\sin(\theta_1+\theta_2)$

বা, $r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$

অর্থাৎ z_1z_2 কে সূচিত করে।

[4] ভাগফলের জ্যামিতিক প্রকাশ ঃ



মনে করি, P_1 এবং P_2 বিন্দুদ্বয় যথাক্রমে z_1 এবং z_2 কে সূচিত করে ; $|z_1|=r_1$, $|z_2|=r_2$; $(r_1\neq 0, r_2\neq 0)$ এবং $\angle XOP_1=\theta_1$; $\angle XOP_2=\theta_2$.

$\therefore\quad z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$ এবং $z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$.

$$\therefore\quad \frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{\cos\theta_1+i\sin\theta_1}{\cos\theta_2+i\sin\theta_2}$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\cdot\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$$

এখন, $\theta_1-\theta_2$ এর সমান করিয়া $\angle XOP$ অঙ্কন করিলাম যেখানে $OP=\frac{r_1}{r_2}$.

OX এর উপর PN লম্ব টানিলাম। তাহা হইলে,

$$ON=OP.\cos(\widehat{NOP})=\frac{r_1}{r_2}\cos(\theta_1-\theta_2)\;;$$

$$NP=OP.\sin(\widehat{NOP})=\frac{r_1}{r_2}\sin(\theta_1-\theta_2)\;;$$

তাহা হইলে, P বিন্দুটি $\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$

অর্থাৎ z_1/z_2 কে সূচিত করে।

উদাহরণ 1. $(2+i)(3-2i)(4+3i)$ কে $A+iB$ আকারে প্রকাশ কর যেখানে A এবং B বাস্তব সংখ্যা এবং $i=\sqrt{-1}$.

$$(2+i)(3-2i)(4+3i)$$
$$=\{(6+2)+i(-4+3)\}(4+3i)$$

$$=(8-i)(4+3i)$$
$$=(32+3)+i(24-4)$$
$$=35+i20=A+iB$$

যেখানে, $A=35$; $B=20$.

উদাহরণ 2 $\dfrac{7-24i}{3+4i}$ কে $X+iY$ আকারে প্রকাশ কর এবং ইহার মডিউলাস্ বাহির কর।

$$\frac{7-24i}{3+4i}=\frac{(7-24i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}$$
$$=\frac{-75-100i}{25}=-3-4i=X+iY$$

যেখানে, $X=-3$ এবং $Y=-4$.

$\therefore$ নির্ণেয় মডিউলাস্ $=\sqrt{\{(-3)^2+(-4)^2\}}$
$$=\sqrt{(9+16)}=\sqrt{25}=5.$$

উদাহরণ 3. মডিউলাস্ নির্ণয় কর :

(*i*) $(4-3i)(\sqrt{3}+3i)$ (*ii*) $\dfrac{(4+i)(5i-3)}{\sqrt{2}-4i}$

(*i*) $z=(4-3i)(\sqrt{3}+3i)$ হইলে,

$$\text{mod }(z)=\text{mod }(4-3i)\times\text{mod }(\sqrt{3}+3i)$$
$$=\sqrt{\{4^2+(-3)^2\}}\times\sqrt{\{(\sqrt{3})^2+3^2\}}$$
$$=\sqrt{25}\times\sqrt{12}=5\times2\sqrt{3}=10\sqrt{3}$$

(*ii*) $z=\dfrac{(4+i)(5i-3)}{\sqrt{2}-4i}$ হইলে,

$$\text{mod }(z)=\frac{\text{mod }(4+i)\times\text{mod }(5i-3)}{\text{mod }(\sqrt{2}-4i)}$$
$$=\frac{\sqrt{17}\times\sqrt{34}}{\sqrt{18}}=\frac{17\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=\frac{17}{3}.$$

উদাহরণ 4. $(a+ib)(c+id)=X+iY$ হইলে দেখাও যে, $(a-ib)(c-id)=X-iY$ যেখানে a, b, c, d, X, Y এর প্রত্যেকে বাস্তব রাশি।

$$(a+ib)(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc)=X+iY.$$

$\therefore$ $ac-bd=X$ এবং $ad+bc=Y$.

এখন, $(a-ib)(c-id)=(ac-bd)-i(ad+bc)=X-iY.$

উদাহরণ 5. $z = x + iy$ এবং $|z-1| = 2|z-2|$ হইলে দেখাও যে, $3(x^2+y^2) - 14x + 15 = 0$, যেখানে x ও y বাস্তব রাশি এবং $i = \sqrt{-1}$.

$$z - 1 = (x+iy) - 1 = (x-1) + iy$$

$$\therefore \ |z-1| = \sqrt{\{(x-1)^2 + y^2\}}$$

$$z - 2 = (x+iy) - 2 = (x-2) + iy$$

$$\therefore \ |z-2| = \sqrt{\{(x-2)^2 + y^2\}}$$

যেহেতু, $|z-1| = 2|z-2|$

$$\therefore \ \sqrt{\{(x-1)^2+y^2\}} = 2 \times \sqrt{\{(x-2)^2+y^2\}}$$

বা, $\{(x-1)^2+y^2\} = 4 \times \{(x-2)^2+y^2\}$

বা, $x^2+y^2-2x+1 = 4x^2+4y^2-16x+16$

$$\therefore \ 3(x^2+y^2) - 14x + 15 = 0.$$

উদাহরণ 6. $z_1 = 4 - 3i$ এবং $z_2 = -5 + 12i$ হইলে দেখাও যে,

$\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ এবং $|z_1+z_2| < |z_1| + |z_2|$.

$$z_1 = 4 - 3i \ ; \ \therefore \ \overline{z_1} = 4 + 3i \ ;$$

$$z_2 = -5 + 12i \ ; \ \therefore \ \overline{z_2} = -5 - 12i.$$

$$z_1 + z_2 = (4-3i) + (-5+12i) = -1 + 9i$$

$$\therefore \ \overline{z_1+z_2} = -1 - 9i$$

আবার, $\overline{z_1} + \overline{z_2} = (4+3i) + (-5-12i) = -1 - 9i$

$$\therefore \ \overline{z_1+z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} = -1 - 9i$$

$$|z_1| = \sqrt{(16+9)} = 5 \ ; \ |z_2| = \sqrt{(25+144)} = 13.$$

$$\therefore \ |z_1| + |z_2| = = 5 + 13 = 18.$$

$$z_1 + z_2 = -1 + 9i \ ; \ \therefore \ |z_1+z_2| = \sqrt{(1+81)} = \sqrt{82}$$

$\sqrt{82} < 18$ বলিয়া

$$|z_1+z_2| < |z_1| + |z_2|.$$

উদাহরণ 7. দেখাও যে, যে তিনটি বিন্দু যথাক্রমে $1+4i$, $2+7i$ এবং $3+10i$ কে সূচিত করে তাহারা একই সরলরেখার উপর অবস্থিত।

$z_1 = 1 + 4i$, $z_2 = 2 + 7i$ এবং $z_3 = 3 + 10i$ হইলে এবং P_1, P_2, P_3 বিন্দুগুলি যথাক্রলে z_1, z_2, z_2 সূচিত করিলে

$$P_1P_2 = |z_2 - z_1| = |1 + 3i| = \sqrt{(1+9)} = \sqrt{10} \ ;$$

$P_2P_3 = |z_3 - z_2| = |1+3i| = \sqrt{(1+9)} = \sqrt{10}$;

$P_1P_3 = |z_3 - z_1| = |2+6i| = \sqrt{(4+36)} = 2\sqrt{10}$.

$\therefore \quad P_1P_2 + P_2P_3 = P_1P_3$ এবং $P_1P_2 = P_2P_3$.

তাহা হইলে, P_1, P_2 এবং P_3 বিন্দুত্রয় এক সরলরেখীয় এবং P_2 বিন্দুটি P_1P_3-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

উদাহরণ 8. (1) $z = \sqrt{3} + i$, (2) $z = 3 - 3i$, (3) $z = -1 - i\sqrt{3}$, (4) $z = -7i$ হইলে প্রতিক্ষেত্রেই mod (z) এবং arg (z) নির্ণয় কর।

(1) $|z| = \sqrt{(3+1)} = \sqrt{4} = 2$;

$\therefore \quad \sqrt{3} = |z| \cos\theta = 2\cos\theta$

এবং $1 = |z| \sin\theta = 2\sin\theta$

অর্থাৎ $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ এবং $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$.

যেহেতু, $-\pi < \arg(z) \leq \pi$ হইবে,

$\therefore \quad \arg(z) = 30° = \dfrac{\pi}{6}$.

(2) $|z| = \sqrt{\{9+9\}} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

$\therefore \quad 3 = |z| \cos\theta = 3\sqrt{2}\cos\theta$

এবং $-3 = |z| \sin\theta = 3\sqrt{2}\sin\theta$

অর্থাৎ $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ এবং $\sin\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

যেহেতু, $-\pi < \arg(z) \leq \pi$

$\therefore \quad \arg(z) = -45° = -\dfrac{\pi}{4}$.

(3) $|z| = \sqrt{\{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2\}} = \sqrt{4} = 2$

$\therefore \quad -1 = |z| \cos\theta = 2\cos\theta$

এবং $-\sqrt{3} = |z| \sin\theta = 2\sin\theta$

অর্থাৎ $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$, $\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\theta = \sqrt{3}$.

যেহেতু, $-\pi < \arg(z) \leq \pi$

$\therefore \quad \arg(z) = 60° - 180° = -120° = -\dfrac{2\pi}{3}$.

(4) $|z| = \sqrt{(0+49)} = 7$; $\arg(z) = -90° = -\dfrac{\pi}{2}$.

উদাহরণ 9. $z_1=3i$ এবং $z_2=-1-i$ হইলে arg (z_1), arg (z_2), arg (z_1z_2) এবং arg (z_1/z_2) নির্ণয় কর।

$$z_1=3i=3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right);\ \therefore\ \arg(z_1)=90^\circ=\frac{\pi}{2}.$$

$|z_2|=\sqrt{2}$; $\therefore$ $-1=\sqrt{2}\cos\theta$ এবং $-1=\sqrt{2}\sin\theta$

অর্থাৎ, $\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\tan\theta=1$

যেহেতু, $-\pi<\arg(z_2)\leq\pi$,

$\therefore$ $\arg(z_2)=45^\circ-180^\circ=-135^\circ=-\frac{3\pi}{4}.$

সুতরাং, $\arg(z_1)+\arg(z_2)=90^\circ-135^\circ=-45^\circ.$

$\therefore$ $\arg(z_1z_2)=-45^\circ=-\frac{\pi}{4}.$

অবশ্য অন্যভাবে, $z_1z_2=3i(-1-i)=3-3i$ হইতে পাই,

$$\arg(z_1z_2)=-45^\circ=-\pi/4.$$

এখন, $\arg(z_1)-\arg(z_2)=90^\circ+135^\circ=225^\circ$

$\therefore$ $\arg(z_1/z_2)=225^\circ-360^\circ=-135^2=-\frac{3\pi}{4}$

অবশ্য অন্যভাবে, $z_1/z_2=\frac{3i}{-1-i}=\frac{-3i}{1+i}$

$$=\frac{-3i(1-i)}{2}=-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i \text{ হইতে পাই}$$

$$\arg(z_1/z_2)=45^\circ-180^\circ=-135^\circ=-\frac{3\pi}{4}.$$

প্রশ্নমালা 9

1. তারকা চিহ্নিত স্থানে উপযুক্ত পদ বসাও :—

(*i*) $|3i|=*$ (*ii*) $|3-2i|=*$ (*iii*) $|-\sqrt{3}-i|=*$

(*iv*) $\text{mod}\{(\sqrt{3}+i)(4-3i)\}=*$ (*v*) $\text{mod}\left(\frac{1+i}{3i-4}\right)=*$

(*vi*) $\arg(-1)=*$ (*vii*) $\arg(\sqrt{3}i)=*$ (*viii*) $\arg(-5i)=*.$

2. সঠিক উত্তরটি চিহ্নিত কর :—

(*i*) $\text{mod}(-4i)=-4,\ 4,\ 2,\ -2$;

(*ii*) $\text{mod}(\sqrt{3}i^3)=-\sqrt{3},\ 3,\ \sqrt{3},\ 3\sqrt{3}$;

(iii) $\arg(-5) = 180^\circ, -180^\circ, 5 \times 90^\circ$;

(iv) $\arg(-3i) = 90^\circ, -90^\circ, 270^\circ$;

(v) $\arg(1-i) = 45^\circ, -45^\circ, 315^\circ$;

(vi) $\arg(-3-3i) = -135^\circ, 135^\circ, 225^\circ$.

3. নিম্নলিখিত রাশিগুলিকে $A+iB$ আকারে প্রকাশ কর যেখানে A এবং B বাস্তব রাশি এবং $i=\sqrt{-1}$:—

(i) $(4+5i)(3i+2)$ (ii) $(2+i)(2-3i)(4-3i)$

(iii) $(3+i)(4+3i)(5+7i)$ (iv) $(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)(2\sqrt{3}-\sqrt{2}i)$

[P. U. 1967] [P. U. 1964]

(v) $\dfrac{1+i}{1-i}$ (vi) $\dfrac{2+3i}{3-2i}$ (vii) $\dfrac{a-ib}{c+id}$

(viii) $\dfrac{a+ib}{b-ia}$ (ix) $\dfrac{(2+3i)(1+2i)}{3-i}$ (x) $\dfrac{(2+i)^2}{3+2i}$

(xi) $\dfrac{3i}{(2-3i)^2}$ (xii) $\dfrac{(2+i)^3}{2+3i}$ (xiii) $\dfrac{(2-3i)^2}{(3-2i)^2}$

(xiv) $\dfrac{(1+i)^4}{(2-i)^2}$ (xv) $\dfrac{(2+i)^5}{(2+11i)^2}$

4. সরল কর :

$$\left(1+i^3\right)\left(1+\frac{1}{i}\right)^2\left(i^4+\frac{1}{i^4}\right), \quad (i=\sqrt{-1})$$ [P. U. 1973]

5. যদি $\dfrac{\sqrt{3}-i\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-i\sqrt{2}} = x+iy$ হয় যেখানে x এবং y বাস্তব এবং $i=\sqrt{-1}$, তবে x এবং y এর মান বাহির কর। [P. U. 1962]

6. $z = x+iy$ হইলে $\dfrac{a+bz}{c+dz}$ কে $X+iY$ আকারে প্রকাশ কর যেখানে a, b, c, d, x, y, X, Y বাস্তব এবং $i=\sqrt{-1}$.

7. a এবং b বাস্তব রাশি এবং $i=\sqrt{-1}$ হইলে,

দেখাও যে, $\dfrac{(a+ib)^2}{a-ib} - \dfrac{(a-ib)^2}{a+ib} = \dfrac{2ib(3a^2-b^2)}{a^2+b^2}$ [P. U. 1972]

8. যদি $x+iy = (a+ib)(c+id)$ হয় যেখানে a, b, c, d, x, y বাস্তব রাশি এবং $i=\sqrt{-1}$, দেখাও যে, $x^2+y^2 = (ac-bd)^2+(ad+bc)^2$. [P. U. 1967]

9. a, b, c, d এর বাস্তব রাশিগুলির মধ্যে কিরূপ সম্বন্ধ থাকিলে $(a+ib)(c+id)$ একটি বাস্তব রাশি হইবে ?

10. $\dfrac{a+ib}{c+id}=X+iY$ হইলে দেখাও যে, $\dfrac{a-ib}{c-id}=X-iY$

এবং $X^2+Y^2=\dfrac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$

11. $a=3+2i$ এবং $b=3-2i$ হইলে,

(i) a^2-ab+b^2 এবং (ii) a^3+b^3 এর মান বাহির কর।

12. $z=x+iy$ এবং $\dfrac{z-i}{z-1}=ib$ হইলে, যেখানে, x, y, b বাস্তব রাশি এবং $i=\sqrt{-1}$, দেখাও যে, $(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}$.

13. দেখাও যে, $|z_1z_2|=|z_1|\,|z_2|$

[**H. S. 1966 ; P. U. 1966, 1968**]

14. দেখাও যে, $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, [**P. U. 1970**]

15. a এবং b দুইটি জটিল রাশি হইলে দেখাও যে,

$$|a+b|^2+|a-b|^2=2\{|a|^2+|b|^2\}$$

16. $z=x+iy$ এবং $|2z+1|=|z+2|$ হইলে দেখাও যে, $x^2+y^2=1$.

17. নিম্নলিখিত রাশিগুলির মডিউলাস্ নির্ণয় কর :

(i) $4-3i$, (ii) $(1-i)(2-i)$ (iii) $(1+2i)^2$

(iv) $\dfrac{3}{4+3i}$ (v) $\dfrac{1}{1+i\sqrt{3}}$, (vi) $\dfrac{(2-3i)(\sqrt{5}+2i)}{3i(3-2i)}$

18. নিম্নলিখিত রাশিগুলির আরগুমেন্ট নির্ণয় কর :

(i) -3, (ii) 7 (iii) $2+2i$

(iv) i [**P. U. 1976**] (v) $-2i$ [**P. U. 1976**]

(vi) $\sqrt{3}-i$ [**P. U. 1974**] (vii) $-\sqrt{3}+i$

(viii) $(4+4i)(\sqrt{3}+i)$ (ix) $(-2+2i)(1-i)$

(x) $\dfrac{1+i}{1-i}$ (xi) $\dfrac{i^3}{1+i}$ (xii) $\dfrac{\sqrt{3}-i}{1-\sqrt{3}i}$

19. দেখাও যে,

(i) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ (ii) $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ (iii) $z\cdot\bar{z}=|z|^2$

20. $z_1=5-4i$ এবং $z_2=-3+2i$ হইলে, দেখাও যে,

(i) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ এবং (ii) $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

21. $z_1=-3+4i$ এবং $z_2=8i-6$ হইলে, দেখাও যে,

$|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$ এবং $\arg(z_1)=\arg(z_2)$.

22. $z_1 = -3+4i$ এবং $z_2 = 12-5i$ হইলে, দেখাও যে,

$|z_1+z_2| < |z_1| + |z_2|$.

23. $z_1 = \sqrt{3}+i$ এবং $z_2 = -1+i\sqrt{3}$ হইলে,

$\arg(z_1), \arg(z_2)$ বাহির কর এবং দেখাও যে,

(i) $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

(ii) $\arg(z_1/z_2) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$.

24. দেখাও যে, (i) $\arg(z) - \arg(-z) = \pi$, যদি $\arg(z) > 0$

(ii) $\arg(z) - \arg(-z) = -\pi$, যদি $\arg(-z) < 0$.

25. $z_1 = -5-5i$ এবং $z_2 = 1-i\sqrt{3}$ হইলে, $\arg(z_1)$ এবং $\arg(z_2)$ বাহির কর এবং দেখাও যে,

(i) $\arg(z_1 z_2) \neq \arg(z_1) + \arg(z_2)$

(ii) $\arg(z_1/z_2) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$

26. $z_1 = -4+4i$ এবং $z_2 = 1-i\sqrt{3}$ হইলে দেখাও যে,

(i) $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

(ii) $\arg(z_1/z_2) \neq \arg(z_1) - \arg(z_2)$

27. দেখাও যে, $5+2i$, $3+4i$ এবং $8-i$ যে তিনটি বিন্দুকে সূচিত করে তাহারা একই সরলরেখার উপর অবস্থিত।

28. দেখাও যে, যে চারিটি বিন্দু আরগ্যাণ্ড চিত্রে $\pm 4 \pm 3i$ কে সূচিত করে তাহারা একটি আয়তক্ষেত্রের কৌণিক বিন্দু। ঐ আয়তক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

3-15 একটি জটিল রাশির যে কোন মূলই জটিল রাশি।

মনে করি, $a+ib$ একটি জটিল রাশি। যদি সম্ভব হয় মনে করি, $\sqrt[n]{(a+ib)} = x$ যেখানে n, x, a, b বাস্তব রাশি ; $i = \sqrt{-1}$.

$\therefore\ a+ib = x^n =$ বাস্তব রাশি ; যাহা অসম্ভব

সুতরাং, জটিল রাশির যে কোন মূলই জটিল রাশি হইবে।

3-16 $a+ib$ এর বর্গমূল।

মনেকরি, $\sqrt{a+ib} = x+iy$ ... (1)

যেখানে a, b, x এবং y বাস্তব রাশি।

(1) এর উভয় পক্ষকে বর্গ করিয়া পাই,

$a+ib = (x^2-y^2)+(2xy)i$ ... (2)

(2) এর উভয় পক্ষের বাস্তব এবং অবাস্তব রাশির সমতা হইতে পাই,

$$x^2 - y^2 = a \qquad \cdots \qquad (3)$$

$$2xy = b \qquad \cdots \qquad (4)$$

এখন, $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2$

$$= a^2 + b^2$$

$$\therefore \quad x^2 + y^2 = \sqrt{(a^2 + b^2)} \qquad \cdots \qquad (5)$$

(3) এবং (5) হইতে পাই,

$$2x^2 = a + \sqrt{(a^2 + b^2)}$$

বা, $x = \pm\left\{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}\right\}^{\frac{1}{2}}$

এবং $y = \pm\left\{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}\right\}^{\frac{1}{2}}$ $\qquad \cdots \qquad (6)$

(4) হইতে লক্ষ্য করার বিষয়, $b > 0$ হইলে, x এবং y উভয়ে ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হইবে ; অন্যথায় তাহারা বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে।

সুতরাং $a + ib$ এর বর্গমূল

$$\pm\left[\left\{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}\right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}\right\}^{\frac{1}{2}} i\right] \quad \text{যদি } b>0$$

অথবা, $$\pm\left[\left\{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}\right\}^{\frac{1}{2}} - \left\{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}\right\}^{\frac{1}{2}} i\right] \quad \text{যদি } b<0$$

মন্তব্য ঃ অনেক সময় পর্যবেক্ষণ দ্বারা অতি সহজেই বর্গমূল নির্ণয় করা যাইতে পারে। যেমন, $7 + 24i = 7 + 2.4(3i)$

$$= 4^2 + (3i)^2 + 2.4(3i) = (4 + 3i)^2$$

$\therefore$ $7 + 24i$ এর বর্গমূল $= \pm(4 + 3i)$.

3-17. 1 এর ঘনমূল (cube root of unity).

মনেকরি, $\sqrt[3]{1} = x$; $\quad \therefore \; x^3 = 1$

বা, $x^3 - 1 = 0$, বা $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$.

এখন, $x - 1 = 0$ হইলে, $x = 1$;

আবার, $x^2 + x + 1 = 0$ হইতে পাই,

$$(x + \tfrac{1}{2})^2 = -\tfrac{3}{4}$$

$$\therefore \quad x+\frac{1}{2}=\pm\sqrt{\frac{-3}{4}}$$

$$=\pm\sqrt{\{(-1)\times\tfrac{3}{4}\}}=\pm[\sqrt{-1}\times\sqrt{\tfrac{3}{4}}]$$

$$=\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \quad x=-\frac{1}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}$$

তাহা হইলে, 1 এর ঘনমূল

$$1, -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{এবং} \quad -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ইহাদের মধ্যে কেবল বাস্তব মূল 1 এবং অপর দুইটি অবাস্তব মূল।

(*a*) এখন, $\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$

$$=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

আবার, $\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$

$$=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad =-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

সুতরাং, 1 এর অবাস্তব ঘনমূলদ্বয়ের যে কোনটি অপরটির বর্গ। তাহা হইলে 1 এর অবাস্তব মূলদ্বয়ের যেকোন একটিকে ω ধরিলে অপরটি ω^2 হইবে।

(*b*) 1 এর অবাস্তব মূলদ্বয়ের গুণফল

$$=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1,$$

তাহা হইলে $\omega\times\omega^2=1$ অর্থাৎ $\omega^3=1$.

(*c*) 1 এর ঘনমূলদ্বয়ের যোগফল

$$=1+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$$

$$\therefore \quad 1+\omega+\omega^2=0$$

দ্রষ্টব্য ঃ (i) $\omega^3=1$; $\omega^4=\omega$; $\omega^5=\omega^2$.

(ii) $1+\omega=-\omega^2$ এবং $1+\omega^2=-\omega$.

উদাহরণ 1. নিম্নলিখিত রাশিগুলির বর্গমূল নির্ণয় কর।

(i) $16+30i$ (ii) $\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$ (iii) $\dfrac{7-24i}{3+4i}$

(i) $16+30i=5^2+(3i)^2+2.5.3i$

$=(5+3i)^2$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(5+3i)$

(ii) ধরি, $\sqrt{[\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})]}=x+iy$

উভয় পক্ষকে বর্গ করিয়া পাই,

$$-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=(x^2-y^2)+i(2xy)$$

$\therefore\ x^2-y^2=-\frac{1}{2}$ এবং $2xy=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

এখন, $(x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)^2+(2xy)^2$

$$=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$$

$\therefore\ x^2+y^2=1$; কিন্তু $x^2-y^2=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ x^2=\frac{1}{4}$ এবং $y^2=\frac{3}{4}$.

$\therefore\ x=\pm\frac{1}{2}$ এবং $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

যেহেতু, $2xy=\frac{\sqrt{3}}{2}>0$

$\therefore\ x=\frac{1}{2}$ এবং $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$

অথবা $x=-\frac{1}{2}$ এবং $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ হইবে।

সুতরাং, নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$

(iii) $\dfrac{7-24i}{3+4i}=\dfrac{(7-24i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\dfrac{-75-100i}{25}=-3-4i.$

ধরি, $\sqrt{(-3-4i)}=x-iy.$

$\because\ -3-4i=x^2-y^2-(2xy)i$

$\therefore\ x^2-y^2=-3$ এবং $xy=2$

এখন, $(x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)^2+4(xy)^2$

$=9+16=25$

$\therefore \quad x^2+y^2=5$; আবার $x^2-y^2=-3.$

$\therefore \quad x^2=1$ এবং $y^2=4.$

$$\therefore \quad x=\pm 1, \; y=\pm 2.$$

সুতরাং, নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(1-2i).$

উদাহরণ 2. দেখাও যে, $i^{\frac{1}{2}}+(-i)^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}}.$

ধরি, $\sqrt{i}=x+iy.$

$\therefore \quad i=(x^2-y^2)+i\,(2xy)$

$\therefore \quad x^2-y^2=0$ অর্থাৎ $x^2=y^2$ এবং $2xy=1.$

বা, $4x^2y^2=1,$ বা, $4x^4=1. \quad \therefore \quad x^2=\frac{1}{2},$

$\therefore \quad x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore \quad y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

যেহেতু, $xy=\frac{1}{2}$, সুতরাং, x এবং y এর মান একই চিহ্নযুক্ত হইবে।

$$\therefore \quad i^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \text{ প্রধান মান।}$$

ধরি, $\sqrt{(-i)}=a-ib$

$\therefore \quad -i=(a^2-b^2)-(2ab)i$

$\therefore \quad a^2-b^2=0,$ বা $a^2=b^2$ এবং $2ab=1$

সুতরাং $a=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ এবং $b=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

$\therefore \quad (-i)^{\frac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i),$ প্রধান মান।

$$\therefore \quad i^{\frac{1}{2}}+(-i)^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)+\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)=2^{\frac{1}{2}}.$$

উদাহরণ 3. 1 এর একটি অবাস্তব ঘনমূল ω হইলে দেখাও যে,

(i) $(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^4)(1+\omega^8)=1$

(ii) $(x+y)^2+(x\omega+y\omega^2)^2+(x\omega^2+y\omega)^2=6xy$ [**H. S. 1962**]

(i) $1+\omega+\omega^2=0$ এবং $\omega^3=1$ বলিয়া, $\omega^4=\omega$; $\omega^8=\omega^2.$

$$\begin{aligned}
\therefore \quad & (1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^4)(1+\omega^8)\\
&=(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega)(1+\omega^2)\\
&=(1+\omega)^2(1+\omega^2)^2\\
&=(1+\omega^2+2\omega)(1+\omega^4+2\omega^2)\\
&=(1+\omega+\omega^2+\omega)(1+\omega+\omega^2+\omega^2)\\
&=\omega\times\omega^2=\omega^3=1.
\end{aligned}$$

(ii) $1+\omega+\omega^2=0$ এবং $\omega^3=1$; $\therefore\ \omega^4=\omega$.

$\therefore\ (x+y)^2+(x\omega+y\omega^2)^2+(x\omega^2+y\omega)^2$

$=x^2(1+\omega^2+\omega^4)+y^2(1+\omega^4+\omega^2)+2xy(1+\omega^3+\omega^3)$

$=x^2(1+\omega^2+\omega)+y^2(1+\omega+\omega^2)+2xy(1+2\omega^3)$

$=x^2\times 0+y^2\times 0+2xy(1+2)=6xy.$

উদাহরণ 4. 1 এর একটি অবাস্তব ঘনমূল ω হইলে দেখাও যে,

(i) $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)$

(ii) $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z)$

[**P. U. 1968, '71**]

(i) $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=a^2+b^2+c^2+(\omega+\omega^2)ab+(\omega+\omega^2)bc+(\omega+\omega^2)ca$

$=a^2+b^2+c^2+(\omega+\omega^2)ab+(\omega^4+\omega^2)bc+(\omega+\omega^2)ca$

$=a(a+b\omega+c\omega^2)+b\omega^2(a+b\omega+c\omega^2)+c\omega(a+b\omega+c\omega^2)$

$=(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega).$

(ii) $x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$=(x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z).$

উদাহরণ 5. 1 এর একটি অবাস্তব ঘনমূলক ω হইলে দেখাও যে,

$(a+b\omega+c\omega^2)^3+(a+b\omega^2+c\omega)^3$

$=(2a-b-c)(2b-c-a)(2c-a-b)$

$a+b\omega+c\omega^2=x$ এবং $a+b\omega^2+c\omega=y$ ধরিলে

$(a+b\omega+c\omega^2)^3+(a+b\omega^2+c\omega)^3$

$=x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

$=(x+y)(x+\omega y)(x+\omega^2 y)$

$=[(a+b\omega+c\omega^2)+(a+b\omega^2+c\omega)]$

$\quad\times[(a+b\omega+c\omega^2)+\omega(a+b\omega^2+c\omega)]$

$\quad\times[(a+b\omega+c\omega^2)+\omega^2(a+b\omega^2+c\omega)]$

$=[2a+(\omega+\omega^2)b+(\omega^2+\omega)c]$

$\quad\times[(1+\omega)a+(\omega+\omega^3)b+(\omega^2+\omega^2)c]$

$\quad\times[(1+\omega^2)a+(\omega+\omega^4)b+(\omega^2+\omega^3)c]$

$=[2a-b-c]\times[-\omega^2 a-\omega^2 b+2\omega^2 c]\times[-\omega a+2\omega b-\omega c]$

$=\omega^2.\omega.(2a-b-c)(2b-c-a)(2c-a-b)$

$=(2a-b-c)(2b-c-a)(2c-a-b).$

প্রশ্নমালা 10

1. $\sqrt{a-ib}=x-iy$ হইলে দেখাও যে, $\sqrt{a+ib}=x+iy$.

2. $\sqrt[3]{x+iy}=a+ib$ হইলে প্রমাণ কর,

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=4(a^2-b^2)$$ [**P. U. 1965, '69**]

3. বর্গমূল নির্ণয় কর :—

(*i*) $16+30i$ (*ii*) $7-24i$ (*iii*) $5-12i$

(*iv*) $-7-24i$ (*v*) $-5+12i$ (*vi*) $8-15i$

(*vii*) $1+i$ (*viii*) $1-i$ (*ix*) i (*x*) $-i$

(*xi*) $2(21i-20$ (*xii*) $6\sqrt{-2}-7$ (*xiii*) $a^2-1-2ia$

(*xiv*) $2a+2\sqrt{a^2+b^2}$ (*xv*) $a-i\sqrt{a^4+a^2+1}$

(*xxi*) $2a+2i\sqrt{1-a^2}$ (*xvii*) $1+i\sqrt{x^4-1}$

(*xviii*) $x+i\sqrt{x^4+x^2+1}$ (*xix*) $1-i\sqrt{x^2+4x+3}$

(*xx*) $a^2+\frac{1}{a^2}+2\left(a+\frac{1}{a}\right)i+1$ (*xxi*) $x+2+i\sqrt{3x^2-8x-3}$

4. মান নির্ণয় কর :—

(*i*) $\sqrt{12-5i}$ (*ii*) $\sqrt{8-6i}$ (*iii*) $\sqrt{1+i\sqrt{3}}$

(*iv*) $\sqrt{1+2\sqrt{2}i}$ (*v*) $\sqrt{-i}$ (*vi*) $\sqrt{(2i)}$

5. দেখাও যে,

(*i*) $\sqrt{1+i}+\sqrt{1-i}=\sqrt{2(\sqrt{2}+1)}$

(*ii*) $\sqrt{21+20i}+\sqrt{21-20i}=10$

(*iii*) $(2+3\sqrt{-5})^{\frac{1}{2}}+(2-3\sqrt{-5})^{\frac{1}{2}}=3\sqrt{2}$

(*iv*) $(5+12i)^{-\frac{1}{2}}+(5-12i)^{-\frac{1}{2}}=\frac{6}{13}$.

6. দেখাও যে, i এর ঘন মূলত্রয়

$$-i,\ \frac{i+\sqrt{3}}{2},\ \frac{i-\sqrt{3}}{2}.$$

7. $-1, 8, -27$ এর ঘনমূল নির্ণয় কর।

8. $1, 16, 24i-7$ এর চতুর্থতম মূল বাহির কর।

9. 1 এর একটি অবাস্তব ঘনমূল ω হইলে ইহার অপর অবাস্তব ঘন মূলটি ω^2 হইবে তাহা দেখাও।

10. 1 এর একটি অবাস্তব ঘনমূল ω হইলে দেখাও যে,
(i) $\omega^3=1$ এবং (ii) $1+\omega+\omega^2=0$ [**H. S. 1960**]

11. $\alpha^2+\alpha+1=0$ হইলে দেখাও যে,
$x^3-1=(x-1)(x-\alpha)(x-\alpha^2)$.

12. $\alpha=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$ এবং $\beta=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$ হইলে দেখাও যে,
$$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=0.$$

13. 1 এর অবাস্তব ঘনমূল α এবং β হইলে প্রমাণ কর,
$\alpha^4+\beta^4+\alpha^{-1}\beta^{-1}=0$ [**Joint Ent. Ex. 1968**]

14. 1 এর একটি অবাস্তব ঘনমূল ω হইলে দেখাও যে,
(i) $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^5)=9$. [**P. U. 1972**]
(ii) $(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8)(1-\omega^{10})=9$. [**H. S. 1964**]
(iii) $(1-2\omega+\omega^2)(1-2\omega^2+\omega)=9$.
(iv) $(1+\omega-\omega^2)^3=(1-\omega+\omega^2)^3=-8$. [**H. S. 19 61**]
(v) $(1-\omega-\omega^2)^3-(1+\omega-\omega^2)^3=16$.
(vi) $(3+3\omega+5\omega^2)^6=(3+5\omega+5\omega^2)^6=64$. [**H. S. 1963, '65**]
(vii) $(x+y\omega+z\omega^2)^2+(x\omega+y\omega^2+z)^2+(x\omega^2+y+z\omega)^2=0$
[**P. U. 1967**]

15. $a+b+c=0$ এবং 1 এর একটি অবাস্তব মূল ω হইলে দেখাও যে,
$(a+b\omega+c\omega^2)^3+(a+b\omega^2+c\omega)^3=27abc$.

16. 1 এর একটি অবাস্তব ঘনমূল ω হইলে দেখাও যে
$(a+b\omega+c\omega^2)^4+(a\omega+b\omega^2+c)^4+(a\omega^2+b+c\omega)^4=0$.

17. 1এর একটি অবাস্তব ঘনমূব ω হইলে দেখাও যে,
(i) $a^2+ab+b^2=(a-\omega b)(a-\omega^2 b)$
(ii) $a^2-ab+b^2=(a\omega+b\omega^2)(a\omega^2+b\omega)$
(iii) $a^3+b^3=(a+b)(a+\omega b)(a+\omega^2 b)$

18. দেখাও যে,
$[\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})]^{21}+[\frac{1}{2}(-1\sqrt{-3})]^{21}=2$.

19. দেখাও যে,
$(2+3\sqrt{-1})^4+(2-3\sqrt{-1})^4=-238$.

20. $(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$ কে দুইটি পূর্ণবর্গের যোগফলরূপে প্রকাশ কর।

21. $(x^3+y^3+z^3-3xyz)=(a^3+b^3+c^3-3abc)(p^3+q^3+r^3-3pqr)$ হইলে, x, y, z এর এক প্রস্থ মান বাহির কর।

চতুর্থ অধ্যায়

দ্বিঘাত সমীকরণ-তত্ত্ব

(Theory of quadratic equations)

4-1. উপস্থাপন।

a এর মান শূন্য না হইলে $ax^2+bx+c=0$ আকারের সমীকরণকে x-এর দ্বিঘাত সমীকরণ বলা হয় এবং এইরূপ ক্ষেত্রে a কে x^2-এর সহগ, b কে x এর সহগ এবং c কে ধ্রুবক পদ বলা হয়। বিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখায় অনেক সময় প্রশ্ন সমাধানের ক্ষেত্রে এই জাতীয় সমীকরণ সমাধানের সম্মুখীন হইতে হয়। x-এর কি কি মান দ্বারা এই সমীকরণ সিদ্ধ হইতে পারে অর্থাৎ এই জাতীয় সমীকরণের কয়টি বীজ থাকিতে পারে এবং সেই বীজগুলি a, b, c এর উপর কিরূপ নির্ভরশীল অথবা তাহাদের মধ্যে কি সম্বন্ধ থাকিতে পারে তাহাই এই অধ্যায়ের আলোচ্য বিষয়।

4-2. একটি দ্বিঘাত সমীকরণের কেবলমাত্র দুইটি বীজ থাকিবে।

[*A quadratic equation has always two and only two roots.*]

সাধারণ আকারের দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+bx+c=0,\ (a\neq 0)$.

এখন, ax^2+bx+c

$$=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right\}$$

$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right\}$$

$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}\times\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}$$

$$=a\left\{x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}\times\left\{x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}$$

সুতরাং, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটি কেবলমাত্র x এর $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ এবং $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ মান দ্বারা সিদ্ধ।'

অতএব, দ্বিঘাত সমীকরণের কেবলমাত্র দুইটি বীজ থাকিবে।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ কোনও দ্বিঘাত সমীকরণের দুইটির অধিক বিভিন্ন বীজ থাকিতে পারে না।

যদি সম্ভব হয়, মনে করি, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির α, β, γ তিনটি বিভিন্ন বীজ আছে।

তাহা হইলে উহাদের প্রত্যেকটি সমীকরণটিকে সিদ্ধ করিবে।

$$\therefore \quad a\alpha^2+b\alpha+c=0 \quad \cdots \quad (1)$$

$$a\beta^2+b\beta+c=0 \quad \cdots \quad (2)$$

$$a\gamma^2+b\gamma+c=0 \quad \cdots \quad (3)$$

(1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া পাই,

$$a(\alpha^2-\beta^2)+b(\alpha-\beta)=0$$

বা, $(\alpha-\beta)\{a(\alpha+\beta)+b\}=0 \quad \cdots \quad (4)$

α এবং β বিভিন্ন বলিয়া $\alpha-\beta \neq 0$

সুতরাং (4) হইতে পাই,

$$a(\alpha+\beta)+b=0 \quad \cdots \quad (5)$$

অনুরূপভাবে, (1) এবং (3) হইতে পাই,

$$a(\alpha+\gamma)+b=0 \quad \cdots \quad (6)$$

(5) হইতে (6) বিয়োগ করিয়া পাই,

$$a(\beta-\gamma)=0 \quad \cdots \quad (7)$$

(7) হইতে, হয় $a=0$ অথবা $\beta-\gamma=0$. $a=0$ হইলে সমীকরণটি দ্বিঘাত থাকিতে পারে না। সুতরাং $a=0$ হইতে পারে না। আবার কল্পনানুসারে, β এবং γ অসমান বলিয়া $\beta-\gamma=0$ হইতে পারে না। সুতরাং $a(\beta-\gamma)=0$ হওয়া অসম্ভব।

তাহা হইলে, $ax^2+bx+c=0$ এর তিনটি বিভিন্ন বীজ α, β, γ থাকিতে পারে না।

সুতরাং যে কোন দ্বিঘাত সমীকরণের দুইটির অধিক বীজ থাকিতে পারে না।

মন্তব্য ঃ যদি x এর বিভিন্ন তিনটি মান α, β, γ দ্বারা $ax^2+bx+c=0$ সিদ্ধ হয়, তাহা হইলে $\beta-\gamma \neq 0$ বলিয়া, (7) হইতে $a=0$; $\therefore$ (5) হইতে $b=0$ এবং (1) হইতে $c=0$. তখন $ax^2+bx+c=0$ দাঁড়ায় $0.x^2+0.x+0=0$, যাহা একটি **অভেদ** (identity), কারণ, তখন x এর দুই-এর অধিক মান দ্বারা ইহা সিদ্ধ। এইরূপ ক্ষেত্রে $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণ নহে।

উদাহরণ ঃ (i) $2x^2-7x+6=0$ কে $(2x-3)(x-2)=0$ অর্থাৎ $2(x-\frac{3}{2})(x-2)=0$ রূপে লেখা যায়। সুতরাং $2x^2-7x+6=0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ, কারণ ইহা কেবলমাত্র x এর মান $\frac{3}{2}$ এবং 2 দ্বারা সিদ্ধ। সুতরাং এই সমীকরণের বীজদ্বয় $\frac{3}{2}$ এবং 2.

(ii) $x^2-6x+9=0$ কে $(x-3)(x-3)=0$ রূপে লেখা যায়। ইহা কেবলমাত্র x-এর তুইটি সমান মান 3 এবং 3 দ্বারা সিদ্ধ। সুতরাং ইহা একটি দ্বিঘাত সমীকরণ এবং ইহার বীজদ্বয় 3 এবং 3. এখানে 3 কে এই সমীকরণের **সমান** বীজ বলা হয়।

(iii) $(x+1)^2+(x-1)^2=2(x^2+1)$ একটি অভেদ, কারণ $x=0, 1, -1$ দ্বারা ইহা সিদ্ধ। কাজেই ইহা তুইটির অধিক মান দ্বারা সিদ্ধ।

4-3. দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় নির্ণয়।

সাধারণ আকারের দ্বিঘাত সমীকরণ,

$$\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}, \ (a\neq 0) \qquad \cdots \quad (1)$$

(1) হইতে পাই,

$$ax^2+bx=-c,$$

বা, $x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$,

বা, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$

$$=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$\therefore \quad x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

বা, $x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \qquad \cdots \quad (2)$$

সুতরাং $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ এবং } \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

মন্তব্য : (1) $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণে যদি $a\neq 0$, $c\neq 0$ কিন্তু $b=0$ হয় তাহা হইলে ইহা দাঁড়ায় $ax^2+c=0$। সুতরাং $x=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$. সুতরাং একটি দ্বিঘাত সমীকরণে x এর সহগ শূন্য হইলে উহার বীজদ্বয় সমান এবং বিপরীতচিহ্ন-বিশিষ্ট হইবে।

(2) $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণে $a\neq 0$, $c=0$ হইলে সমীকরণটি দাঁড়ায় $ax^2+bx=0$ বা, $x(ax+b)=0$; $\therefore$ $x=0$ এবং $x=\frac{-b}{a}$. সুতরাং, $a\neq 0$, $c=0$ হইলে সমীকরণটির একটি বীজ অন্ততঃ 0 (শূন্য) হইবে।

(3) $ax^2=0$ $(a\neq 0)$ সমীকরণটির তুইটি বীজই 0 (শূন্য)।

4-4. দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ ও সহগের সম্বন্ধ।

$ax^2+bx+c=0,\quad (a\neq 0)$ দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$\text{ধরি, } \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\alpha,$$

$$\text{এবং } \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\beta.$$

$$\text{এখন, } \alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a};$$

$$\text{এবং } \alpha\beta=\left\{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}\times\left\{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}$$

$$=\frac{(-b)^2-(b^2-4ac)}{(2a)^2}.$$

$$=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}.$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\alpha+\beta=-\frac{b}{a}} \text{ এবং } \boldsymbol{\alpha\beta=\frac{c}{a}}$$

সুতরাং, $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$ সমীকরণের

বীজদ্বয়ের সমষ্টি $=\boldsymbol{-\dfrac{b}{a}}$

এবং **বীজদ্বয়ের গুণফল** $=\boldsymbol{\dfrac{c}{a}}$.

বিশেষ দ্রষ্টব্য :

$ax^2+bx+c=0$ এর বীজদ্বয় α এবং β হইলে $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$.

কিন্তু $ax^2+bx+c=0$ হইতে পাই

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$\therefore\ x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

সুতরাং, যে দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় α এবং β তাহার সমীকরণ হইবে

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

বা, $(x-\alpha)(x-\beta)=0$

দ্রষ্টব্য : $ax^2+bx+c=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় α এবং β হইলে,

$$a\alpha^2+b\alpha+c=0 \text{ এবং } a\beta^2+b\beta+c=0.$$

4-5. দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয়ের প্রকৃতি।

সাধারণ আকারের দ্বিঘাত সমীকরণ—

$$ax^2+bx+c=0, \quad (a\neq 0) \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

যেখানে, a, b, c বাস্তব রাশি।

এই সমীকরণের বীজদ্বয়

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

(1) যদি $b^2-4ac=0$ অর্থাৎ $b^2=4ac$ হয় তাহা হইলে, (1) এর বীজদ্বয় হইবে $\frac{-b\pm 0}{2a}$ অর্থাৎ $-\frac{b}{2a}$ এবং $-\frac{b}{2a}$ অর্থাৎ বীজদ্বয় সমান হইবে। সুতরাং, a, b, c মূলদ এবং $b^2=4ac$ হইলে বীজদ্বয় সমান এবং মূলদ হইবে; অন্যথায় (যখন $b^2=4ac$, $\frac{b}{a}$ অমূলদ) তাহারা সমান ও অমূলদ হইবে।

(2) যদি $b^2-4ac>0$ হয় তবে বীজদ্বয় বাস্তব এবং অসমান হইবে। এইরূপ ক্ষেত্রে b^2-4ac পূর্ণবর্গ হইলে বীজদ্বয় অসমান মূলদ হইবে যদি $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$ এর প্রত্যেকটি মূলদ হয়। অন্যথায় বীজদ্বয় অসমান এবং অমূলদ হইবে।

(3) যদি $b^2-4ac<0$ হয় তবে বীজদ্বয় অসমান এবং জটিল রাশি হইবে।

মন্তব্য : $ax^2+bx+c=0$ আকারের সমীকরণের a, b, c এর যে কোনটি জটিল রাশি হইতে পারে। যেমন, $x^2+2ix-1=0$ যেখানে x-এর সহগ $2i$, $(i=\sqrt{-1})$. এই সমীকরণের বীজদ্বয় $-i$ এবং $-i$. কিন্তু $ax^2+bx+c=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের মধ্যে যেখানে a, b, c কেবলমাত্র বাস্তব রাশি তাহাই এই পাঠ্যসূচীর বিষয়বস্তু। সুতরাং, অন্য কিছু বলা না থাকিলে $ax^2+bx+c=0$ আকারের সমীকরণে a, b, c বাস্তব রাশি এই পুস্তকে তাহাই বুঝিতে হইবে।

4-6. দ্বিঘাত সমীকরণের প্রতিযোগী বীজ।

[a] মূলদ সহগবিশিষ্ট কোন দ্বিঘাত সমীকরণের একটি বীজ অমূলদ রাশি হইলে অপর বীজটি ইহার প্রতিযোগী অমূলদ রাশি হইবে।

[*In a quadratic equation with rational coefficients, irrational roots occur in a conjugate pair.*]

মনে করি, $ax^2+bx+c=0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ যেখানে a, b, c এর প্রত্যেকেই মূলদ এবং $p+\sqrt{q}$ ইহার একটি বীজ যেখানে p মূলদ রাশি এবং $\sqrt{q}$ অমূলদ রাশি। তাহা হইলে এই বীজটি সমীকরণকে সিদ্ধ করিবে। অর্থাৎ

$$a(p+\sqrt{q})^2+b(p+\sqrt{q})+c=0$$

$$\text{বা, }\quad (ap^2+aq+bp+c)+(2ap+b)\sqrt{q}=0.$$

ইহার উভয় পক্ষের মূলদ অংশের সহিত মূলদ অংশ এবং অমূলদ অংশের সহিত অমূলদ অংশের সমতা হইতে পাই,

$$ap^2+aq+bp+c=0$$

$$\text{এবং }\quad (2ap+b)\sqrt{q}=0$$

$$\therefore\quad (ap^2+aq+bp+c)-(2ap+b)\sqrt{q}=0$$

$$\text{বা, }\quad a(p-\sqrt{q})^2+b(p-\sqrt{q})+c=0.$$

ইহা হইতে বুঝা যাইতেছে যে, $p-\sqrt{q}$ অমূলদ রাশিটি $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের একটি বীজ।

কিন্তু $p+\sqrt{q}$ এবং $p-\sqrt{q}$ এর যে কোন একটি অপরটির প্রতিযোগী। সুতরাং মূলদ সহগবিশিষ্ট কোন দ্বিঘাত সমীকরণের একটি বীজ অমূলদ রাশি হইলে অপর বীজটি ইহার প্রতিযোগী অমূলদ রাশি হইবে।

[b] বাস্তব সহগবিশিষ্ট কোন দ্বিঘাত সমীকরণের একটি বীজ জটিল রাশি হইলে অপর বীজটি ইহার প্রতিযোগী জটিল রাশি হইবে।

[*In a quadratic equation with real coefficients complex roots occur in a conjugate pair.*]

মনে করি, $ax^2+bx+c=0$ দ্বিঘাত সমীকরণে a, b, c এর প্রত্যেকটি বাস্তব রাশি এবং $\alpha+i\beta$ ইহার একটি বীজ যেখানে α এবং β বাস্তব রাশি ও $i=\sqrt{-1}$.

তাহা হইলে এই বীজটি সমীকরণকে সিদ্ধ করিবে, অর্থাৎ

$$a(\alpha+i\beta)^2+b(\alpha+i\beta)+c=0$$

$$\text{বা, }\quad (a\alpha^2-a\beta^2+b\alpha+c)+(2a\alpha\beta+b\beta)i=0.$$

ইহার উভয় পক্ষের বাস্তব রাশির সহিত বাস্তব রাশির এবং কাল্পনিক রাশির সহিত কাল্পনিক রাশির সমতা থেকে পাই,

$$a\alpha^2 - a\beta^2 + b\alpha + c = 0$$

এবং $(2a\alpha\beta + b\beta)i = 0$

$\therefore \quad (a\alpha^2 - a\beta^2 + b\alpha + c) - (2a\alpha\beta + b\beta)i = 0$

বা, $a(\alpha - i\beta)^2 + b(\alpha - i\beta) + c = 0$

ইহা হইতে বুঝা যাইতেছে যে, $\alpha - i\beta$ জটিল রাশিটি $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের একটি বীজ। কিন্তু $\alpha + i\beta$ এবং $\alpha - i\beta$ এর যে কোন একটি অপরের প্রতিযোগী জটিল রাশি। অতএব প্রমাণিতব্য বিষয় প্রমাণিত হইল।

উদাহরণ 1. সমাধান কর :

(i) $2x^2 - 13x + 15 = 0$ (ii) $2x^2 - 3x - 5 = 0$

(iii) $4x^2 - 20x + 25 = 0$ (iv) $4x^2 - 24x + 31 = 0$

(v) $x^2 - 4x + 29 = 0$ (vi) $x(x+1)(x+2)(x+3) = 24$

(vii) $x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0$

(viii) $(1+x)^{\frac{2}{3}} + (1-x)^{\frac{2}{3}} = 3(1-x^2)^{\frac{1}{3}}$.

সমাধান :—

(i) $2x^2 - 13x + 15 = 0$ হইতে পাই

$$x = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \times 2 \times 15}}{2 \times 2}$$

$$= \frac{13 \pm \sqrt{169 - 120}}{4}$$

$$= \frac{13 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{13 \pm 7}{4}$$

সুতরাং, নির্ণেয় বীজদ্বয় : $\frac{13+7}{4}$ এবং $\frac{13-7}{4}$ অর্থাৎ 5 এবং 3/2.

(is) $2x^2 - 3x - 5 = 0$ সমীকরণ হইতে:পাই,

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 2 \times (-5)}}{2 \times 2}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{4} = \frac{3 \pm 7}{4}$$

সুতরাং, নির্ণেয় বীজদ্বয় : $\frac{3+7}{4}$ এবং $\frac{3-7}{4}$ অর্থাৎ 5/2 এবং −1.

(*iii*) $4x^2 - 20x + 25 = 0$ হইতে পাই,

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{(-20)^2 - 4 \times 4 \times 25}}{2 \times 4}$$

$$= \frac{20 \pm \sqrt{400 - 400}}{8}$$

$$= \frac{20 \pm 0}{8} = \frac{5 \pm 0}{2}$$

স্থতরাং, নির্ণেয় বীজদ্বয় : 5/2 এবং 5/2.

(*iv*) $4x^2 - 24x + 31 = 0$ হইতে পাই

$$x = \frac{24 \pm \sqrt{24^2 - 4 \times 4 \times 31}}{2 \times 4}$$

$$= \frac{24 \pm \sqrt{4^2 \times 6^2 - 4^2 \times 31}}{8}$$

$$= \frac{24 \pm 4\sqrt{36 - 31}}{8}$$

$$= \frac{24 \pm 4\sqrt{5}}{8} = 3 \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$

স্থতরাং, নির্ণেয় বীজদ্বয় : $3 + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ এবং $3 - \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

(*v*) $x^2 - 4x + 29 = 0$ সমীকরণ হইতে পাই,

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 29}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-100}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{100} \times \sqrt{-1}}{2} = \frac{4 \pm 10\sqrt{-1}}{2}$$

$$= 2 \pm 5\sqrt{-1} = 2 \pm 5i\,;\ i = \sqrt{-1}.$$

স্থতরাং নির্ণেয় বীজদ্বয় : $2 \pm 5i$.

(*vi*) $x(x+1)(x+2)(x+3) = 24$

বা, $\{x(x+3)\}\{(x+1)(x+2)\} = 24$

বা, $(x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) = 24$

$x^2 + 3x = y$ ধরিলে প্রদত্ত সমীকরণ হইবে

$$y(y+2) - 24 = 0$$

বা, $y^2 + 2y - 24 = 0$

$$\therefore \quad y=\frac{-2\pm\sqrt{4+4\times 24}}{2}$$

$$=\frac{-2\pm 2\times\sqrt{1+24}}{2}$$

$$=\frac{-2\pm 2\times 5}{2}=-1\pm 5$$

$\therefore \quad y=4\ ;\ -6.$

$y=4$ হইলে, $x^2+3x=4$

অর্থাৎ $x^2+3x-4=0$

$$\therefore \quad x=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2}$$

$$=\frac{-3\pm 5}{2}=1,\ -4.$$

কিন্তু $y=-6$ হইলে, $x^2+3x=-6$

অর্থাৎ $x^2+3x+6=0$

$$\therefore \quad x=\frac{-3\pm\sqrt{9-24}}{2}$$

$$=\frac{-3\pm\sqrt{-15}}{2}$$

সুতরাং নির্ণেয় সমাধান : $1,\ -4,\ \frac{1}{2}(-3\pm i\sqrt{15})\ ;\ i=\sqrt{-1}.$

(vii) প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই (x^2 দ্বারা ভাগ করিয়া) :

$$x^2-3x-2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

বা, $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)-2=0$

বা, $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x+\frac{1}{x}\right)-4=0$

$\therefore \quad y^2-3y-4=0\ ;\ \left(y=x+\frac{1}{x}\right)$

তাহা হইলে, $y=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{3\pm 5}{2}$

$\therefore \quad y=4,\ -1.$

$y=4$ হইলে, $x+\frac{1}{x}=4$

অর্থাৎ $x^2-4x+1=0$

$$\therefore \quad x=\frac{4\pm\sqrt{16-4}}{2}$$

$$=\frac{4\pm2\sqrt{3}}{2}=2\pm\sqrt{3}$$

$y=-1$ হইলে, $x+\frac{1}{x}=-1$

অর্থাৎ $x^2+x+1=0$

$$\therefore \quad x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$$

সুতরাং নির্ণেয় বীজগুলি : $2\pm\sqrt{3}$; $\frac{1}{2}(-1\pm i\sqrt{3})$; $i=\sqrt{-1}$

(*viii*) $(1+x)^{\frac{2}{3}}+(1-x)^{\frac{2}{3}}=3(1-x^2)^{\frac{1}{3}}$ হইতে পাই

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{2}{3}}-3\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{3}}+1=0$$

ধরি, $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{3}}=y.$

তাহা হইলে প্রদত্ত সমীকরণ হইতে $y^2-3y+1=0$

$$\therefore \quad y=\frac{3\pm\sqrt{9-4}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

তাহা হইলে, $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

$$\therefore \quad \frac{1+x}{1-x}=\frac{(3\pm\sqrt{5})^3}{8}$$

$$\therefore \quad x=\frac{(3\pm\sqrt{5})^3-8}{(3\pm\sqrt{5})^3+8}=\pm\frac{2}{5}\sqrt{5}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $\pm\frac{2}{5}\sqrt{5}.$

উদাহরণ 2. নিম্নলিখিত বীজদ্বয় যে দ্বিঘাত সমীকরণের তাহা নির্ণয় কর :

(i) $5, -7,$ (ii) $7\pm2\sqrt{3},$ (iii) $-3\pm i5$; $i=\sqrt{-1}.$

(i) এখনে, $\alpha=5,\ \beta=-7$

$\therefore \quad \alpha+\beta=5+(-7)=-2$;

$\alpha\beta=5\times(-7)=-35$

নির্ণেয় সমীকরণ : $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

অর্থাৎ $x^2+2x-35=0.$

(ii) এখানে, $\alpha = 7+2\sqrt{3}$; $\beta = 7-2\sqrt{3}$.

$$\therefore \quad \alpha+\beta = (7+2\sqrt{3})+(7-2\sqrt{3}) = 14\ ;$$

$$\alpha\beta = (7+2\sqrt{3})(7-2\sqrt{3})$$

$$= 7^2-(2\sqrt{3})^2 = 49-12 = 37.$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ : $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

অর্থাৎ $x^2-14x+37=0$

(iii) এখানে, $\alpha = -3+i5$; $\beta = -3-i5$;

$$\therefore \quad \alpha+\beta = (-3+i5)+(-3-i5) = -6\ ;$$

$$\alpha\beta = (-3+i5)\times(-3-i5)$$

$$= (-3)^2-(i5)^2 = 9+25 = 34.$$

স্থতরাং নির্ণেয় সমীকরণ :

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

অর্থাৎ $x^2+6x+34=0.$

উদাহরণ 3. মূলদ সহগবিশিষ্ট যে দ্বিঘাত সমীকরণের একটি বীজ নিম্নোল্লিখিত তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর :

(*i*) $-3+\frac{1}{2}\sqrt{5}$, (*ii*) $\frac{5}{2}-3i$; $i=\sqrt{-1}$, (*iii*) $\dfrac{3}{2+\sqrt{7}}$

(*i*) মূলদ সহগবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের একটি বীজ $-3+\frac{1}{2}\sqrt{5}$ হইলে উহার অপর বীজটি $-3-\frac{1}{2}\sqrt{5}$ হইবে।

স্থতরাং $\alpha = -3+\frac{1}{2}\sqrt{5}$ এবং $\beta = -3-\frac{1}{2}\sqrt{5}$ ধরিলে,

$$\alpha+\beta = (-3+\tfrac{1}{2}\sqrt{5})+(-3-\tfrac{1}{2}\sqrt{5}) = -6\ ;$$

$$\alpha\beta = (-3+\tfrac{1}{2}\sqrt{5})\times(-3-\tfrac{1}{2}\sqrt{5})$$

$$= (-3)^2-(\tfrac{1}{2}\sqrt{5})^2 = 9-\tfrac{5}{4} = 31/4.$$

স্থতরাং নির্ণেয় সমীকরণ :

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

অর্থাৎ $x^2+6x+31/4=0$

বা, $4x^2+24x+31=0.$

(*ii*) মূলদ সহগবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের একটি বীজ $\frac{5}{2}-3i$ হইলে অপর বীজটি $\frac{5}{2}+3i$ হইবে যেখানে $i=\sqrt{-1}$.

যদি $\alpha = \frac{5}{2}-3i$ এবং $\beta = \frac{5}{2}+3i$ ধরি, তাহা হইলে,

$$\alpha+\beta = (\tfrac{5}{2}-3i)+(\tfrac{5}{2}+3i) = 5\ ;$$

$$\alpha\beta = (\tfrac{5}{2}-3i)\times(\tfrac{5}{2}+3i)$$

$$= (\tfrac{5}{2})^2-(3i)^2 = \tfrac{25}{4}+9 = \tfrac{61}{4}.$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ :

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

অর্থাৎ $x^2-5x+61/4=0$

বা, $4x^2-20x+61=0.$

(iii) $\dfrac{3}{2+\sqrt{7}}=\dfrac{3(\sqrt{7}-2)}{7-4}=\sqrt{7}-2=-2+\sqrt{7}.$

মূলদ সহগবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের একটি বীজ $-2+\sqrt{7}$ হইলে অপর বীজটি $-2-\sqrt{7}$ হইবে।

ধরি, $\alpha=-2+\sqrt{7}$ এবং $\beta=-2-\sqrt{7}.$

তাহা হইলে,

$$\alpha+\beta=(-2+\sqrt{7})+(-2-\sqrt{7})=-4\ ;$$

$$\alpha\beta=(-2+\sqrt{7})(-2-\sqrt{7})$$

$$=(-2)^2-(\sqrt{7})^2=4-7=-3.$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ :

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

অর্থাৎ $x^2+4x-3=0.$

উদাহরণ 4. $ax^2+bx+c=0$ এর বীজদ্বয়ের অনুপাত 3 : 4 হইলে দেখাও যে, $12b^2=49ac$ [**Joint Ent. Ex. 1967**]

প্রদত্ত শর্তানুসারে $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় $3k$ এবং $4k$ হইবে।

তাহা হইলে,

বীজদ্বয়ের সমষ্টি $=3k+4k=-b/a$

অর্থাৎ $7k=-b/a\ ;\quad \therefore\ k=\dfrac{-b}{7a}.$

বীজদ্বয়ের গুণফল $=3k\times 4k=c/a$

অর্থাৎ $12k^2=c/a$

$$\therefore\ 12\times\left(\frac{-b}{7a}\right)^2=c/a$$

$$\therefore\ 12b^2=49ac.$$

উদাহরণ 5. $px^2+qx+r=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের একটি বীজ অপর বীজের বর্গ হইলে দেখাও যে $q^3+p^2r+pr^2=3pqr.$ [**H. S. 1970**]

প্রদত্ত শর্তানুসারে $px^2+qx+r=0$ এর বীজদ্বয় α এবং α^2 হইবে, যেখানে

বীজদ্বয়ের সমষ্টি $=\alpha+\alpha^2=-q/p$

এবং বীজদ্বয়ের গুণফল $=\alpha.\alpha^2=r/p$; অর্থাৎ $\alpha^3=r/p$.

এখন, $\alpha+\alpha^2=-q/p$ হইতে পাই

$$(\alpha+\alpha^2)^3=-q^3/p^3$$

বা, $\alpha^3+(\alpha^2)^3+3\alpha.\alpha^2.(\alpha+\alpha^2)=-q^3/p^3$

বা, $\alpha^3+(\alpha^3)^2+3\alpha^3(-q/p)=-q^3/p^3$

বা, $\frac{r}{p}+\frac{r^2}{p^2}+3.\frac{r}{p}.\left(-\frac{q}{p}\right)=-\frac{q^3}{p^3}$

বা, $p^2r+pr^2-3pqr=-q^3$

$\therefore\quad q^3+p^2r+pr^2=3pqr.$

উদাহরণ 6. যদি $lx^2+nx+n=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের অনুপাত $p:q$ হয় দেখাও যে,

$$\sqrt{\frac{p}{q}}+\sqrt{\frac{q}{p}}+\sqrt{\frac{n}{l}}=0$$ [C. U. 1948]

প্রদত্ত শর্তানুসারে $lx^2+nx+n=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় pk এবং qk হইবে।

$\therefore\quad pk+qk=$ বীজদ্বয়ের সমষ্টি $=-n/l$

এবং $(pk)(qk)=$ বীজদ্বয়ের গুণফল $=n/l$

অর্থাৎ $k(p+q)=-n/l$ এবং $k^2(pq)=n/l$

এখন, $\sqrt{\frac{p}{q}}+\sqrt{\frac{q}{p}}+\sqrt{\frac{n}{l}}$

$$=\frac{p+q}{\sqrt{(pq)}}+\sqrt{\frac{n}{l}}=\frac{k(p+q)}{\sqrt{(k^2pq)}}+\sqrt{\frac{n}{l}}$$

$$=\left\{-\left(\frac{n}{l}\right)\div\sqrt{\left(\frac{n}{l}\right)}\right\}+\sqrt{\left(\frac{n}{l}\right)}$$

$$=-\sqrt{\left(\frac{n}{l}\right)}+\sqrt{\left(\frac{n}{l}\right)}=0.$$

উদাহরণ 7. যদি a, b, c মূলদ এবং $a+b+c=0$, $a\neq 0$ হয়, দেখাও যে, $(b+c-a)x^2+(c+a-b)x+(a+b-c)=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় মূলদ। ইহার বীজদ্বয় নির্ণয় কর।

যেহেতু, $a+b+c=0$,

$\therefore\quad b+c-a=a+b+c-2a=-2a$,

$c+a-b=a+b+c-2b=-2b$,

$a+b-c=a+b+c-2c=-2c$.

সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণটি দাঁড়ায়

$$-2ax^2-2bx-2c=0$$

অর্থাৎ $ax^2+bx+c=0$

$$\therefore\quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

এখন, $b^2-4ac=(-a-c)^2-4ac$

$$=(a+c)^2-4ac=(a-c)^2$$

$\therefore\quad \sqrt{b^2-4ac}=a-c$ যদি $a>c$

বা, $c-a$ যদি $c>a$

বা, 0 যদি $c=a$

তাহা হইলে বীজদ্বয় মূলদ এবং বীজদ্বয় :

$\dfrac{-b\pm(a-c)}{2a}$ যদি $a>c$

অথবা, $\dfrac{-b\pm(c-a)}{2a}$ যদি $c>a$

অথবা, $\dfrac{-b\pm 0}{2a}$ যদি $c=a$ হয় অর্থাৎ, $b=-2a$ হয়।

সুতরাং, বীজদ্বয় : 1 এবং $\dfrac{c}{a}$ যদি $a>c$ বা $c>a$

অথবা, 1 এবং 1 যদি $c=a$ হয়।

উদাহরণ 8. $(a^2-bc)x^2-2(b^2-ca)x+(c^2-ab)=0$

সমীকরণের বীজদ্বয় সমান হইলে দেখাও যে,

হয় $b=0$ অথবা, $a^3+b^3+c^3=3abc.$

$a^2-bc=A,\ -2(b^2-ca)=B$ এবং $c^2-ab=C$ ধরিলে সমীকরণটি দাঁড়ায়,

$$Ax^2+Bx+C=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

(1) হইতে; $x=\dfrac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}.$

এখন B^2-4AC

$$=\{-2(b^2-ca)\}^2-4(a^2-bc)(c^2-ab)$$

$$=4\{b^4-2b^2ca+c^2a^2-c^2a^2+a^3b+bc^3-ab^2c\}$$

$$=4b(a^3+b^3+c^3-3abc)$$

যেহেতু প্রদত্ত সমীকরণের বীজদ্বয় সমান, সুতরাং $B^2-4AC=0$

অর্থাৎ $4b(a^3+b^3+c^3-3abc)=0$

$\therefore\ b=0$ অথবা $a^3+b^3+c^3=3abc.$

উদাহরণ 9. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+m}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3+m}$

সমীকরণের বীজদ্বয় সমান এবং বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট হইলে m এর মান বাহির কর।

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই, $\frac{2x+m}{x^2+mx}=\frac{6+m}{9+3m}$

বা, $(6+m)(x^2+mx)=(9+3m)(2x+m)$

বা, $(6+m)x^2+(m^2-18)x-(9+3m)m=0.$

প্রদত্ত সমীকরণের বীজদ্বয় সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট হইবে যদি x-এর সহগ শূন্য হয় অর্থাৎ $m^2-18=0$ বা $m=\pm 3\sqrt{2}$ হয়।

সুতরাং, m এর নির্ণেয় মান $=\pm 3\sqrt{2}.$

উদাহরণ 10. $x^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের অনুপাত যদি $x^2+px+q=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের অনুপাতের সমান হয়, দেখাও যে, $b^2:c=p^2:q.$

$x^2+bx+c=0$ এর বীজদ্বয় α এবং β

এবং $x^2+px+q=0$ এর বীজদ্বর γ এবং δ হইলে

$\alpha:\beta=\gamma:\delta$ এবং

$\alpha+\beta=-b\ ;\ \alpha\beta=c\ ;$

$\gamma+\delta=-p\ ;\ \gamma\delta=q.$

এখন, $\frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha\beta}=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}+2$

$$=\frac{\gamma}{\delta}+\frac{\delta}{\gamma}+2=\frac{(\gamma+\delta)^2}{\gamma\delta}.$$

অর্থাৎ $\frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha\beta}=\frac{(\gamma+\delta)^2}{\gamma\delta},\quad\therefore\ \frac{b^2}{c}=\frac{p^2}{q}.$

উদাহরণ 11. যদি $x^2+bx+ca=0$ এবং $x^2+cx+ab=0$ সমীকরণদ্বয়ের মধ্যে একটিমাত্র সাধারণ বীজ থাকে, তাহা হইলে উহাদের অপর বীজদ্বয় $x^2+ax+bc=0$ কে সিদ্ধ করিবে।

$$x^2+bx+ca=0 \quad\cdots\quad (1)$$

$$x^2+cx+ab=0 \quad\cdots\quad (2)$$

যদি (1) এবং (2) এর সাধারণ বীজ α হয়,

তবে, $\alpha^2 + b\alpha + ca = 0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$

$\alpha^2 + c\alpha + ab = 0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$

(3) – (4) হইতে পাই,

$(b-c)\alpha + a(c-b) = 0$

বা, $(\alpha - a)(b-c) = 0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (5)$

সুতরাং $\alpha = a$ অথবা $b = c$;

$b = c$ হইতে পারে না, কারণ তাহা হইলে সমীকরণ (1) এবং (2) একই হইবে।

$\therefore \alpha = a$. এবং $b \neq c$

তাহা হইলে (3) বা (4) হইতে পাই

$a(a+b+c) = 0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (6)$

সুতরাং, হয় $a = 0$ অথবা $a+b+c=0 \quad \cdots \quad (7)$

যদি $a = 0$ হয় তবে সমীকরণ (1) এবং (2) এর বীজগুলি $(0, -b)$ এবং $(0, -c)$. ইহাদের মধ্যে সাধারণ বীজ 0 (শূন্য)। ইহাদের অপর বীজদ্বয়ের জন্য নির্ণেয় সমীকরণ $(x+b)(x+c) = 0$, বা $x^2 + ax + bc = 0. \quad \cdots \quad (8)$

যদি $a+b+c=0$ হয়, তবে প্রদত্ত সমীকরণ দুইটি দাঁড়ায়,

$x^2 - (a+c)x + ac = 0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (1')$

এবং $x^2 - (a+b)x + ab = 0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (2')$

সুতরাং (1) এর বীজদ্বয় $= a$ এবং c;

এবং (2) এর বীজদ্বয় $= a$ এবং b.

সুতরাং (1) এবং (2) এর অপর বীজদ্বয় যথাক্রমে c এবং b.

সুতরাং, যে দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় b এবং c তাহা

$$x^2 - (b+c)x + bc = 0$$

বা, $x^2 + ax + bc = 0$, [(7) হইতে]।

উদাহরণ 12. $ax^2 + bx + c = 0$ আকারের একটি দ্বিঘাত সমীকরণ টোকার সময় x এর সহগ ভুল করিয়া লেখায় বীজদ্বয় 2 এবং $\frac{4}{3}$ পাওয়া গেল। দ্বিতীয়বার সমীকরণকে নির্ভুল করিয়া লিখিতে যাওয়ায় x-নিরপেক্ষ পদটি ভুল করিয়া লেখায় বীজদ্বয় 5 এবং $-\frac{1}{3}$ পাওয়া গেল। নির্ভুল সমীকরণটির বীজদ্বয় নির্ণয় কর।

ধরি, নির্ভুল সমীকরণটি

$ax^2 + bx + c = 0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$

প্রথমবারে, সমীকরণটি লেখার সময় $-x^2$-এর সহগ এবং x-নিরপেক্ষ পদটি নির্ভুভাবে লেখা হয়, অর্থাৎ a এবং c এর মান নির্ভুলভাবে লেখা হয়। তখন বীজদ্বয়ের গুণফল $= 2 \times \frac{4}{3}$;

কিন্তু বীজদ্বয়ের গুণফল $= \frac{c}{a}$.

$$\therefore \quad \frac{c}{a} = \frac{8}{3} \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

দ্বিতীবারে, সমীকরণটি লেখার সময় x^2-এর সহগ এবং x এর সহগ নির্ভুলভাবে লেখা হয় অর্থাৎ a এবং b এর মান নির্ভুলভাবে লেখা হয়। তখন

বীজদ্বয়ের সমষ্টি $= 5 + \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{14}{3}$;

কিন্তু বীজদ্বয়ের সমষ্টি $= -\frac{b}{a}$

$$\therefore \quad -\frac{b'}{a} = \frac{14}{3} \quad \cdots \quad (3)$$

তাহা হইলে (1), (2), (3) হইতে পাই

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

অর্থাৎ $x^2 - \frac{14}{3}x + \frac{8}{3} = 0$

বা, $3x^2 - 14c + 8 = 0 \cdots\cdots(4)$

(4) হইতে পাই,

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \times 3 \times 8}}{2 \times 3}$$

$$= \frac{14 \pm 10}{6}$$

$\therefore$ নির্ভুল সমীকরণটির বীজদ্বয় : 4 এবং $\frac{2}{3}$.

প্রশ্নমালা 11

1. নিম্নোক্ত উক্তিগুলির যাহা ঠিক তাহা চিহ্নিত কর এবং যাহা ঠিক নাই তাহার সঠিক উত্তর দাও।

(i) $(x-2)^2 = 0$ এর কেবলমাত্র বীজ আছে 2 ;

(ii) $x^2 - 6x + 9 = 0$ এর বীজ দুইটি 3 এবং 3 ;

(iii) $ax^2 + bx + c = 0$, $(a \neq 0)$ এর কেবলমাত্র দুইটি বীজ থাকিবে।

(iv) $px^2-qx+r=0$ এর একটি বীজ অমূলদ হইলে অপর বীজ ইহার প্রতিযোগী অমূলদ হইবে।

2. সঠিক উত্তরটি চিহ্নিত কর :—

(a) $ax^2+bx+c=0$ এর একটি বীজ $2+\sqrt{3}$ হইলে অপর বীজটি হইবে,

(i) $-2+\sqrt{3}$, (ii) $2-\sqrt{3}$, (iii) $-2-\sqrt{3}$

(b) $x^2+px+q=0$ এর একটি বীজ $5-3i$ ইহার অপর বীজটি নিম্নের একটি হইবে—

(i) $-5-3i$, (ii) $5+3i$, (iii) $-5+3i$

3. সমাধান কর :—

(i) $x^2+6x+27=0$ (ii) $x^2-6x+5=0$

(iii) $x^2-6x-27=0$ (iv) $x^2-6x+2=0$

(v) $x^2+6x+34=0$ (vi) $x^2-4x+7=0$

(vii) $x^2-14x+49=0$ (viii) $x^2-15x-34=0$

(ix) $9x^2+30x+25=0$ (x) $14x^2-29x+12=0$

(xi) $(x-5)(x^2-x+6)=0$ (xii) $(x+a)(x+b)(x+c)=abc$

(xiii) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=8$

(xiv) $4x^4-16x^3+23x^2-16x+4=0$

(xv) $x^2+\sqrt{x^2-5}=11$ [**C. U. 1943**]

(xvi) $(1+x)^{\frac{2}{5}}+(1-x)^{\frac{2}{5}}=2(1-x^2)^{\frac{1}{5}}$

(xvii) $x^2+xy=15,\ x-y=1$

(xviii) $x^2-xy+6y^2=27,\ x+y=5$

4. নিম্নলিখিতগুলি **সমীকরণ** কি **অভেদ** ঠিক কর :—

(i) $(x+2)^2+(x-2)^2=4$ (ii) $(x+2)^2-(x-2)^2=8x$

(iii) $(x-a)^3+(x-b)^3+(b-a)^3=3(b-a)(x-a)(x-b)$

(iv) $\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}a^2+\dfrac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}b^2+\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}c^2=x^2$

(v) $(x-a)^3+(x-b)^3+(a+b-2x)^3=3(x-a)(x-b)(a+b-2x)$

5. নিম্নলিখিত বীজদ্বয় যে দ্বিঘাত সমীকরণের তাহা নির্ণয় কর :—

(i) $7,\ -9$, (ii) $-7,\ 5/2$, (iii) $-6,\ -6$,

(iv) $7\pm\sqrt{3}$, (v) $-3\pm2\sqrt{5}$, (vi) $5\pm i\sqrt{3}$.

6. মূলদ সহগবিশিষ্ট যে দ্বিঘাত সমীকরণের একটি বীজ নিম্নোক্ত তাহা নির্ণয় কর :—

(i) $3+\sqrt{7}$ (ii) $-5+2\sqrt{3}$, (iii) $-3-3\sqrt{7}$

(iv) $-3\sqrt{2}$ (v) $7+3i$, (vi) $3-2\sqrt{2}i$

(vii) $-5\sqrt{2}-3i$ (viii) $7i$ (ix) $-3\sqrt{2}i$

(x) $\dfrac{1}{3+\sqrt{5}}$ (xi) $\dfrac{3}{\sqrt{7}-2}$ (xiii) $\dfrac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$

(xiii) $\dfrac{2}{3+\sqrt{-5}}$ (xiv) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{(a-b)}}$ (xv) $\dfrac{p-\sqrt{p^2-4q}}{p+\sqrt{p^2-4q}}$

7. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের অনুপাত 2 : 3 হইলে দেখাও যে, $6b^2=25ac$ **[C. U. 1949]**

8. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের একটি বীজ অপর বীজের চারগুণ হইলে দেখাও যে, $4b^2=25ac$ **[C. U. 1940]**

9. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের অনুপাত r হইলে দেখাও যে,

$$\frac{(r+1)^2}{r}=\frac{b^2}{ac}$$

10. $x^2+px+q=0$ সমীকরণের একটি বীজ অপর বীজের বর্গ হইলে দেখাও যে,

$$p^3-q(3p-1)+q^2=0$$ **[C. U. 1943]**

11. যদি $x^2+px+r=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α এবং β হয় তবে p এবং r এর মধ্যে কিরূপ সম্বন্ধ থাকিলে

(i) $2\alpha=3\beta$ (ii) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{1}{\alpha\beta}$ হইবে ? **[P. U. 1974]**

12. যদি $x^2-px+q=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α এবং β হয়, কোন্ সর্ত সাপেক্ষে $m\alpha+n\beta=1$ হইবে ?

13. p এবং q এর মধ্যে কিরূপ সম্বন্ধ থাকিলে $x^2+px+q=0$ এর বীজদ্বয়ের সমষ্টি উহাদের পার্থক্যের তিনগুণের সমান হইবে ? **[C. U. 1947]**

14. যদি $b^3+a^2c+ac^2=3abc$ হয়, তবে $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের মধ্যে কিরূপ সম্বন্ধ থাকা সম্ভব ? **[Joint Ent. Ex. 1975]**

15. a, b, c বাস্তবরাশি হইলে $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের প্রকৃতি আলোচনা কর যদি

(i) $b^2>4ac, ab<0, ac<0$;

(ii) $b^2>4ac, ab>0, ac<0$ **[H. S. 1969]**

16. a, b, c বাস্তব রাশি হইলে দেখাও যে,

$$(a-b)x^2+2(b-c)x+(c-a)=0$$ এর বীজদ্বয় বাস্তব।

17. a, b মূলদ রাশি হইলে দেখাও যে,

$$5ax^2-(3a+5b)x+3b=0$$ সমীকরণের বীজদ্বয় মূলদ।

18. দেখাও যে, $(b-c)x^2-(a+b-c)x+a=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় মূলদ রাশি যদি a, b, c মূলদ রাশি হয় ; $b \neq c$.

19. যদি a, b, c বাস্তব রাশি হয়, দেখাও যে,

$$x^2+2(a+b+c)x+3(ab+bc+ca)=0$$

সমীকরণের বীজদ্বয় সর্বদা বাস্তব, এবং উহারা সমান হইবে, যদি $a=b=c$ হয়।

20. a, b, c বাস্তব রাশি হইলে দেখাও যে,

$$(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)+(x-a)(x-b)=0$$

সমীকরণের বীজদ্বয় বাস্তব এবং তাহারা অসমান হইবে, যদি $a \neq b \neq c$.

21. $2x^2-(3+2m)x+2=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় সমান হইলে m এর মান নির্ণয় কর।

22. k এর মান কত হইলে, $x^2-2(2k+5)x+3(10k+7)=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় সমান হইবে ?

23. $\dfrac{a}{x-a}+\dfrac{b}{x-b}=5$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের মান সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্ন-বিশিষ্ট হইবার শর্ত নির্ণয় কর। [**H. S. 1975**]

24. m এর মান কত হইলে,

$$\frac{a}{x+a+m}+\frac{b}{x+b+m}=1$$

এর বীজদ্বয়ের মান সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে ?

25. দেখাও যে, $x^2+px+r=0$ এবং $x^2+rx+p=0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ বীজ থাকিবে যদি $p=r$ অথবা $1+p+r=0$ হয়। [**Joint Ent. Ex. 1972**]

26. যদি $ax^2-bx+c=0$ এবং $bx^2-cx+a=0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ বীজ থাকে তবে দেখাও যে, $a=b=c$ অথবা $a+b+c=0$.

27. (*i*) $3x^2+4mx+2=0$ এবং $3x^2+3x-2=0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ বীজ থাকিলে mএর মান বাহির কর। [**H. S. 1964**]

(*ii*) যদি সমীকরণদ্বয় $3x^2+4mx+2=0$ এবং $2x^2+3x-2=0$ হয়, তবে m এর মান কত হইলে একটি সাধারণ বীজ থাকিবে ?

28. $ax^2+bx+c=0$ এবং $bx^2+cx+a=0$ সমীকরণদ্বয়ের মধ্যে একটি সাধারণ বীজ থাকিলে দেখাও যে, $a=0$ অথবা $a+b+c=0$ অথবা $a=b=c$.

29. $x^2+px+q=0$ এবং $x^2+p'x+q'=0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ বীজ থাকিলে সেই সাধারণ বীজটি

$$\frac{pq'-p'q}{q-q'} \text{ অথবা } \frac{q-q'}{p'-p}.$$

[Cal. Int. 1941]

30. $x^2+abx+c=0$ এবং $x^2+acx+b=0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ বীজ থাকিলে তাহাদের অপর বীজদ্বয় $a(b+c)x^2+(b+c)x-abc=0$ কে সিদ্ধ করিবে।

31. $ax^2+2bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α এবং β এবং $Ax^2+2Bx+C=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় $\alpha+\delta$ এবং $\beta+\delta$ হইলে দেখাও যে

$$\frac{b^2-ac}{a^2}=\frac{B^2-AC}{A^2}.$$

[Joint Ent. Ex. 1966]

32. যদি $x^2+2px+q=0$ এবং $x^2+2qx+p=0$ $(p\neq q)$ এর বীজদ্বয়ের পার্থক্য একই ধ্রুবক (constant) হয়, তবে দেখাও যে, $p+q+1=0$.

[H. S. 1974]

33. $x^2-px+q=0$ এর বীজদ্বয়ের মধ্যে যে তফাৎ $x^2-qx+p=0$ এর বীজদ্বয়ের মধ্যে যদি সেই একই তফাৎ হয় তবে দেখাও যে, $p=q$ অথবা $p+q+4=0$.

34. $px^2+qx+r=0$ আকারের একটি দ্বিঘাত সমীকরণ টোকার সময় x এর সহগ ভুল লেখায় উহার বীজদ্বয় 3 এবং 10 পাওয়া যায়। কিন্তু দ্বিতীয় বার সমীকরণটিকে লেখার সময় x-নিরপেক্ষ পদটিকে ভুল লেখায় উহার বীজদ্বয় 4 এবং 7 পাওয়া যায়। নির্ভুল সমীকরণটির বীজদ্বয় নির্ণয় কর।

35. "$(x-1)^2=\lambda\ (x-2\mu)(x-4)$ সমীকরণটির বীজ দুইটি সমান।" দেখাও যে, $\mu=2$ এবং $\mu=\frac{1}{2}$ ভিন্ন উহার অপর যে কোন মানের জন্য $\lambda(\neq 0)$ এর কেবলমাত্র একটি মান আছে যাহার জন্য উপরোক্ত উক্তিটি সত্য। [Joint Ent. Ex. 1973]

36. $f(x)=ax^2+bx+c=(x-\alpha)Q+R$ যেখানে a, b, c বাস্তব রাশি এবং R x-নিরপেক্ষ পদ। দেখাও যে, $R=f(\alpha)$ এবং $Q=a(x+\alpha)+b$.

যদি $f(x)=0$ সমীকরণের একটি বীজ α হয় তবে দেখাও যে, উহার বীজদ্বয়ের সমষ্টি $-b/a$.

4-7. দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় সংক্রান্ত বিবিধ প্রশ্ন।

ধরি, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α এবং β.

$$\therefore\quad \alpha+\beta=-\frac{b}{a} \quad\cdots\quad (1)$$

$$\alpha\beta=\frac{c}{a} \quad\cdots\quad (2)$$

$$a\alpha^2+b\alpha+c=0 \quad\cdots\quad (3)$$

$$a\beta^2+b\beta+c=0 \quad\cdots\quad (4)$$

(i) এখন, α এবং β দ্বারা প্রকাশিত বিভিন্ন রাশিমালার মান (1) – (4) এর সাহায্যে a, b, c-তে প্রকাশ করা যাইতে পারে।

(ii) আবার, α এবং β দ্বারা প্রকাশিত দুইটি রাশি যে দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় হইবে তাহাও (1) – (4) এর সাহায্যে নির্ণয় করা যাইতে পারে। নিম্নোক্ত উদাহরণগুলি লক্ষ্যণীয়।

উদাহরণ 1. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α এবং β হইলে নিম্নোক্ত রাশিগুলির মান বাহির কর :—

$$(i)\ \alpha^3\beta+\alpha\beta^3, \quad (ii)\ \alpha^4+\beta^4, \quad (iii)\ \frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}.$$

$ax^2+bx+c=0$ এর বীজদ্বয় α এবং β বলিয়া,

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \quad \text{এবং} \quad \alpha\beta=\frac{c}{a}.$$

$$(i)\quad \alpha^3\beta+\alpha\beta^3=\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)$$
$$=\alpha\beta\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}$$

$$\therefore\quad \text{প্রদত্ত রাশির মান}=\frac{c}{a}\left\{\frac{b^2}{a^2}-2\frac{c}{a}\right\}$$
$$=(b^2-2ac)\,ca^{-3}.$$

$$(ii)\quad \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a};$$

$$\therefore\quad \alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2(\alpha\beta)^2$$
$$=\left\{\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}\right\}^2-2\frac{c^2}{a^2}$$
$$=\frac{b^4}{a^4}+\frac{4c^2}{a^2}-\frac{4b^2c}{a^3}-\frac{2c^2}{a^2}.$$
$$=\frac{b^4}{a^4}-\frac{4b^2c}{a^3}+\frac{2c^2}{a^2}.$$

(iii) $\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}$

$$=\frac{1}{\alpha\beta}\{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\}$$

$$=\frac{a}{c}\left\{-\frac{b^3}{a^3}+3\frac{c}{a}\cdot\frac{b}{a}\right\}$$

$$=\frac{3b}{a}-\frac{b^3}{a^2c}.$$

উদাহরণ 2. $5x^2+7x+3=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α এবং β হইলে, $\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^{-1}+\beta^{-1}}$ এর মান নির্ণয় কর। **[H. S. 1975]**

এখানে, $\alpha+\beta=-\frac{7}{5};\ \alpha\beta=\frac{3}{5}.$

$$\therefore\ \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

$$=\left(-\frac{7}{5}\right)^3-3\times\left(\frac{3}{5}\right)\times\left(-\frac{7}{5}\right)$$

$$=-\frac{343}{125}+\frac{63}{25}=-\frac{28}{125}.$$

$$\alpha^{-1}+\beta^{-1}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{7}{5}\div\frac{3}{5}=-\frac{7}{3}$$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালার মান $=\frac{28}{125}\times\frac{3}{7}=\frac{12}{125}.$

উদাহরণ 3. $x^2-px+q=0$ এর বীজদ্বয় α এবং β হইলে

(i) $\alpha^5\beta^7+\alpha^7\beta^5$ (ii) $\frac{\alpha}{\alpha+q}+\frac{\beta}{\beta+q}$ এর মান বাহির কর।

এখানে, $\alpha+\beta=p$ এবং $\alpha\beta=q.$

(i) প্রদত্ত রাশিমালা $=\alpha^5\beta^5(\alpha^2+\beta^2)$

$$=(\alpha\beta)^5\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}$$

$$=q^5(p^2-2q).$$

(ii) প্রদত্ত রাশিমালা $=\frac{\alpha\beta+q\alpha+\alpha\beta+q\beta}{(\alpha+q)(\beta+q)}$

$$=\frac{2\alpha\beta+q(\alpha+\beta)}{\alpha\beta+q(\alpha+\beta)+q^2}=\frac{2q+pq}{q+pq+q^2}$$

$$=\frac{p+2}{p+q+1}.$$

উদাহরণ 4. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α এবং β হইলে, $(a\alpha+b)^{-2}+(a\beta+b)^{-2}$ এর মান নির্ণয় কর।

এখানে, $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$; $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$;

$a\alpha^2+b\alpha+c=0$ এবং $a\beta^2+b\beta+c=0$.

$\therefore\ a\alpha^2+b\alpha=-c$ বা, $\alpha(a\alpha+b)=-c$;

$\therefore\ \dfrac{1}{a\alpha+b}=-\dfrac{\alpha}{c}$.

অনুরূপভাবে, $\dfrac{1}{a\beta+b}=-\dfrac{\beta}{c}$.

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালা $=\dfrac{\alpha^2}{c^2}+\dfrac{\beta^2}{c^2}=\dfrac{1}{c^2}(\alpha^2+\beta^2)$

$$=\frac{1}{c^2}\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}$$

$$=\frac{1}{c^2}\left\{\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}\right\}=\frac{b^2-2ac}{a^2c^2}$$

উদাহরণ 5. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α এবং β হইলে দেখাও যে, $bcx^2+(ac+b^2)x+ab=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়

$\dfrac{1}{\alpha+\beta}$ এবং $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$. **[H. S. 1965, '76]**

এখন, $ax^2+bx+c=0$ এর বীজদ্বয় α এবং β বলিয়া

$\alpha+\beta=-b/a$ এবং $\alpha.\beta=c/a$.

$\therefore\ \dfrac{1}{\alpha+\beta}=-\dfrac{a}{b}$

এবং $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{-b/a}{c/a}=\dfrac{-b}{c}$

এখন, $\left(\dfrac{1}{\alpha+\beta}\right)+\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)=-\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{c}=-\dfrac{(ac+b^2)}{bc}$;

এবং $\left(\dfrac{1}{\alpha+\beta}\right)\times\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)=\left(-\dfrac{a}{b}\right)\times\left(-\dfrac{b}{c}\right)=\dfrac{a}{c}$.

সুতরাং, যে সমীকরণের বীজদ্বয় $\dfrac{1}{\alpha+\beta}$ এবং $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$ তাহা হইবে

$$x^2+\frac{ac+b^2}{bc}.x+\frac{a}{c}=0$$

অর্থাৎ, $bcx^2+(ac+b^2)x+ab=0$

উদাহরণ 6. $x^2+2ax-2b^2=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α এবং β হইলে, যেখানে a এবং b মূলদ রাশি কিন্তু a^2+b^2 পূর্ণবর্গ রাশি নয়, মূলদ সহগবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার একটি বীজ $\alpha+\beta+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ হইবে।

$x^2+2ax-2b^2=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α এবং β বলিয়া

$$\alpha+\beta=-2a \text{ এবং } \alpha\beta=-2b^2.$$

$$\therefore \quad \alpha+\beta+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=(\alpha+\beta)+\sqrt{\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}}$$
$$=-2a+\sqrt{\{4a^2+4b^2\}}$$
$$=-2a+2\sqrt{a^2+b^2}$$

সুতরাং, মূলদ সহগবিশিষ্ট যে দ্বিঘাত সমীকরণের একটি বীজ $-2a+2\sqrt{a^2+b^2}$ তাহার অপর বীজটি $-2a-2\sqrt{a^2+b^2}$ হইবে।

ধরি, $-2a+2\sqrt{a^2+b^2}=\alpha_1$

এবং $-2a-2\sqrt{a^2+b^2}=\beta_1$

$\therefore \quad \alpha_1+\beta_1=-4a$ এবং $\alpha_1\beta_1=-4b^2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ :

$$x^2-(\alpha_1+\beta_1)x+\alpha_1\beta_1=0$$

অর্থাৎ $x^2+4ax-4b^2=0$

উদাহরণ 7. $x^2+x+1=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α এবং β হইলে, যে দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় α^2 এবং β^2 তাহা নির্ণয় কর। নির্ণেয় সমীকরণ এবং প্রদত্ত সমীকরণ একই হইবার কারণ যুক্তিসহ বুঝাও।

$x^2+x+1=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α এবং β বলিয়া,

$$\alpha+\beta=-1 \text{ এবং } \alpha\beta=1. \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

এখন, $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1-2=-1$;

$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=1.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ :

$$x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+(\alpha^2\beta^2)=0$$

অর্থাৎ $x^2+x+1=0$, যাহা প্রদত্ত সমীকরণের সমরূপ।

যেহেতু, প্রদত্ত সমীকরণের একটি বীজ α

$\therefore \quad \alpha^2+\alpha+1=0$ বা, $\alpha^2=-\alpha-1$

কিন্তু $\alpha+\beta=-1$, $\therefore \quad \beta=-\alpha-1.$

সুতরাং, $\alpha^2=\beta$;

অনুরূপভাবে, $\beta^2=\alpha.$

সুতরাং, প্রদত্ত সমীকরণের বীজদ্বয় α এবং β যথাক্রমে β^2 এবং α^2 এর সমান। সেইজন্য α^2 এবং β^2 দ্বারা গঠিত দ্বিঘাত সমীকরণটি প্রদত্ত সমীকরণের সমতুল।

উদাহরণ 8. যদি $a \neq b$ কিন্তু $2a^2 = 7a - 5$ এবং $2b^2 = 7b - 5$ হয়, তাহা হইলে যে দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় $\frac{a}{b}$ এবং $\frac{b}{a}$ তাহা নির্ণয় কর।

যেহেতু, $2a^2 - 7a + 5 = 0$ এবং $2b^2 - 7b + 5 = 0$ কিন্তু $a \neq b$, সুতরাং $2x^2 - 7x + 5 = 0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় a এবং b হইবে।

$\therefore \quad a + b = 7/2$ এবং $ab = 5/2$.

এখন, $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} = \dfrac{a^2 + b^2}{ab} = \dfrac{(a+b)^2 - 2ab}{ab}$

$$= \frac{49/4 - 5}{5/2} = \frac{49 - 20}{10} = \frac{29}{10};$$

এবং $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{b}{a} = 1$

সুতরাং নির্ণেয় সমীকরণটি :

$x^2 - \frac{29}{10}x + 1 = 0$ বা, $10x^2 - 29x + 10 = 0$

উদাহরণ 9. $x^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α এবং β হইলে দেখাও যে, যে দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় b এবং c তাহার সমীকরণ

$$x^2 + (\alpha + \beta - \alpha\beta)x - (\alpha + \beta)\alpha\beta = 0$$

$x^2 + bx + c = 0$ এর বীজদ্বয় α এবং β বলিয়া,

$\alpha + \beta = -b$ এবং $\alpha\beta = c$.

যে সমীরকরণের বীজদ্বয় b এবং c তাহার সমীকরণ

$x^2 - (b + c)x + bc = 0$

বা, $x^2 + (\alpha + \beta - \alpha\beta)x - (\alpha + \beta)\alpha\beta = 0$.

উদাহরণ 10. $4x^2 - 3x + 5 = 0$ সমীকরণের একটি বীজ α হইলে, দেখাও যে $4x^2 - 9x + 45 = 0$ সমীকরণের একটি বীজ 3α হইবে।

$4x^2 - 3x + 5 = 0$ এর একটি বীজ α বলিয়া,

$4\alpha^2 - 3\alpha + 5 = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$

এখন, $4(3\alpha)^2 - 9(3\alpha) + 45$

$= 9(4\alpha^2 - 3\alpha) + 45$

$= 9(-5) + 45,$ [(1) হইতে]

$= 0.$

$\therefore \quad 4(3\alpha)^2 - 9(3\alpha) + 45 = 0$

সুতরাং, $4x^2 - 9x + 45 = 0$ এর একটি বীজ 3α হইবে।

প্রশ্নমালা 12

1. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α এবং β হইলে নিম্নোক্ত রাশিগুলির মান বাহির কর :

(i) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$ (ii) $\alpha^3+\beta^3$ (iii) $\alpha^4+\beta^4$

(iv) $\alpha^{-2}+\beta^{-2}$ (v) $\alpha^{-3}+\beta^{-3}$ (vi) $\alpha^3-\beta^3$

(vii) $\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4$ (viii) $\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)$ [H. S. 1962]

2. $x^2-px+q=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α এবং β হইলে নিম্নোক্ত রাশিগুলির মান বাহির কর :

(i) $\alpha^8\beta^6+\alpha^6\beta^8$ (ii) $(2\alpha+3\beta)(3\alpha+2\beta)$ (iii) $\alpha^2\beta^{-2}+\alpha^{-2}\beta^2$

(iv) $\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}$ [Cal. Int. 1946] (v) $\frac{\alpha^3}{\beta^3}+\frac{\beta^3}{\alpha^3}$

(vi) $(1-\alpha+\alpha^2)(1-\beta+\beta^2)$ (vii) $(\alpha-p)^{-4}+(\beta-p)^{-4}$

(viii) $\frac{\alpha}{\alpha^2+q}+\frac{\beta}{\beta^2+q}$ (ix) $\alpha^2\left(\frac{\alpha^2}{\beta}-\beta\right)+\beta^2\left(\frac{\beta^2}{\alpha}-\alpha\right)$

[Cal. Int. 1941]

3. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় x_1 এবং x_2 হইলে $(ax_1+b)^{-3}+(ax_2+b)^{-3}$ এর মান নির্ণয় কর। [P. U. 1970]

4. $px^2-qx+r=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α এবং β হইলে

$\frac{q^2}{(p\alpha^2+r)^2}+\frac{q^2}{(p\beta^2+r)^2}$ এর মান বাহির কর।

5. $3x^2-6x+4=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α এর β হইলে

$\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)+2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)+3\alpha\beta$ এর মান বাহির কর। [Cal. Int. 1949]

6. $x^2+7x+3=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α এবং β দেখাও যে,

$\alpha^3+\beta^3+7(\alpha^2+\beta^2)+3(\alpha+\beta)=0.$ [P. U. 1976]

7. $x^2-(1+k^2)x+\frac{1}{2}(1+k^2+k^4)=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α এবং β হইলে দেখাও যে, $\alpha^2+\beta^2=k^2$.

8. $k^2x^2+(kx+1)(x+k)+1=0$, $(k\neq 0, \neq -1)$-এর বীজদ্বয় α এবং β হইলে $\alpha^2\beta^2+(\alpha\beta+1)(\alpha+\beta)+1$ এর মান বাহির কর।

[Joint Ent. Ex. 1969]

9. $x^2 - px + q = 0$ এবং $x^2 - p'x + q' = 0$ সমীকরণদ্বয়ের বীজগুলি যথাক্রমে α, β এবং α', β' হইলে, মান নির্ণয় কর :

$$(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \alpha')^2 + (\alpha - \beta')^2 + (\beta - \beta')^2.$$

10. $x^2 - bx + c = 0$ এবং $x^2 - px + q = 0$ সমীকরণদ্বয়ের বীজগুলি যথাক্রমে α, β এবং γ, δ হইলে $(\alpha - \gamma)(\beta - \delta) + (\beta - \gamma)(\alpha - \delta)$ এর মান বাহির কর।

11. $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α এবং β হইলে নিম্নোক্ত বীজদ্বয় যে দ্বিঘাত সমীকরনের তাহা নির্ণয় কর :

(i) $\alpha^2 + \beta^2, (\alpha + \beta)^2$ (ii) $m\alpha + \beta, m\beta + \alpha$

(iii) $\alpha + \frac{\alpha^2}{\beta}, \beta + \frac{\beta^2}{\alpha}$, [**H. S. 1964**] (iv) $\frac{1-\alpha}{1+\alpha}, \frac{1-\beta}{1+\beta}$.

12. যদি α এবং β, $a(x^2 - 1) + 2bx = 0$ সমীকরণের বীজদ্বয় হয়, তবে যে দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় $2\alpha + \frac{1}{\beta}$ এবং $2\beta + \frac{1}{\alpha}$ তাহা নির্ণয় কর।

[**H. S. Comp. 1975**]

13. $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α এবং β হইলে যে দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় $\alpha^2 - \alpha\beta, \beta^2 - \alpha\beta$ তাহা হইলে নির্ণয় কর। [**P. U. 1976**]

14. যদি α এবং β, $3x^2 + 6x + 2 = 0$ সমীকরণের বীজদ্বয় হয়, তবে যে দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় $-\frac{\alpha^2}{\beta}, -\frac{\beta^2}{\alpha}$ তাহা নির্ণয় কর। [**P. U. 1963**]

15. p এবং q, $2x^2 - 5x + 2 = 0$ সমীকরণের বীজদ্বয় হইলে, $p + mq$, এবং $q + mp$ যে দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় তাহা নির্ণয় কর। [**H. S. 1961**]

16. যদি $\alpha \pm \sqrt{\beta}$, $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের বীজদ্বয় হয়, তবে দেখাও যে $\frac{1}{\alpha} \pm \frac{1}{\sqrt{\beta}}$, $(p^2 - 4q)(p^2x^2 + 4px) - 16q = 0$ সমীকরণের বীজদ্বয় হইবে।

[**Joint Ent. Ex. 1970**]

17. p এবং q মূলদ রাশি হইলে এবং $p^2 + q^2$ পূর্ণবর্গ না হইলে এবং α এবং β, $2x^2 + 2px - q^2 = 0$ সমীকরণের বীজদ্বয় হইলে যে মূলদ-সহগবিশিষ্ট সমীকরণের একটি বীজ $-(\alpha + \beta) + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ তাহা নির্ণয় কর।

18. α, β এবং γ, δ যথাক্রমে $x^2-ax+b=0$ এবং $x^2-px+q=0$ সমীকরণদ্বয়ের বীজগুলি হইলে যে দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় $\alpha\gamma+\beta\delta, \alpha\delta+\beta\gamma$ হইবে তাহা নির্ণয় কর।

19. $x^2+x+1=0$ সমীকরণের যে বীজদ্বয়, তাহার অন্যোন্য (reciprocal) যে দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় তাহা নির্ণয় কর। নির্ণেয় সমীকরণ এবং প্রদত্ত সমীকরণ একই কেন তাহা যুক্তি দ্বারা বুঝাও।

20. $6x^2-13x+6=0$ সমীকরণের যে বীজদ্বয়, তাহার অন্যোন্য যে দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় তাহা নির্ণয় কর এবং একই সমীকরণ পাওয়ার যুক্তি দেখাও।

21. α এবং β, $x^2-px+q=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় হইলে, যে দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় $\dfrac{q}{p-\alpha}$ এবং $\dfrac{q}{p-\beta}$ তাহা নির্ণয় কর। একই সমীকরণ পাইবার কারণ নির্দেশ কর।

22. $3p^2=5p+2$ এবং $3q^2=5q+2$, যেখানে $p\neq q$, হইলে, যে দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় $3p-2q$ এবং $3q-2p$ তাহা নির্ণয় কর।

23. যদি $a^2=5a-3$ এবং $b^2=5b-3, (b\neq a)$ হয়, দেখাও যে,

$3y^2-19y+3=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় $\dfrac{a}{b}$ এবং $\dfrac{b}{a}$. [**C. U. 1950**]

24. $x^2+px+q=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α এবং β হইলে দেখাও যে. p এবং q, $x^2+(\alpha+\beta-\alpha\beta)x-(\alpha+p)\alpha\beta=0$ এর বীজদ্বয়।

25. $qx^2-(p^2-2q)x+q=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়কে $x^2+px+q=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ে প্রকাশ কর।

26. $x^2+Px+q=0$ এর বীজদ্বয় α, β এবং $x^2+px+Q=0$ এর বীজদ্বয় γ, δ হইলে, $x^2+px+q=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়কে α, β, γ, δ তে প্রকাশ কর।

[**Cal. Int. 1914**]

27. $2x^2+5x+7=0$ সমীকরণের একটি বীজ α হইলে দেখাও যে

$2y^2+15y+63=0$ এর একটি বীজ 3α হইবে।

28. $4x^2+8x-1=0$ এর একটি বীজ α হইলে দেখাও যে,

$4\alpha^3-17\alpha+2=0$ এবং এখান থেকে দেখাও যে, $16y^2-72y+1=0$ সমীকরণের একটি বীজ α^2 হইবে।

4-8. ax^2+bx+c এর লঘিষ্ঠ এবং গরিষ্ঠ মান নির্ণয়।

a, b, c, নির্দিষ্ট বাস্তব রাশি, যেখানে $a \neq 0$ এবং x এর বিভিন্ন বাস্তব মানের জন্য ax^2+bx+c এর মানও বিভিন্ন বাস্তব রাশি হইবে।

ধরি, $ax^2+bx+c=y$.

$$\therefore \quad ax^2+bx+(c-y)=0.$$

$$\therefore \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4a(c-y)}}{2a}$$

$$=\frac{-b\pm\sqrt{4ay-(4ac-b^2)}}{2a}$$

যেহেতু, x বাস্তবরাশি,

$$4ay-(4ac-b^2)\geqslant 0,$$

বা, $4a\left(y-\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)\geqslant 0$ যেখানে $a\neq 0$.

(a) যদি $a>0$ হয়, তাহা হইলে $y\geqslant\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

সুতরাং, $a>0$ হইলে x-এর যেকোন বাস্তব মানের জন্য,

$$y=\frac{4ac-b^2}{4a} \text{ অথবা } y>\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

অতএব, এইক্ষেত্রে y-এর লঘিষ্ঠ (least) মান $=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$

অর্থাৎ, ax^2+bx+c-এর লঘিষ্ঠ মান $=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

এবং তখন $x=-\dfrac{b}{2a}$.

কিন্তু এইরূপক্ষেত্রে ax^2+bx+c-এয় কোন গরিষ্ঠ মান পাওয়া যাইবে না।

(b) যদি $a<0$ হয় তাহা হইলে, $y\leqslant\dfrac{4ac-b^2}{4a}$

সুতরাং, $a<0$ হইলে x-এর যেকোন বাস্তব মানের জন্য,

$$y=\frac{4ac-b^2}{4a} \text{ অথবা } y<\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

অতএব, এইরূপক্ষেত্রে y-এর গরিষ্ঠ (greatest) মান $= \frac{4ac-b^2}{4a}$

অর্থাৎ, ax^2+bx+c-এর গরিষ্ঠ মান $= \frac{4ac-b^2}{4a}$

এবং তখন $x = -\frac{b}{2a}$.

কিন্তু এইরূপক্ষেত্রে ax^2+bx+c-এর কোন লঘিষ্ঠ মান পাওয়া যাইবে না।

দ্বিতীয় প্রণালী :—

$$ax^2+bx+c$$

$$= a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right\}$$

$$= a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right\}$$

$$= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

x-এর যে কোন বাস্তব মানের জন্য $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ সর্বদাই ধনাত্মক রাশি।

(a) যদি $a>0$ হয়, তাহা হইলে,

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a} \geqslant \frac{4ac-b^2}{4a}.$$

স্নুতরাং তখন ax^2+bx+c-এর লঘিষ্ঠ মান $= \frac{4ac-b^2}{4a}$

এবং তখন $x = -\frac{b}{2a}$.

(b) যদি $a<0$ হয়, তাহা হইলে,

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a} \leqslant \frac{4ac-b^2}{4a}.$$

স্নুতরাং তখন ax^2+bx+c-এর গরিষ্ঠ মান $= \frac{4ac-b^2}{4a}$

এবং তখন $x = -\frac{b}{2a}$.

4-9. ax^2+bx+c এর চিহ্ন নিরূপণ।

a, b, c নির্দিষ্ট বাস্তব রাশি, যেখানে $a \neq 0$ এবং x এর বিভিন্ন বাস্তব মানের জন্য ax^2+bx+c এর মান বিভিন্ন বাস্তব রাশি হইবে এবং তাহারা বিভিন্ন চিহ্নযুক্ত হইবে।

[1] মনে করি, $ax^2+bx+c=0$ এর বীজদ্বয় বাস্তব এবং অসমান এবং তাহারা α ও β যেখানে $\alpha > \beta$.

তাহা হইলে, $\alpha+\beta=-b/a$ এবং $\alpha\beta=c/a$.

$$\therefore \quad ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$
$$=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}$$
$$=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

যেহেতু, $\alpha>\beta$, যদি $x>\alpha$ অথবা $x<\beta$ হয়, তবে $(x-\alpha)(x-\beta)$ এর মান ধনাত্মক হইবে এবং তখন a এর যে চিহ্ন, ax^2+bx+c এর সেই চিহ্ন হইবে।

কিন্তু, $\beta<x<\alpha$ হইলে, $(x-\alpha)(x-\beta)$ এর মান ঋণাত্মক হইবে এবং তখন a এর যে চিহ্ন, ax^2+bx+c এর চিহ্ন তাহার বিপরীত হইবে।

$x=\alpha$ অথবা $x=\beta$ হইলে ax^2+bx+c এর মান 0 (শূন্য) হইবে।

[2] মনে করি, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় সমান এবং তাহারা উভয়েই α.

এখন, $ax^2+bx+c=0$ হইতে পাই,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\therefore \quad b^2=4ac \text{ এবং } \alpha=\frac{-b}{2a}.$$

$$\therefore \quad ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$
$$=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)$$
$$=a(x^2-2\alpha x+\alpha^2)$$
$$=a(x-\alpha)^2.$$

x এর যে কোন বাস্তব মানের জন্য $(x-\alpha)^2$ সর্বদাই ধনাত্মক বলিয়া এইরূপ ক্ষেত্রে a এর যে চিহ্ন, ax^2+bx+c এর সেই চিহ্ন হইবে।

কেবলমাত্র, $x=\alpha$ এর জন্য ax^2+bx+c এর মান 0 (শূন্য) হইবে।

[3] মনে করি, $ax^2+bx+c=0$ এর বীজদ্বয় α এবং β এবং তাহারা অবাস্তব। তাহা হইলে $\alpha=p+iq$ হইলে, $\beta=p-iq$ সেখানে p এবং q বাস্তব রাশি এবং $i=\sqrt{-1}$.

$$\therefore \quad ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$
$$=a\{x-(p+iq)\}\times\{x-(p-iq)\}$$
$$=a\{(x-p)-iq\}\times\{(x-p)+iq\}$$
$$=a\{(x-p)^2+q^2\}$$

x এর যে কোন বাস্তব মানের জন্য $(x-p)^2+q^2$ সর্বদাই ধনাত্মক বলিয়া এইরূপক্ষেত্রে a এর যে চিহ্ন, ax^2+bx+c এর সেই চিহ্ন হইবে।

এইরূপক্ষেত্রে ax^2+bx+c এর মান কখনই শূন্য হইবে না।

প্রয়োজনীয় সিদ্ধান্ত :

[1] $b^2=4ac$ হইলে ax^2+bx+c একটি পূর্ণবর্গ রাশি হইবে এবং বিপরীত ক্রমে।

[2] b^2-4ac ধনাত্মক পূর্ণবর্গ রাশি হইলে ax^2+bx+c কে xএর দুইটি একঘাত বিশিষ্ট উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা সম্ভব হইবে। a, b, c মূলদ এবং b^2-4ac ধনাত্মক পূর্ণবর্গ হইলে উৎপাদক দুইটি মূলদ হইবে।

যেমন, $2x^2+x-6$ এর জন্য

$$b^2-4ac=1-4\times2\times(-6)=49=7^2 \text{ এবং}$$

$2x^2+x-6=0$ এর বীজদ্বয় $\dfrac{-1\pm7}{4}$ অর্থাৎ

$3/2$ এবং -2

সুতরাং, $2x^2+x-6=2(x-\frac{3}{2})(x+2)$
$$=(2x-3)(x+2).$$

এখন, $x^2-2\sqrt{2}x+1$ রাশিমালাটি লওয়া যাক্। এখানে, x এর সহগ $-2\sqrt{2}$ যাহা একটি অমূলদ রাশি; কিন্তু

$$b^2-4ac=(-2\sqrt{2})^2-4\times1\times1=8-4=4=2^2.$$

এবং $x^2-2\sqrt{2}x+1=0$ এর বীজদ্বয়

$\dfrac{2\sqrt{2}\pm\sqrt{4}}{2}$ অর্থাৎ $\sqrt{2}\pm1$

$$\therefore \quad x^2-2\sqrt{2}x+1=(x-\sqrt{2}-1)(x-\sqrt{2}+1).$$

এখানে কিন্তু $x^2-2\sqrt{2}x+1$ এর একঘাত উৎপাদক দুইটি মূলদ নয়।

4-10. $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$ **রশিমালাকে দুইটি এক ঘাতবিশিষ্ট উৎপাদকে প্রকাশ করিবার সর্ত নিরূপণ।**

প্রদত্ত রাশিমালাকে x এর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া পাই,

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$$
$$=ax^2+2(hy+g)x+(by^2+2fy+c)$$

যেখানে, a, b, c, f, g, h মূলদ রাশি এবং $a \neq 0$,

প্রদত্ত রাশিমালাকে x এবং y এর এক ঘাত বিশিষ্ট দুইটি মূলদ উৎপাদকে প্রকাশ করা যাইবে, যদি

$$4(hy+g)^2-4a(by^2+2fy+c)$$

অর্থাৎ $(h^2-ab)y^2+2(hg-af)y+(g^2-ac)$ একটি ধনাত্মক পূর্ণবর্গ রাশি হয় এবং তাহা সম্ভব হইবে, যখন

$$4(hg-af)^2-4(h^2-ab)(g^2-ac)=0$$

অর্থাৎ, $a(abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2)=0$

অর্থাৎ, $abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$ কারণ, $a \neq 0$,

উদাহরণ 1. x বাস্তব রাশি হইলে $3-20x-25x^2$ এর গরিষ্ঠ মান নির্ণয় কর।
[H. S. 1970]

x এর যে কোন বাস্তব মানের জন্য

$$3-20x-25x^2$$
$$=-(25x^2+20x-3)$$
$$=-\{(5x+2)^2-7\}$$
$$=7-(5x+2)^2 \leqslant 7.$$

সুতরাং, প্রদত্ত রাশিমালার গরিষ্ঠ মান 7 এবং তখন $5x+2=0$ অর্থাৎ

$$x=-2.5.$$

উদাহরণ 2. x এর সমুদয় বাস্তব মানের জন্য $3x^2-5x+7$ এর লঘিষ্ঠ মান বাহির কর।

$$3x^2-5x+7$$
$$=3\{x^2-\tfrac{5}{3}x+\tfrac{7}{3}\}$$
$$=3\{(x-\tfrac{5}{6})^2+\tfrac{7}{3}-\tfrac{25}{36}\}$$
$$=3\{(x-\tfrac{5}{6})^2+\tfrac{59}{36}\}.$$
$$=3(x-\tfrac{5}{6})^2+\tfrac{59}{12} \geqslant \tfrac{59}{12}$$

সুতরাং, প্রদত্ত রাশিমালার লঘিষ্ঠ মান $\frac{59}{12}$ এবং তখন $x-\frac{5}{6}=0$ অর্থাৎ $x=\frac{5}{6}$.

উদাহরণ 3. x বাস্তব হইলে কখন $6x^2-5x+1$ ধনাত্মক হইবে?

$$\begin{aligned}&6x^2-5x+1\\&=6x^2-2x-3x+1\\&=2x(3x-1)-1(3x-1)\\&=(3x-1)(2x-1)\\&=6(x-\tfrac{1}{3})(x-\tfrac{1}{2})\end{aligned}$$

$x>\frac{1}{2}$ হইলে, $(x-\frac{1}{3})$ এবং $(x-\frac{1}{2})$ উভয়েই ধনাত্মক হইবে এবং $x<\frac{1}{3}$ হইলে উভয়েই ঋণাত্মক হইবে।

সুতরাং, $x>\frac{1}{2}$ অথবা $x<\frac{1}{3}$ হইলে $6(x-\frac{1}{3})(x-\frac{1}{2})$ অর্থাৎ $6x^2-5x+1$ ধনাত্মক হইবে।

কিন্তু $\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$ হইলে প্রদত্ত রাশির মান ঋণাত্মক হইবে এবং উহার মান 0 (শূন্য) হইবে যখন $x=\frac{1}{3}$ অথবা $\frac{1}{2}$.

উদাহরণ 4. x এর মান বাস্তব হইলে $\dfrac{x^2-2x+4}{x^2+2x+4}$ এর গরিষ্ঠ মান নির্ণয় কর।

মনে করি, $\dfrac{x^2-2x+4}{x^2+2x+4}=y.$

তাহা হইলে, $(x^2+2x+4)y=x^2-2x+4$

বা, $(y-1)x^2+2(y+1)x+4(y-1)=0$

$$\therefore\ x=\frac{-2(y+1)\pm\sqrt{4(y+1)^2-16(y-1)^2}}{2(y-1)}$$

এখন, $4(y+1)^2-16(y-1)^2$

$$\begin{aligned}&=-4(3y^2-10y+3)\\&=-4(3y-1)(y-3)\\&=-12(y-\tfrac{1}{3})(y-3)\end{aligned}$$

যেহেতু x বাস্তব রাশি,

$-12(y-\frac{1}{3})(y-3)$ এর মান শূন্য অথবা ধনাত্মক হইবে। উহার মান শূন্য হইলে $y=\frac{1}{3}$ বা 3 হইবে।

যদি $\frac{1}{3}<y<3$ হয়, তাহা হইলে $y-\frac{1}{3}$ ধনাত্মক এবং $y-3$ ঋণাত্মক হইবে এবং তখন $-12(y-\frac{1}{3})(y-3)$ ধনাত্মক হইবে।

কিন্তু $y>3$ অথবা $y<\frac{1}{3}$ হইলে $-12(y-\frac{1}{3})(y-3)$ এর মান ঋণাত্মক হইবে।

সুতরাং x বাস্তব রাশি হইলে $\frac{1}{3} \leq y \leq 3$ হইবে। তাহা হইলে y এর গরিষ্ঠ মান হইবে 3 এবং তখন

$$x = \frac{-2(3+1)+0}{2(3-1)} = -2$$

সুতরাং, x এর বাস্তব মানের জন্য প্রদত্ত রাশিমালার গরিষ্ঠ মান হইবে 3 এবং তাহা হইবে যখন $x = -2$.

উদাহরণ 5. x এর সমুদয় বাস্তব মানের জন্য $\dfrac{(x-2)(x-4)}{(x-1)(x-3)}$ রাশিটির মান যাবতীয় বাস্তব মান হইতে পারে, তাহা দেখাও।

ধরি, $\dfrac{(x-2)(x-4)}{(x-1)(x-3)} = y$.

তাহা হইলে, $(x-1)(x-3)y = (x-2)(x-4)$

বা, $(x^2-4x+3)y = (x^2-6x+8)$

বা, $(y-1)x^2-(4y-6)x+(3y-8)=0$

$$\therefore \quad x = \frac{(4y-6) \pm \sqrt{(4y-6)^2-4(y-1)(3y-8)}}{2(y-1)}$$

এখন, $(4y-6)^2-4(y-1)(3y-8)$

$=(16y^2-48y+36)-(12y^2-44y+32)$

$=4y^2-4y+4$

$=(2y-1)^2+3$

যাহা y-এর যাবতীয় বাস্তব মানের জন্য ধনাত্মক। সুতরাং, x-এর সমুদয় বাস্তব মানের জন্য y অর্থাৎ প্রদত্ত রাশিটির যাবতীয় বাস্তব মান থাকিবে। এইরূপ ক্ষেত্রে প্রদত্ত রাশিটির গরিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মান নাই।

উদাহরণ 6. $2x^2-xy-6y^2+2x+ky-12$ রাশিমালাটিকে দুইটি একঘাত বিশিষ্ট উৎপাদকে করা প্রকাশ সম্ভব হইলে k এর মান বাহির কর এবং উৎপাদকগুলি নির্ণয় কর।

প্রথম অংশ :—

প্রদত্ত রাশিমালাটিকে x-এর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া পাই,

$$2x^2+(2-y)x+(ky-6y^2-12).$$

প্রদত্ত রাশিমালাটিকে একঘাত বিশিষ্ট উৎপাদকে প্রকাশ করা সম্ভব হইবে যদি

$(2-y)^2-8(ky-6y^2-12)$

অর্থাৎ, $49y^2-4(2k+1)y+100$

একটি পূর্ণবর্গ রাশি হয় এবং তাহা সম্ভব হইবে যদি

$$16(2k+1)^2 = 4 \times 49 \times 100$$

অর্থাৎ $(2k+1)^2 = 49 \times 25$

বা, $2k+1 = \pm(7 \times 5)$

বা, $k = 17, \ -18$

সুতরাং, k-এর নির্ণেয় মান : 17 বা, -18.

অন্য পদ্ধতি :

প্রদত্ত রাশিমালাটি $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c$ আকারের। এখন প্রদত্ত রাশিমালাটিকে দুইটি একঘাত বিশিষ্ট উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা সম্ভব হইবে

যদি $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$ হয়

অর্থাৎ $144 - \frac{k}{2} - \frac{k^2}{2} + 6 + 3 = 0$

বা, $k^2 + k - 306 = 0$

বা, $(k-17)(k+18) = 0$

$\therefore \ k = 17$, বা, -18

দ্বিতীয় অংশ :—

$k = 17$ হইলে,

প্রদত্ত রাশিমালাটি

$= 2x^2 - xy - 6y^2 + 2x + 17y - 12$

$= 2x^2 - (y-2)x - (6y^2 - 17y + 12)$

$= 2x^2 - (y-2)x - (2y-3)(3y-4)$

$= 2x^2 - \{(4y-6) - (3y-4)\}x - (2y-3)(3y-4)$

$= (2x)\{x - (2y-3)\} + (3y-4)\{x - (2y-3)\}$

$= (x - 2y + 3)(2x + 3y - 4)$.

$k = -18$ হইলে

প্রদত্ত রাশিমালাটি

$= 2x^2 - xy - 6y^2 + 2x - 18y - 12$

$= 2x^2 - (y-2)x - 6(y^2 + 3y + 2)$

$= 2x^2 - (y-2)x - 6(y+1)(y+2)$

$= 2x^2 - \{(4y+4) - (3y+6)\}x - (2y+2)(3y+6)$

$= (2x)\{x - (2y+2)\} + (3y+6)\{x - (2y+2)\}$

$= (x - 2y - 2)(2x + 3y + 6)$

প্রশ্নমালা 13

1. x এর মান বাস্তব হইলে নিম্নলিখিত রাশিগুলির গরিষ্ঠ মান বাহির কর :—

(i) $7+5x-2x^2$ (ii) $(1-x)(2+3x)$ [C. U. 1946]

(iii) $3-3x-4x^2$ (iv) $(a+c)^2-b^2x^2$.

2. x-এর মান বাস্তব হইলে নিম্নলিখিত রাশিগুলির লঘিষ্ঠ মান নির্ণয় কর :—

(i) $4x^2-10x+3$, (ii) $3x^2+15x+16$

3. দেখাও যে, x-এর যে কোন বাস্তব মানের জন্য $5x^2-4x+2$ সর্বদাই ধনাত্মক।

4. দেখাও যে, x-এর সমুদয় বাস্তব মানের জন্য $3x^2-6x+8$ এর মান কখনই 5এর কম হইবে না। [Cal. Int. 1935]

5. x এর কোন্ কোন্ মানের জন্য $2x^2+5x-3$ এক মান ঋণাত্মক হইবে? [C. U. 1950]

6. দেখাও যে, x এর মান $\frac{1}{3}$ ও $\frac{1}{2}$ অথবা উহাদের মধ্যে না থাকিলে, x এর অপর যে কোন বাস্তব মানের জন্য $6x^2-5x+1$ সর্বদাই ধনাত্মক হইবে।

7. x এর সমুদয় বাস্তব মানের জন্য k এর মান কত হইলে $4x^2+kx+1$ এর মান সর্বদাই ধনাত্মক হইবে?

8. x এর কোন্ কোন্ বাস্তব মানের জন্য x^2-4x+1 এর মান সর্বদাই ধনাত্মক হইবে?

9. x যে কোন বাস্তব রাশি হইলে দেখাও যে, $4(a-x)(x-a+\sqrt{a^2+b^2})$ এর মান কখনই a^2+b^2 এর অধিক হইবে না। [Joint Ent. Ex. 1971]

10. $5x^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α এবং β হইলে দেখাও যে,

$$5x^2+bx+c=5(x-\alpha)(x-\beta)$$

এবং আরও দেখাও যে, x এর যে কোন বাস্তব মানের জন্য $5x^2+bx+c$ এর মান কখনই ঋণাত্মক হইবে না যদি

(i) α এবং β বাস্তব ও সমান হয়,

অথবা, (ii) α এবং β প্রতিযোগী অবাস্তব হয়। [H. S. 1972]

11. দেখাও যে, $x^2+2bx+c^2 >$ বা $=$ বা $<$ $(x+b)^2$ যদি $x^2+2bx+c^2=0$ এর বীজদ্বয় যথাক্রমে অবাস্তব অথবা সমান অথবা বাস্তব এবং অসমান হয়।

12. $3x^2+2(p+q+r)x+(pq+qr+rp)$ একটি পূর্ণবর্গ রাশি হইলে দেখাও যে, $p=q=r$. [H. S. 1971]

13. $x^2+2(a+b+c)x+3(ab+bc+ca)$ একটী পূর্ণবর্গ রাশি হইলে দেখাও যে $a=b=c$. [Joint Ent. Ex. 1975]

14. $(c^2-ab)x^2+2(a^2-bc)x+(b^2-ca)$ একটি পূর্ণবর্গ রাশি হইলে দেখাও যে, $a=0$, বা $a=b=c$, অথবা $a+b+c=0$.

15. x এর মান বাস্তব হইলে, $\dfrac{x^2-2x+2}{x^2+3x+9}$ রাশিটির লঘিষ্ঠ এবং গরিষ্ঠ মান বাহির কর। [**H. S. Comp. 1975**]

16. দেখাও যে, x এর সমুদয় বাস্তব মানের জন্য $\dfrac{x^2+34x-71}{x^2+2x-7}$ এর মান 5 এবং 9 এর মধ্যে থাকিতে পারে না। [**H. S. 1962 ; P. U. 1972**]

17. দেখাও যে, x এর সমুদয় বাস্তব মানের জন্য $\dfrac{x^2-3x+4}{x^2+3x+4}$ সর্বদাই $\frac{1}{7}$ এবং 7 এর মধ্যে থাকিবে। [**Cal. Int. 1940 ; P. U. 1965**]

18. দেখাও যে, x যে কোন বাস্তব রাশি হইলে $\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x-2)(x+4)}$ এর মান কখনই $\frac{4}{9}$ এবং 1 এর মধ্যে থাকিবে না।

19. x এর সমুদয় বাস্তব মানের জন্য $\dfrac{x^2-4x+9}{x^2+4x+9}$ এর সকল মান যে দুইটি সীমানার মধ্যে থাকিবে তাহা নির্ণয় কর। [**Cal. Int. 1948**]

20. দেখাও যে, x এর সমুদয় বাস্তব মানের জন্য $\dfrac{x}{x^2-5x+9}$ সর্বদাই $-\frac{1}{11}$ এবং 1 মধ্যবর্তী হইবে। [**C. U. 1953**]

21. দেখাও যে, x এর সমুদয় বাস্তব মানের জন্য $\dfrac{2x^2+4x+1}{x^2+4x+2}$ এর মান যাবতীয় বাস্তব মান হইতে পারে। [**Cal. Int. 1947**]

22. a, b, c বাস্তব রাশি এবং $a>b>c$ হইলে দেখাও যে, x এর যে, কোন বাস্তব মানের জন্য $\dfrac{(x-a)(x-c)}{(x-b)}$ এর মান যে কোন বাস্তব রাশি হইতে পারে।

23. দেখাও যে, $2x^2-3y^2-5xy+7x-7y+6$ রাশিমালাটিকে x এবং y এর এক ঘাত বিশিষ্ট দুইটি মূলদ উৎপাদকে প্রকাশ করা যাইবে এবং সেই উৎপাদক দুইটি নির্ণয় কর।

24. $x^2+pxy+\frac{1}{2}y^2+3x+2y+2$ কে দুইটি এক ঘাত বিশিষ্ট মূলদ উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা সম্ভব হইলে p এর মান বাহির কর এবং উৎপাদক দুইটি নির্ণয় কর।

25. $ax^2+by^2+2gx+2fy+c$ রাশিমালাকে দুইটি একঘাত বিশিষ্ট উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা সম্ভব হইলে দেখাও যে, $abc=af^2+bg^2$.

26. a, b, c মূলদ রাশি হইলে এবং $ax^2+by^2+cz^2+2ayz+2bzx+2cxy$ রাশিমালাটিকে x, y, z এর একঘাত বিশিষ্ট দুইটি উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা সম্ভব হইলে দেখাও যে, $a=b=c$ অথবা $a+b+c=0$.

পঞ্চম অধ্যায়

সমান্তর প্রগতি ও গুণোত্তর প্রগতি

(Arithmetical Progression & Geometrical Progression)

5-1. উপস্থাপন।

কোন নির্দিষ্ট নিয়মে একটির পর একটি পরপর কতকগুলি রাশি পাওয়া গেলে ঐ রাশিগুলি ঐ নিয়মে একটি **শ্রেণী** (Series) গঠন করিয়াছে বলা হয় এবং উহার প্রত্যেকটি রাশিকে ঐ শ্রেণীর এক একটি **পদ** (term) বলা হয়। যেমন,

(i) 1, 2, 3, 4, 5,...... ;

(ii) 2, 4, 6, 8, 10,......

(iii) 1, 3, 5, 7, 9,......

(iv) 9, 7, 5, 3, 1,......

(v) $-10, -8, -6, -4, \ldots\ldots$

(i) এখানে যে কোন পদের সহিত 1 যোগ করিলে ঠিক তাহার পরবর্তী পদটি পাওয়া যায়। (ii) এবং (iii)-তে যে কোন পদের সহিত 2 যোগ করিলে ঠিক তাহার পরবর্তী পদটি পাওয়া যায়। (iv) এখানে, যে কোন পদের সহিত -2 যোগ করিলে ঠিক তাহার পরবর্তী পদটি পাওয়া যায়। এখানে যে কোন পদের সহিত 2 যোগ করিলে ঠিক তাহার পরবর্তী পদটি পাওয়া যায়।

5-2. সমান্তর প্রগতি।

কোন শ্রেণীর পদগুলি যদি এরূপ হয় যে, উহার অন্তর্গত যে কোন পদ (প্রথম পদ ভিন্ন) হইতে উহার ঠিক পূর্ববর্তী পদটি বিয়োগ করিলে অন্তরফল সর্বদা সমান থাকে, তখন ঐ শ্রেণীর পদগুলি **সমান্তর প্রগতিতে** (in Arithmetical Progression, অর্থাৎ in A.P.) আছে বলা হয়, এবং ঐ সমান অন্তরকে ঐ শ্রেণীর **সাধারণ অন্তর** (common difference) বলা যায়। যেমন,

3, 5, 7, 9, ...

পদগুলি সমান্তর প্রগতিতে আছে এবং এই শ্রেণীর সাধারণ অন্তর 2 ; কারণ $5-3=2$; $7-5=2$; $9-7=2$; ইত্যাদি,

সাধারণভাবে,

$$a,\ a+b,\ a+2b,\ a+3b, \ldots\ldots$$

পদগুলি সমান্তর প্রগতিতে আছে, যেখানে **প্রথম পদ** a এবং **সাধারণ অন্তর** b.

বিশেষ দ্রষ্টব্য :

(i) $a-b, a, a+b$ রাশি তিনটি সমান্তর প্রগতিতে আছে।

(ii) $a-3b, a-b, a+b, a+3b$ রাশি চারটি সমান্তর প্রগতিতে আছে।

(iii) $a-2b, a-b, a, a+b, a+2b$ রাশি পাঁচটি সমান্তর প্রগতিতে আছে।

(iv) a, b, c, d, e, f রাশি ছয়টি সমান্তর প্রগতিতে থাকিলে,

$b-a=c-b=d-c=e-d=f-e=$ সাধারণ অন্তর।

5-3. সমান্তর শ্রেণীর n-তম পদ নির্ণয়।

সাধারণভাবে,

$a, a+b, a+2b, a+3b, \cdots\cdots$

এই রাশিগুলি সমান্তর প্রগতিতে আছে, যেখানে,

প্রথম পদ $=a$ এবং সাধারণ অন্তর $=b$.

ইহার n-তম পদটি t_n দ্বারা সাধারণভাবে সূচিত করা হইয়া থাক। সুতরাং,

$t_1=$ প্রথম পদ $=a=a+(1-1)b$;

$t_2=$ দ্বিতীয় পদ $=a+b=a+(2-1)b$;

$t_3=$ তৃতীয় পদ $=a+2b=a+(3-1)b$; ইত্যাদি।

$\therefore\ t_n=n$-তম পদ $=a+(n-1)b$.

মন্তব্য : কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ a, সাধারণ অন্তর b এবং n-তম পদ l হইলে,

$$l=a+(n-1)b.$$

5-4. কোন সমান্তর শ্রেণীর দুইটি পদ হইতে সমান্তর শ্রেণীটি নির্ণয়।

মনে করি, কোন একটি সমান্তর শ্রেণীর p-তম পদ এবং q-তম পদ যথাক্রমে h এবং k জানা আছে। ধরি, ঐ শ্রেণীটি,

$$a,\ a+b,\ a+2b,\ a+3b.\ \cdots\cdots$$

তাহা হইলে,

$$h=t_p=a+(p-1)b \qquad \cdots \quad (1)$$

$$k=t_q=a+(q-1)b \qquad \cdots \quad (2)$$

$(1)-(2)$ হইতে পাই,

$$h-k=(p-q)b. \quad \therefore \quad b=\frac{h-k}{p-q} \qquad \cdots \quad (3)$$

স্থতরাং (1) ও (3) হইতে,

$$a = h - (p-1)b = h - \frac{(p-1)(h-k)}{p-q}$$

$$= \frac{k(p-1) - h(q-1)}{p-q} \qquad \cdots \qquad (4)$$

(4) ও (3)-তে a এবং b কে, h, k, p ও q তে প্রকাশিত করায় উহাদের জানা গেল। স্থতরাং সমান্তর শ্রেণীটি সম্পূর্ণভাবে জানা গেল।

5-5 সমান্তরীয় মধ্যক নির্ণয়।

[1] যদি তিনটি রাশি সমান্তর প্রগতিতে (in A.P.) থাকে তবে মধ্যবর্তী পদটিকে প্রথম এবং তৃতীয় পদের **সমান্তরীয় মধ্যক** (Arithmetic mean বা A.M.) বলা হয়।

যেমন, 5, 7, 9 পদ তিনটি সমান্তর প্রগতিতে আছে; এখানে 5 এবং 9 এর সমান্তরীয় মধ্যক 7.

মনে করি, a এবং b দুইটি নির্দিষ্ট রাশি। উহাদের সমান্তরীয় মধ্যক নির্ণয় করিতে হইবে। মনে করি, উহাদের সমান্তরীয় মধ্যক x. তাহা হইলে a, x, b পদ তিনটি সমান্তরীয় প্রগতিতে আছে। স্থতরাং

$$x - a = b - x \quad \text{বা} \quad 2x = a + b$$

$$\therefore \quad x = \frac{a+b}{2}$$

স্থতরাং, $\boldsymbol{a}$ এবং $\boldsymbol{b}$ এর **সমান্তরীয় মধ্যক** $= \dfrac{\boldsymbol{a+b}}{\boldsymbol{2}}$

[2] কতিপয় রাশি একটি সমান্তর প্রগতিতে থাকিলে প্রথম ও শেষ পদের মধ্যবর্তী পদগুলিকে প্রথম ও শেষ পদের সমান্তরীয় মধ্যক (Arithmetic means) বলা হয়।

যেমন, 2, 5, 8, 11, 14, 17 পদগুলি সমান্তর প্রগতিতে আছে; প্রথম পদ = 2, শেষ পদ = 17; 5, 8, 11, 14 এই চারিটি পদ 2 এবং 17 এর সমান্তরীয় মধ্যক।

মনেকরি, a এবং b দুইটি নির্দিষ্ট রাশি। উহাদের মধ্যবর্তী n-সংখ্যক সমান্তরীয় মধ্যক নির্ণয় করিতে হইবে।

মনে করি, $x_1, x_2, x_3 \cdots\cdots x_n$ রাশিগুলি নির্ণেয় n-সংখ্যক সমান্তরীয় মধ্যক। তাহা হইলে, $a, x_1, x_2, x_3 \cdots x_n, b$ এই $(n+2)$ সংখ্যক রাশিগুলি সমান্তর প্রগতিতে থাকিবে; এবং প্রথম পদ $= a$; শেষ পদ অর্থাৎ $(n+2)$ তম পদ $= b$।

মনে করি, সাধারণ অন্তর $= d$,

তাহা হইলে, $\quad b = (n+2)$-তম পদ $= a + (n+2-1)d$

বা, $(n+1)d = b - a$

$$\therefore \quad d = \frac{b-a}{n+1}$$

$$\therefore \quad x_1 = a + d = a + \frac{b-a}{n+1};$$

$$x_2 = a + 2d = a + \frac{2(b-a)}{n+1};$$

$$x_3 = a + 3d = a + \frac{3(b-a)}{n+1};$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$x_{n-1} = a + (n-1)d = a + \frac{(n-1)(b-a)}{n+1};$$

$$x_n = a + nd = a + \frac{n(b-a)}{n+1}.$$

5-6. সমান্তর শ্রেণীর কতিপয় ধর্ম।

কোন সমান্তর শ্রেণীর (i) প্রত্যেক পদের সহিত একই রাশি যোগ করিলে ; বা (ii) প্রত্যেক পদ হইতে একই রাশি বিয়োগ করিলে ; বা (iii) প্রত্যেক পদকে একই রাশিদ্বারা গুণ করিলে ; বা (iv) প্রত্যেক পদকে একই রাশি দ্বারা ভাগ করিলে উৎপন্ন শ্রেণীগুলি এক একটি সমান্তর শ্রেণী হইবে।

মনে করি, কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তব b ; তাহা হইলে সমান্তর শ্রেণীটি ঃ

$$a, a+b, a+2b, a+3b, \cdots\cdots$$

(i) এই শ্রেণীর প্রত্যেক পদের সহিত k যোগ করিয়া পাই,

$$a+k, a+b+k, a+2b+k, a+3b+k, \cdots\cdots$$

অর্থাৎ, $(a+k), (a+k)+b, (a+k)+2b, (a+k)+3b, \cdots\cdots$

ইহা একটি সমান্তর শ্রেণী, কারণ ইহার প্রথম পদ $a+k$, এবং সাধারণ অন্তর b.

(ii) প্রদত্ত শ্রেণীর প্রত্যেক পদ হইতে k বিয়োগ করিয়া পাই,

$$(a-k), (a-k)+b, (a-k)+2b, (a-k)+3b, \cdots\cdots$$

এখানে, ইহার প্রথম পদ $(a-k)$ এবং সাধারণ অন্তর b ; সুতরাং উৎপন্ন শ্রেণীটি একটি সমান্তর শ্রেণী।

(iii) প্রদত্ত শ্রেণীর প্রত্যেক পদকে k দ্বারা গুণ করিয়া পাই,

$$(ak), (ak)+(bk), (ak)+2(bk), (ak)+3(bk), \cdots\cdots$$

ইহার প্রথম পদ ak এবং সাধারণ অন্তর bk. সুতরাং, উৎপন্ন শ্রেণীটি একটি সমান্তর শ্রেণী।

(iv) প্রদত্ত শ্রেণীর প্রত্যেক পদকে k দ্বারা ভাগ করিয়া পাই, $(k \neq 0)$,

$$\frac{a}{k}, \frac{a}{k}+\frac{b}{k}, \frac{a}{k}+2\left(\frac{b}{k}\right), \frac{a}{k}+3\left(\frac{b}{k}\right), \cdots\cdots$$

এখানে ইহার প্রথম পদ $\frac{a}{k}$, এবং সাধারণ অন্তর $\frac{b}{k}$. সুতরাং, উৎপন্ন শ্রেণীটি একটি সমান্তর শ্রেণী।

উদাহরণ 1. একটি সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ 2 এবং 20-তম পদ 59. ঐ শ্রেণীর 32-তম পদটি নির্ণয় কর।

মনে করি, শ্রেণীটির প্রথম পদ $= a$, এবং সাধারণ অন্তর $= b$.

তাহা হইলে, $a = 2$;

20-তম পদ $= a + (20-1)b = a + 19b$.

$\therefore \quad 59 = a + 19b$.

বা, $59 = 2 + 19b, \quad \therefore \quad b = 3$

$\therefore$ 32-তম পদ $= a + (32-1)b$

$= a + 31b$

$= 2 + 31 \times 3 = 95$.

উদাহরণ 2. 12, 10, 8, 6, …… শ্রেণীর কোন্ পদটি -12 হইবে?

এখানে প্রথম পদ $= 12$; সাধারণ অন্তর $= 10 - 12 = -2$.

মনে করি, r-তম পদটি $= -12$ অর্থাৎ $t_r = -12$

কিন্তু r-তম পদ $= t_r = 12 + (r-1) \times (-2)$

$= 14 - 2r$.

$\therefore \quad 14 - 2r = -12$

বা, $2r = 26, \quad \therefore \quad r = 13$

সুতরাং, নির্ণেয় উত্তর : 13-তম পদ।

উদাহরণ 3. 10, 4, -2, -8, …… শ্রেণীটির কোন্ পদটি -102?

শ্রেণীটির প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর b হইলে,

$a = 10; \quad b = 4 - 10 = -6$.

মনে করি. n-তম পদ $= -102$;

কিন্তু, n-তম পদ $= a + (n-1)b$

$$= 10 + (n-1) \times (-6)$$

$$= 16 - 6n.$$

$\therefore \quad 16 - 6n = -102$

বা, $6n = 118$,

অর্থাৎ, $n = 19\frac{2}{3}$.

যেহেতু পদসংখ্যা কখনও ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক হইতে পারে না, সুতরাং, প্রদত্ত শ্রেণীটির কোন পদই -102 হইতে পারে না।

উদাহরণ 4. যে সমান্তর শ্রেণীর চতুর্থ পদ 10 এবং নবম পদ 25, তাহা নির্ণয় কর।

মনে করি, প্রথম পদ $= a$; সাধারণ অন্তর $= b$. তাহা হইলে,

$$t_4 = a + 3b \; ; \; t_9 = a + 8b.$$

কিন্তু প্রদত্ত শর্তানুসারে,

$$t_4 = 10 \; ; \; t_9 = 25.$$

$\therefore \quad a + 8b = 25 \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$

$a + 3b = 10 \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$

এখন, (1)—(2) হইতে পাই,

$5b = 15$, বা, $b = 3$;

এবং (2) হইতে পাই

$a + 3 \times 3 = 10$; বা, $a = 1$.

সুতরাং, নির্ণেয় শ্রেণীটি ঃ

1, 4, 7, 10, 13, ...

উদাহরণ 5. কোন একটি সমান্তর শ্রেণীর p-তম পদ c, এবং q-তম পদ d. ঐ শ্রেণীটির r-তম পদ কত ?

মনে করি, শ্রেণীটির প্রথম পদ $= a$; সাধারণ অন্তর $= b$.

তাহা হইলে, p-তম পদ $= a + (p-1)b$;

q-তম পদ $= a + (q-1)b$;

$\therefore \quad a + (p-1)b = c \quad \cdots \quad (1)$

$a + (q-1)b = d \quad \cdots \quad (2)$

(1)—(2) হইতে পাই,

$$(p-q)b=(c-d)$$

বা, $$b=\frac{c-d}{p-q} \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

এখন, (1) এবং (3) হইতে পাই,

$$a=c-(p-1)b$$
$$=c-\frac{(p-1)(c-d)}{p-q}$$
$$=\frac{d(p-1)-c(q-1)}{p-q} \quad \cdots \quad (4)$$

$\therefore$ r-তম পদ $=a+(r-1)b$

$$=\frac{d(p-1)-c(q-1)}{p-q}+(r-1)\ \frac{(c-d)}{p-q}$$
$$=\frac{d(p-r)-c(q-r)}{p-q}.$$

উদাহরণ 6. 8 এবং 68 এর মধ্যে 4টি সমান্তরীয় মধ্যক সংস্থাপন কর।

মনে করি, সমান্তরীয় মধ্যকগুলি যথাক্রমে x_1, x_2, x_3, x_4 ;

তাহা হইলে

$$8, x_1, x_2, x_3, x_4, 68$$

রাশিগুলি সমান্তরীয় প্রগতিতে আছে।

তাহা হইলে, প্রথম পদ $=8$, এবং ষষ্ঠ পদ $=68$.

ধরি, সাধারণ অন্তর $=b$.

$\therefore\ 8+(6-1)b=68$,

বা, $5b=60$, বা, $b=12$.

স্থতরাং, $x_1=$ দ্বিতীয় পদ $=8+(2-1)\times 12=20$;

$x_2=$ তৃতীয় পদ $=8+(3-1)\times 12=32$;

$x_3=$ চতুর্থ পদ $=8+(4-1)\times 12=44$;

$x_4=$ পঞ্চম পদ $=8+(5-1)\times 12=56$.

স্থতরাং, নির্ণেয় মধ্যকগুলি ক্রমান্বয়ে :

20, 32, 44, 56.

উদাহরণ 7. 13 এবং 33 মধ্যে n-সংখ্যক সমান্তরীয় মধ্যক আছে। যদি দ্বিতীয় ও ষষ্ঠ মধ্যকদ্বয়ের অনুপাত 9 : 14 হয় তবে, n এর মান নির্ণয় কর।

13 এবং 33 এর মধ্যে n-সংখ্যক সমান্তরীয় মধ্যক থাকিলে, ঐ পদগুলি যে শ্রেণী গঠন করে তাহার প্রথম পদ 13 এবং $(n+2)$-তম পদ 33.

মনে করি, ঐ শ্রেণীর সাধারণ অন্তর $=b$.

$\therefore$ দ্বিতীয় মধ্যক = তৃতীয় পদ $=13+(3-1)b=13+2b$,

ষষ্ঠ মধ্যক = সপ্তম পদ $=13+(7-1)b=13+6b$.

প্রদত্ত শর্তানুসারে,

$(13+2b):(13+6b)=9:14$

বা, $(13+2b)\times 14=(13+6b)\times 9$

বা, $26b=65$; $\therefore\ b=5/2$

এখন, $(n+2)$-তম পদ $=33$

বা, $13+(n+2-1)b=33$

বা, $(n+1)b=20$

বা, $(n+1)\times 5/2=20$, $\therefore\ n=7$

$\therefore$ নির্ণেয় উত্তর : $n=7$.

উদাহরণ 8. তিনটি সংখ্যা সমান্তরীয় প্রগতিতে আছে। তাহাদের যোগফল 33 এবং গুণফল 1287 হইলে সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর।

মনে করি, সংখ্যা তিনটি : $a-b, a, a+b$,

যাহারা সমান্তরীয় প্রগতিতে আছে। তাহা হইলে প্রদত্ত শর্তানুসারে,

$a-b+a+a+b=33$

বা, $3a=33$ বা, $a=11$

এবং $(a-b)a(a+b)=1287$

বা, $(a^2-b^2)a=1287$

$\therefore\ (121-b^2)\times 11=1287$

বা, $121-b^2=117$

বা, $b^2=4$; $\therefore\ b=\pm 2$.

$b=2$ হইলে, সংখ্যাটি তিনটি :

$11-2, 11, 11+2$; অর্থাৎ, 9, 11, 13,

আবার, $b=-2$ হইলে, সংখ্যা তিনটি :

$11+2, 11, 11-2$; অর্থাৎ 13, 11, 9.

উদাহরণ 9. 69 সংখ্যাটিকে এরূপ তিনটি অংশে বিভক্ত কর যেন, অংশগুলি সমান্তর প্রগতি গঠন করে এবং তাহাদের প্রথম দুইটির গুণফল 483 হয়।

মনে করি, অংশত্রয় যথাক্রমে $a-b, a, a+b$.

সুতরাং শর্তানুসারে,

$a-b+a+a+b=69$

বা, $3a=69$; $\therefore$ $a=23$;

এবং $(a-b)a=483$

বা, $(23-b)\times 23=483$ $\therefore$ $b=2$

সুতরাং, অংশত্রয় : 21, 23, 25.

উদাহরণ 10. কোন সমান্তরীয় শ্রেণীর p-তম, q-তম এবং r-তম পদ যথাক্রমে a, b, c হইলে, প্রমাণ কর যে,

$a(q-r)+b(r-p)+c(p-q)=0$ [**C. U. 1946**]

মনে করি, প্রথম পদ $=x$ এবং সাধারণ অন্তর $=y$. তাহা হইলে

$x+(p-1)y=a$ ··· (1)

$x+(q-1)y=b$ ··· (2)

$x+(r-1)y=c$ ··· (3)

এখন, (1)—(2) হইতে পাই

$(p-q)y=a-b$ ··· (4)

এবং (2)—(3) হইতে পাই,

$(q-r)y=b-c$ ··· (5)

সুতরাং, $(4)\div(5)$ হইতে পাই

$$\frac{p-q}{q-r}=\frac{a-b}{b-c}.$$

বা, $a(q-r)+b(r-p)+c(p-q)=0.$

উদাহরণ 11. a^2, b^2, c^2 সমান্তরীয় প্রগতিতে থাকিলে, দেখাও যে,

$\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ সমান্তরীয় প্রগতিতে থাকিবে।

a^2, b^2, c^2 সমান্তরীয় প্রগতিতে আছে বলিয়া,

$b^2-a^2=c^2-b^2$

বা, $(b-a)(b+a)=(c-b)(c+b)$

বা, $$\frac{(b-a)(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{(c-b)(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

বা, $\dfrac{b-a}{(b+c)(c+a)}=\dfrac{c-b}{(a+b)(c+a)}$

বা, $\dfrac{(b+c)-(c+a)}{(b+c)(c+a)}=\dfrac{(c+a)-(a+b)}{(a+b)(c+a)}$

বা, $\dfrac{1}{c+a}-\dfrac{1}{b+c}=\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{1}{c+a}$

অর্থাৎ, $\dfrac{1}{b+c}, \dfrac{1}{c+a}, \dfrac{1}{a+b}$ সমান্তরীয় প্রগতিতে আছে।

দ্বিতীয় প্রণালী ঃ

a^2, b^2, c^2 সমান্তরীয় প্রগতিতে আছে।

$\therefore\ a^2+ab+bc+ca,\ \ b^2+ab+bc+ca,\ \ c^2+ab+bc+ca$ সমান্তরীয় প্রগতিতে থাকিবে।

অর্থাৎ, $(a+b)(c+a), (b+c)(a+b), (c+a)(b+c)$ সমান্তরীয় প্রগতিতে থাকিবে।

অর্থাৎ, প্রত্যেক পদকে $(a+b)(b+c)(c+a)$ দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

$\dfrac{1}{b+c}, \ \dfrac{1}{c+a}, \ \dfrac{1}{a+b}$ সমান্তরীয় প্রগতিতে থাকিবে।

উদাহরণ 12. $a_1, a_2, a_3 \cdots\cdots a_n$ রাশিগুলি সমান্তরীয় প্রগতিতে থাকিলে দেখাও যে,

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_{n-1}\,a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}.$$

মনে করি, প্রদত্ত সমান্তরীয় শ্রেণীটির সাধারণ অন্তর b. তাহা হইলে,

$a_2-a_1=b\ ;\ a_3-a_2=b\ ,\ldots\ldots,\ \ a_n-a_{n-1}=b.$

উভয় পক্ষগুলি যোগ করিয়া পাই,

$(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots\cdots+(a_n-a_{n-1})=(n-1)b$

বা, $a_n-a_1=(n-1)b.$

এখন, $\left(\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_2}\right)+\left(\dfrac{1}{a_2}-\dfrac{1}{a_3}\right)+\cdots\cdots+\left(\dfrac{1}{a_{n-1}}-\dfrac{1}{a_n}\right)=\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_n}$

বা, $\dfrac{a_2-a_1}{a_1a_2}+\dfrac{a_3-a_2}{a_2a_3}+\cdots\cdots+\dfrac{a_n-a_{n-1}}{a_{n-1}\,a_n}=\dfrac{a_n-a_1}{a_1a_n}$

বা, $\dfrac{b}{a_1a_2}+\dfrac{b}{a_2a_3}+\cdots\cdots+\dfrac{b}{a_{n-1}\,a_n}=\dfrac{(n-1)b}{a_1a_n}$

বা, $\dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{a_{n-1}\,a_n}=\dfrac{n-1}{a_1\,a_n}$

প্রশ্নমালা 14

1. প্রদত্ত শ্রেণীগুলির 15-তম পদটি নির্ণয় কর :

(*i*) 2, 6, 10, 14, ··· ···

(*ii*) 7, 12, 17, 22, ··· ···

(*iii*) 10, 7, 4, 1, ··· ···

(*iv*) 5, $7\frac{1}{2}$, 10, $12\frac{1}{2}$, ··· ···

2. একটি সমান্তরীয় শ্রেণীর প্রথম পদ 5 এবং চতুর্থ পদ 17 ; উহার দশম পদটি কত ?

3. একটি সমান্তরীয় শ্রেণীর প্রথম পদ 16 এবং সপ্তম পদ −14. ঐ শ্রেণীটির 25-তম পদটি কত ?

4. কোন একটি সমান্তরীয় শ্রেণীর একাদশ পদ ও 25-তম পদ যথাক্রমে 23 এবং 65. ঐ শ্রেণীটি নির্ণয় কর।

5. একটি সমান্তরীয় শ্রেণীর 31-তম পদ −77 এবং প্রথম পদ 13 ; ঐ শ্রেণীটি এবং উহার দশম পদটি নির্ণয় কর।

6. 5, 8, 11, 14,······শ্রেণীর কোন্ পদটি 62 ?

7. 10, 4, −2, −8,······শ্রেণীর কোন্ পদটি −104 ?

8. 9, $6\frac{1}{2}$, 4, $1\frac{1}{2}$,······শ্রেণীর কোন্ পদটি −60 ?

9. একটি সমান্তরীয় শ্রেণীর m-তম পদ n এবং n-তম পদ m. উহার p-তম পদ কত ? [**C. U. 1947**]

10. একটি সমান্তরীয় শ্রেণীর p-ম পদ q, এবং q-তম পদ p. ঐ শ্রেণীর r-তম পদ, $(p+q)$-তম পদ ও 50-তম পদ নির্ণয় কর।

11. নিম্নে প্রদত্ত সংখ্যাদ্বয়ের সমান্তরীয় মধ্যক নির্ণয় কর :

(*i*) 9, 17 ; (*i*) 12, −32 ; (*iii*) $5\frac{1}{4}$, $7\frac{3}{4}$;

(*iv*) $a+b, b+c$; (*v*) $(a+b)(x+y), (a-b)(x-y)$

12. 14 এবং 38 এর মধ্যে তিনটি সমান্তরীয় মধ্যক সংস্থাপন কর।

13. 2 এবং 57 এর মধ্যে 10টি সমান্তরীয় মধ্যক নির্ণয় কর।

14. 14 এবং 38 এর মধ্যে n-সংখ্যক সমান্তরীয় মধ্যক আছে। দ্বিতীয় মধ্যক ও শেষ মধ্যকের অনুপাত 4 : 7 হইলে n এর মান নির্ণয় কর।

15. চারটি সংখ্যা সমান্তরীয় প্রগতিতে আছে। উহাদের প্রান্তিক সংখ্যাদ্বয়ের সমষ্টি 10 এবং মধ্যকদ্বয়ের গুণফল 24. সংখ্যাগুলি নির্ণয় কর। [**C. U. 1943**]

16. 5টি সংখ্যা সমান্তরীয় প্রগতিতে আছে। উহাদের সমষ্টি 20 এবং উহাদের বর্গগুলির সমষ্টি 90 হইলে, সংখ্যাগুলি নির্ণয় কর।

17. যে ছয়টি সংখ্যা সমান্তরীয় প্রগতিতে আছে তাহাদের সমষ্টি 345 এবং প্রথম ও শেষ পদের তফাৎ 55. সংখ্যা ছয়টি নির্ণয় কর। **[H. S. 1976]**

18. একটি সমান্তরীয় শ্রেণীর p-তম, q-তম এবং r-তম পদগুলি যথাক্রমে P, Q, R. দেখাও যে, $p(Q-R)+q(R-P)+r(P-Q)=0$. **[H. S. 1975]**

19. কোন সমান্তরীয় শ্রেণীর r-তম t_r হইলে এবং $t_4 : t_7 = 2 : 3$ হইলে, $t_6 : t_8$ এর মান বাহির কর।

20. a, b, c, রাশি তিনটি $A.\ P.$ তে থাকিলে দেখাও যে,

$$(a+2b-c)(2b+c-a)(c+a-b)=4abc$$

21. a, b, c রাশি তিনটি সমান্তরীয় প্রগতিতে থাকিলে দেখাও যে,

(i) $b+c,\ c+a,\ a+b$

(ii) $b+c-a,\ c+a-b,\ a+b-c$

(iii) $(b+c)^2-a^2,\ (c+a)^2-b^2,\ (a+b)^2-c^2$

(iv) $\frac{1}{bc},\ \frac{1}{ca},\ \frac{1}{ab}$

রাশিগুলিও সমান্তরীয় প্রগতিতে থাকিবে।

22. $\frac{a}{b+c},\ \frac{b}{c+a},\ \frac{c}{a+b}$ রাশি তিনটি সমান্তরীয় প্রগতিতে থাকিলে দেখাও যে, $\frac{1}{b+c},\ \frac{1}{c+a},\ \frac{1}{a+b}$ রাশিগুলি সমান্তরীয় প্রগতিতে থাকিবে, যেখানে $a+b+c\neq 0$.

23. $\frac{b+c}{a},\ \frac{c+a}{b},\ \frac{a+b}{c}$ রাশি তিনটি $A.\ P.$ তে থাকিলে, $\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}$ রাশি তিনটিও $A.\ P.$ তে থাকিবে; $a+b+c\neq 0$.

24. $(b-c)^2,\ (c-a)^2,\ (a-b)^2$ রাশিত্রয় সমান্তরীয় প্রগতিতে থাকিলে, $\frac{1}{b-c},\ \frac{1}{c-a},\ \frac{1}{a-b}$ রাশিত্রয় সমান্তরীয় প্রগতিতে থাকিবে।

25. $a,\ b,\ c,\ d$ রাশি চারিটি যদি এরূপ হয় যে, $a+c=2b$, এবং $ab+cd+ad=3bc$ তাহা হইলে, রাশি চারিটি সমান্তরীয় প্রগতিতে থাকিবে।

26. $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় সমান হইলে, দেখাও যে, a, b, c রাশিত্রয় সমান্তরীয় প্রগতিতে থাকিবে।

27. $a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots\cdots a_n$ রাশিগুলি যদি এরূপ হয় যে,

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}\cdots\cdots+\frac{1}{a_{n-1}\,a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}$$

n-এর যে কোন মানের জন্য (যেখানে $n\geqslant 3$), তাহা হইলে ঐ রাশিগুলি সমান্তরীয় প্রগতিতে থাকিবে। **[Joint Ent. Ex. 1976]**

5-7. সমান্তর শ্রেণীর যোগফল নির্ণয়।

মনে করি, কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথমপদ a, সাধারণ অন্তর b এবং n-তম পদ l.

তাহা হইলে, $l=a+(n-1)b$ এবং শ্রেণীটি

$$a, a+b, a+2b, \ldots\ldots, (l-b), l.$$

মনে করি, ঐ n-সংখ্যক পদের যোগফল S_n.

তাহা হইলে, $S_n=a+(a+b)+(a+2b)+\ldots\ldots+(l-b)+l \quad \ldots \quad (1)$

শ্রেণীটিকে উল্টাইয়া লিখিলে পাই,

$$S_n=l+(l-b)+(l-2b)+\ldots\ldots+(a+b)+a \quad \ldots \quad (2)$$

(1) এবং (2) এর উভয় পক্ষের অনুরূপ পদগুলি যোগ করিয়া পাই,

$2S_n=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\ldots\ldots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$=(a+l)\times n.$

$$\therefore \quad \boldsymbol{S_n=\frac{(a+l)\times n}{2}=\tfrac{1}{2}\{2a+(n-1)b\}\times n}$$

অর্থাৎ, $S_n=\frac{1}{2}$\{প্রথম পদ + শেষ পদ\} × পদ সংখ্যা।

উদাহরণ 1. $5+7+9+\ldots\ldots 50$-তম পদ পর্যন্ত সংখ্যাগুলির যোগফল নির্ণয় কর।

এখানে, প্রথম পদ $=5$; সাধারণ অন্তর $=7-5=2$;

50-তম পদ $=5+(50-1)\times 2=103$.

সুতরাং, প্রথম 50টি পদের যোগফল

$=\frac{1}{2}$\{প্রথম পদ + 50-তম পদ\} × 50

$=\frac{1}{2}\{5+103\}\times 50=2700.$

উদাহরণ 2. 10, 8, 6, 4,……শ্রেণীর প্রথম 36টি পদের যোগফল নির্ণয় কর।

এখানে, প্রথম পদ $=10$; সাধারণ অন্তর $=8-10=-2$;

36-তম পদ $=10+(36-1)\times(-2)=-60.$

নির্ণেয় যোগফল $=\frac{1}{2}$\{প্রথম পদ + 36-তম পদ\} × 36

$=\frac{1}{2}\{10+(-60)\}\times 36=-900.$

উদাহরণ 3. যোগফল নির্ণয় কর :

$$5+8+11+\ldots\ldots\ldots+80$$

এখানে, প্রথম পদ $=5$; সাধারণ অন্তর $=8-5=3$;

মনে করি, n-তম পদ $=80$;

তাহা হইলে, $5+(n-1)\times 3=80$; $\therefore \; n=26.$

$\therefore$ নির্ণেয় যোগফল $=\frac{1}{2}(5+80)\times 26=1105.$

উদাহরণ 4. সূত্রের সাহায্য ব্যতিরেকে 4, 7, 10, 13,......শ্রেণীটির প্রথম 33টি পদের যোগফল নির্ণয় কর।

এখানে, প্রথম পদ = 4 ; সাধারণ অন্তর = 3 ;

33-তম পদ $= 4 + (33 - 1) \times 3 = 100.$

মনে করি, নির্ণেয় যোগফল $= S$. তাহা হইলে,

$$S = 4 + 7 + 10 + \ldots\ldots + 97 + 100$$

$$S = 100 + 97 + 94 + \ldots\ldots + 7 + 4$$

∴ $2S = 104 + 104 + 104 + \ldots\ldots$ 33-সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$$= 104 \times 33$$

$$\therefore \quad S = \frac{104 \times 33}{2} = 1716.$$

উদাহরণ 5. $3 + 4 + 8 + 9 + 13 + 14 + 18 + 19 + \ldots\ldots$এর প্রথম 20টি পদের যোগফল নির্ণয় কর।

নির্ণেয় যোগফল $= (3 + 8 + 13 + 18 + \cdots\cdots$ 10-তম পদ পর্যন্ত)

$+ (4 + 9 + 14 + 19 + \cdots\cdots$ 10-তম পদ পর্যন্ত)

$$= \tfrac{1}{2}\{2 \times 3 + 9 \times 5\} \times 10$$

$$+ \tfrac{1}{2}\{2 \times 4 + 9 \times 5\} \times 10$$

$$= 255 + 265 = 520.$$

উদাহরণ 6. পর পর 25টি অযুগ্ম ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল নির্ণয় কর যেখানে শেষ পদটি 85.

এখানে, রাশিগুলি একটি সমান্তর প্রগতিতে আছে, যেখানে সাধারণ অন্তর = 2 ; শেষ পদ অর্থাৎ 25-তম পদটি = 85 ;

মনে করি, প্রথম পদ $= a$.

∴ $a + (25 - 1) \times 2 = 85$; বা, $a = 37$.

∴ নির্ণেয় যোগফল $= \tfrac{1}{2}\{37 + 85\} \times 25 = 1525.$

উদাহরণ 7. 750 এবং 1000 এর মধ্যবর্তী 13-এর গুণিতক স্বাভাবিক সংখ্যা-সমূহের যোগফল নির্ণয় কর।

13-এর গুণিতকসমূহ সমান্তর প্রগতিতে থাকিবে, যেখানে সাধারণ অন্তর 13. 750কে 13 দ্বারা ভাগ করিলে ভাগশেষ 9 থাকে। সুতরাং $750 - 9 + 13 = 750 + 4$ অর্থাৎ 754 সংখ্যাটি 13 দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য অর্থাৎ 13-এর গুণিতক। সুতরাং শ্রেণীটির প্রথম পদ 754.

আবার, 1000 কে 13 দ্বারা ভাগ করিলে ভাগশেষ 12 থাকে

অর্থাৎ $1000 = 76 \times 13 + 12$.

সুতরাং, শ্রেণীটির শেষ পদ $= 76 \times 13 = 988$.

মনে করি, n-তম পদ $= 988$.

$\therefore \quad 754 + (n-1) \times 13 = 988$

বা, $13n = 247$; বা, $n = 19$.

$\therefore$ নির্ণেয় যোগফল $= \frac{1}{2}\{754 + 988\} \times 19 = 16549$.

উদাহরণ 8. $3 + 5 + 7 + \cdots\cdots$এর কতগুলি পদের যোগফল 624 হইবে ?

এখানে, প্রথম পদ $= 3$; সাধারণ অন্তর $= 2$;

মনে করি, প্রথম n-সংখ্যক পদের যোগফল $= 624$.

এখন, n-তম পদ $= 3 + (n-1) \times 2 = 2n + 1$

$\therefore \quad \frac{1}{2}\{3 + (2n+1)\} \times n = 624$

বা, $n^2 + 2n - 624 = 0$

বা, $(n-24)(n+26) = 0$;

$\therefore \quad n = 24$ বা, -26.

শ্রেণীটির পদ সংখ্যা ঋণাত্মক বা ভগ্নাংশ হইতে পারে না বলিয়া, n-এর মান -26 হইবে না। সুতরাং, নির্ণেয় পদ সংখ্যা $= 24$.

উদাহরণ 9. $16, 14, 12, 10, \cdots$শ্রেণীর প্রথম n-সংখ্যক পদের যোগফল 60 হইলে n-এর মান নির্ণয় কর এবং n-এর দুইটি মান কেন হইবে তাহা যুক্তি সহকারে বুঝাও।

এখানে, প্রথম পদ $= 16$; সাধারণ অন্তর $= -2$;

n-তম পদ $= 16 + (n-1) \times (-2) = 18 - 2n$.

$\therefore \quad \frac{1}{2}\{16 + (18 - 2n)\} \times n = 60$.

বা, $n^2 - 17n + 60 = 0$

বা, $(n-5)(n-12) = 0$; $\therefore \quad n = 5, 12$.

পদ সংখ্যা 5 এবং 12 উভয়ই হইতে পারে; কারণ, শ্রেণীটির প্রথম 5টি পদ 16, 14, 12, 10, 8, যাহাদের যোগফল $= 60$; আবার, শ্রেণীটির প্রথম 12টি পদ 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 0, -2, -4, -6 যাহাদের যোগফল $= 60$; কারণ শেষ 7টি পদের যোগফল শূন্য।

উদাহরণ 10. কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম p, q, r সংখ্যক পদের সমষ্টি যথাক্রমে a, b, c হইলে দেখাও যে,

$$\frac{a}{p}(q-r)+\frac{b}{q}(r-p)+\frac{c}{r}(p-q)=0$$ [C. U. 1945]

মনে করি, সমান্তর শ্রেণীটির প্রথম পদ $=\alpha$, এবং সাধারণ অন্তর $=\beta$.

তাহা হইলে প্রদত্ত শর্ত হইতে,

$$\tfrac{1}{2}\{2\alpha+(p-1)\beta\}\times p=a\ ; \quad \therefore \quad \frac{a}{p}=\alpha+\tfrac{1}{2}(p-1)\beta\ ; \quad \cdots \quad (1)$$

$$\tfrac{1}{2}\{2\alpha+(q-1)\beta\}\times q=b\ ; \quad \therefore \quad \frac{b}{q}=\alpha+\tfrac{1}{2}(q-1)\beta\ ; \quad \cdots \quad (2)$$

$$\tfrac{1}{2}\{2\alpha+(r-1)\beta\}\times r=c\ ; \quad \therefore \quad \frac{c}{r}=\alpha+\tfrac{1}{2}(r-1)\beta\ ; \quad \cdots \quad (3)$$

$$\therefore \quad \frac{a}{p}(q-r)+\frac{b}{q}(r-p)+\frac{c}{r}(p-q)$$

$$=\alpha(q-r+r-p+p-q)$$

$$+\tfrac{1}{2}\beta\{(p-1)(q-r)+(q-1)(r-p)+(r-1)(p-q)\}$$

$$=\alpha\times 0+\tfrac{1}{2}\beta\times 0=0.$$

উদাহরণ 11. এক ব্যক্তি 3600 টাকার একটি ঋণ সমান্তরীয় প্রগতিতে বাৎসরিক 40টি কিস্তিতে পরিশোধ করিতে মনঃস্থ করিল। 30টি কিস্তি পরিশোধ করিবার পর যখন তিনি মারা গেলেন তখনও সমস্ত ঋণের এক-তৃতীয়াংশ পরিশোধ করিতে বাকী থাকিলে তিনি প্রথম কিস্তিতে কত টাকা পরিশোধ করিয়াছিলেন? [P. U. 1966]

3600 টাকার $\frac{2}{3}=2400$ টাকা ;

স্থতরাং, ঐ ব্যক্তি 30টি কিস্তিতে মোট 2400 টাকা পরিশোধ করিয়াছিলেন।

মনে করি, ঐ ব্যক্তি প্রথম কিস্তিতে a সংখ্যক টাকা পরিশোধ করিয়াছিলেন এবং দ্বিতীয় বারে $(a+b)$ সংখ্যক টাকা, তৃতীয় বারে $(a+2b)$ সংখ্যক টাকা, ইত্যাদি পরিশোধ করিয়াছিলেন।

তাহা হইলে, $\tfrac{1}{2}\{2a+(40-1)b\}\times 40=3600$

অর্থাৎ, $2a+39b=180 \quad \cdots \quad (1)$

এবং, $\tfrac{1}{2}\{2a+(30-1)b\}\times 30=2400$

অর্থাৎ, $2a+29b=160 \quad \cdots \quad (2)$

(1)—(2) হইতে পাই,

$10b=20, \quad \therefore \quad b=2 \quad \ldots \quad (3)$

স্থতরাং, (1) হইতে,

$2a+39\times 2=180, \quad \therefore \quad a=51 \quad \ldots \quad (4)$

স্থতরাং, নির্ণেয় উত্তর : 51 টাকা।

প্রশ্নমালা 15

1. সমষ্টি নির্ণয় কর :—

(i) $2+4+6+\cdots\cdots+50$;

(ii) $12+9+6+\cdots\cdots$30-তম পদ পর্যন্ত

(iii) $2+5+8+\cdots\cdots+152$ [**C. U. 1948**]

(iv) $4+7+10+\cdots\cdots$112টি পদ পর্যন্ত ;

(v) $3+3\frac{1}{4}+3\frac{1}{2}+\cdots\cdots$25টি পদ পর্যন্ত ;

(vi) $4\frac{1}{4}+5\frac{3}{4}+7\frac{1}{4}+\cdots\cdots$20টি পদ পর্যন্ত ;

(vii) $5\cdot5+4\cdot5+3\cdot5+\cdots\cdots$16টি পদ পর্যন্ত

(viii) $-10\frac{1}{2}, -9, -7\frac{1}{2}, \cdots\cdots$19টি পদ পর্যন্ত

(ix) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+\sqrt{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}+\cdots\cdots$20টি পদ পর্যন্ত ;

(x) $5\times5+4\times5+3\times5+\cdots\cdots$16টি পদ পর্যন্ত।

2. যোগফল নির্ণয় কর :—

(i) $5, 8, 11, \cdots\cdots n$-সংখ্যক পদের ;

(ii) $6, 4, 2, \cdots\cdots n$-সংখ্যক পদের ;

(iii) $(a-b)^2+(a^2+b^2)+(a+b)^2+\cdots\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত ;

(iv) $1+4+6+9+11+14+\cdots\cdots$24টি পদ পর্যন্ত ;

(v) $9+7+11+5+13+3+\cdots\cdots$25 পদ পর্যন্ত।

3. কোন সূত্রের সাহায্য না লইয়া প্রথম n-সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল নির্ণয় কর।

4. কোন সূত্রের সাহায্য না লইয়া যোগফল নির্ণয় কর :—

(i) $1+4+7+\cdots\ldots+37$ [**C. U. 1949**]

(ii) $1+3+5\cdots\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

5. দেখাও যে, 4, 12, 20, 28,......শ্রেণীর প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি একটি যুগ্ম সংখ্যার বর্গ। [**C. U. 1939**]

6. 8, 13, 18, 23,......শ্রেণীর প্রথম কতগুলি পদের যোগফল 305 হইবে ?

7. $42+35+28+21+\cdots\cdots n$-সংখ্যক পদের সমষ্টি 140 হইলে n এর মান নির্ণয় কর এবং n এর দুইটি মান কেন হইবে তাহার যুক্তি দেখাও।

8. পর পর 25টি অযুগ্ম সংখ্যার শেষ পদটি 501 হইলে উহাদের সমষ্টি কত ?

9. 200 এবং 500 এর মধ্যবর্তী অযুগ্ম সংখ্যাগুলির যোগফল নির্ণয় কর।

10. 50 এবং 500 এর মধ্যবর্তী 7 এর গুণিতক স্বাভাবিক সংখ্যাসমূহের যোগফল নির্ণয় কর।

11. 7, 10, 13,...... শ্রেণীটির দশম পদ হইতে আরম্ভ করিয়া পরপর 20টি পদের যোগফল নির্ণয় কর।

12. (*a*) 9 এবং 89 এর মধ্যবর্তী 18টি সমান্তরীয় মধ্যকের যোগফল নির্ণয় কর।

(*b*) 9 এবং 89 এর মধ্যবর্তী 19টি সমান্তরীয় মধ্যকের যোগফল নির্ণয় কর।

13. n-সংখ্যক সমান্তরীয় রাশিমালার প্রথম পদ a এবং শেষ পদ b ; a এবং b এর মধ্যবর্তী সমান্তরীয় মধ্যকগুলির যোগফল নির্ণয় কর।

14. একটি সমান্তর শ্রেণীর প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি $(3n^2+n)/2$ হইলে, ঐ শ্রেণীর সাধারণ অন্তর এবং পঞ্চম পদটি নির্ণয় কর।

15. কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম 9টি পদের সমষ্টি 171 এবং প্রথম 24টি পদের সমষ্টি 996 হইলে, প্রথম 16টি পদের সমষ্টি কত ?

16. যে সমস্ত পদগুলি সমান্তর প্রগতিতে আছে তাহাদের প্রথম পদ 2 এবং শেষ পদ 29 এবং তাহাদের যোগফল 155. উহাদের সাধারণ অন্তর নির্ণয় কর।

[**P. U. 1962**]

17. একটি সমান্তর শ্রেণীর প্রথম 21টি পদের সমষ্টি 28 এবং প্রথম 28টি পদের সমষ্টি 21. দেখাও যে, ঐ শ্রেণীর একটি পদ শূন্য ; এবং ঐ শূন্য পদের পূর্ববর্তী পদসমূহের সমষ্টি নির্ণয় কর। [**Joint Ent. Ex. 1969**]

18. কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম 50টি পদের সমষ্টি 200 এবং পরবর্তী 50টি পদের সমষ্টি 2700. ঐ শ্রেণীর সাধারণ অন্তর এবং প্রথম পদটি নির্ণয় কর।

[**P. U. 1975**]

19. 30, 33, 36,...... সমান্তর শ্রেণীর প্রথম হইতে কমপক্ষে কতগুলি পদের সমষ্টি 5000এর অধিক হইবে ?

20. একটি সমান্তর শ্রেণীর পদসংখ্যা যুগ্ম ; উহার অযুগ্ম স্থানীয় পদগুলির যোগফল 24 এবং যুগ্ম-স্থানীয় পদগুলির যোগফল 30 এবং শেষ পদ প্রথম পদ অপেক্ষা $10\frac{1}{2}$ বৃহত্তর হইলে শ্রেণীটির পদসংখ্যা নির্ণয় কর।

21. কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ 1 এবং প্রথম পাঁচটি পদের সমষ্টি উহাদের ঠিক পরবর্তী পাঁচটি পদের সমষ্টির এক-চতুর্থাংশ হইলে শ্রেণীটি নির্ণয় কর।

[**H. S. 1973**]

22. কোন সমান্তর শ্রেণীর n-তম পদ p এবং প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি q. দেখাও যে, ঐ শ্রেণীর প্রথম পদটি $(2q-pn)/n$. [**H. S. Comp. 1973**]

23. একটি সমান্তর শ্রেণীর প্রথম m-সংখ্যক পদের সমষ্টি n এবং প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি m. দেখাও যে, ঐ শ্রেণীর প্রথম $(m+n)$-সংখ্যক পদের সমষ্টি $-(m+n)$. [C. U. 1950]

24. একটি সমান্তর শ্রেণীর p-তম পদ এবং q-তম পদ যথাক্রমে a এবং b. দেখাও যে, উহার প্রথম $(p+q)$-সংখ্যক পদের সমষ্টি $\frac{1}{2}\left(p+q\right)\left(a+b+\frac{a-b}{p-q}\right)$. [H. S. Comp. 1974]

25. কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম p-সংখ্যক পদের সমষ্টি P এবং প্রথম q-সংখ্যক পদের সমষ্টি Q. প্রমাণ কর যে, উহার প্রথম পদটি

$$\frac{Pq(q-1)-Qp(p-1)}{pq(q-p)}.$$ [P. U. 1973]

26. কোন একটি সমান্তর শ্রেণীর প্রথম P-সংখ্যক পদের সমষ্টি, প্রথম Q-সংখ্যক পদের সমষ্টির সমান হইলে, দেখাও যে, উহার প্রথম $(P+Q)$-সংখ্যক পদের সমষ্টি শূন্য হইবে। [Joint Ent. Ex. 1967]

27. $u_1, u_2, u_3, \cdots\cdots\cdots$ সমান্তরীয় প্রগতিতে আছে এবং $S_m = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots\cdots + u_m$. যদি $u_m = 4$, $u_{4m} = 24$, এবং $S_{4m} = 24S_m$ হয়, তবে u_1 এবং m নির্ণয় কর। [Joint Ent. Ex. 1966]

28. তিনটি সমান্তর শ্রেণীর প্রত্যেকটির প্রথম পদ 1, সাধারণ অন্তর 1, 2, 3 এবং উহাদের প্রত্যেকটির প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি যথাক্রমে S_1, S_2 ও S_3 হইলে দেখাও যে, $S_1 + S_3 = 2S_2$. [H. S. 1962]

29. এক ব্যক্তি মাসিক কিস্তিতে 65 টাকার ঋণ পরিশোধ করিবার জন্য প্রথম মাসে 2 টাকা দিলে এবং ক্রমশঃ প্রত্যেক কিস্তির পরিমাণ এক টাকা করিয়া বাড়াইতে থাকিলে কত মাসে ঐ ঋণ পরিশোধ হইবে?

30. এক ব্যক্তি তাহার বন্ধুকে এই শর্তে 1000 টাকা ধারে দিল যে তাহাকে কোন সুদ দিতে হইবে না, কিন্তু প্রত্যেক কিস্তির পরিমাণ দুই টাকা করিয়া বাড়াইয়া মাসিক কিস্তিতে সম্পূর্ণ টাকা পরিশোধ করিবে। যদি প্রথম কিস্তির পরিমাণ 64 টাকা হয় এবং টাকা ধার করার একমাস পরে প্রথম কিস্তির টাকা পরিশোধ করিতে হয়, সে কত মাসে সম্পূর্ণ ঋণ পরিশোধ করিবে? [H. S. 1961]

31. কোন একটি শ্রেণীর বালকদের বয়স সমান্তরীয় প্রগতিতে আছে এবং এই প্রগতির সাধারণ অন্তর 3 মাস। যদি সর্ব কনিষ্ঠ বালকটির বয়স 7 বৎসর এবং তাহাদের সকলের বয়সের সমষ্টি 153 বৎসর হয় তবে ঐ শ্রেণীর বালকদের সংখ্যা নির্ণয় কর। [H. S. 1960]

32. একটি ঋজু পথের উপর পর পর 5 গজ ব্যবধানে 100টি প্রস্তরখণ্ড আছে এবং প্রস্তরখণ্ডের ঠিক 5 গজ পিছনে একটি ঝুড়ি আছে। যেখানে ঝুড়ি আছে ঐ স্থান হইতে এক ব্যক্তি দৌড়াইয়া প্রস্তরগুলি এক একটি করিয়া আনিয়া ঝুড়িতে রাখিলে তাহাকে মোট কত পথ দৌড়াইতে হইবে?

33. দুই জন পথিক একই সময়ে একই পথে চলিতে আরম্ভ করিল। প্রথম ব্যক্তি প্রত্যহ সমহারে 10 মাইল করিয়া চলিতে লাগিল এবং দ্বিতীয় ব্যক্তি প্রথম দিন 8 মাইল চলিয়া পরে প্রত্যহ $\frac{1}{2}$ মাইল করিয়া গতিপথ বাড়াইতে লাগিল। শেষোক্ত ব্যক্তি কতদিনে প্রথম ব্যক্তিকে ধরিবে?

34. কোন স্থান হইতে রওনা হইয়া A ঘণ্টায় 5 মাইল বেগে চলিতে লাগিল এবং তাহার $4\frac{1}{2}$ ঘণ্টা পরে B রওনা হইয়া একই দিকে প্রথম ঘণ্টায় 3 মাইল, দ্বিতীয় ঘণ্টায় $3\frac{1}{2}$ মাইল, তৃতীয় ঘণ্টায় 4 মাইল এইভাবে যাইতে লাগিল। B কত ঘণ্টা পরে A কে ধরিবে? [**H. S. 1965**]

5-8. স্বাভাবিক সংখ্যা সম্বন্ধীয় যোগফল।

1, 2, 3, 4, 5………প্রভৃতি সংখ্যাগুলিকে স্বাভাবিক সংখ্যা বলা হয়। প্রথম n-সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যা বলিলে, $1, 2, 3, 4, \cdots\cdots, n,$ সংখ্যাগুলিকে বুঝাইবে।

নিম্নে প্রদত্ত অতি প্রয়োজনীয় সূত্রত্রয় প্রমাণ করা এবং মনে রাখা অত্যন্ত দরকার।

$$\text{I.}\quad 1+2+3+4+\cdots\cdots\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{II.}\quad 1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\text{III.}\quad 1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

প্রমাণ :—

I. মনে করি, $S=1+2+3+\cdots\cdots+n$

এখানে, পদগুলি সমান্তর শ্রেণীতে আছে, যেখানে প্রথম পদ = 1 এবং সাধারণ অন্তর = 1.

$$\therefore\quad S=\tfrac{1}{2}\{2\times 1+(n-1)\times 1\}\times n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

দ্বিতীয় প্রণালী :—

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + (n-1) + n$$

$$\therefore\ S = n + (n-1) + (n-2) + \cdots\cdots + 2 + 1$$

$$\therefore\ 2S = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots\cdots n\text{-সংখ্যক পদ পর্যন্ত}$$

$$= (n+1) \times n$$

$$\therefore\ S = \frac{n(n+1)}{2}.$$

II. এখন, $r^3 - (r-1)^3 = 3r^2 - 3r + 1$ একটি অভেদ। এই অভেদে r এর স্থলে পর পর $1, 2, 3, \cdots\cdots, n$ বসাইয়া পাই,

$$1^3 - 0^3 = 3.1^2 - 3.1 + 1$$

$$2^3 - 1^3 = 3.2^2 - 3.2 + 1$$

$$3^3 - 2^3 = 3.3^2 - 3.3 + 1$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$n^3 - (n-1)^3 = 3.n^2 - 3.n + 1$$

যোগ করিয়া পাই, $n^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) - 3(1 + 2 + 3 + \cdots + n) + n$

$$\therefore\ 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$$

$$= n^3 - n + 3(1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + n)$$

$$= n^3 - n + \frac{3n(n+1)}{2}$$

$$= n\left\{(n^2 - 1) + \frac{3(n+1)}{2}\right\}$$

$$= n(n+1)\{(n-1) + \tfrac{3}{2}\}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

$$\therefore\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

III. এখন, $r^4-(r-1)^4=4r^3-6r^2+4r-1$ একটি অভেদ। এই অভেদে r এর স্থলে $1, 2, 3, 4, \ldots n$ পরপর বসাইয়া পাই,

$$\begin{aligned}
1^4-0^4 &= 4.1^3-6.1^2+4.1-1\\
2^4-1^4 &= 4.2^3-6.2^2+4.2-1\\
3^4-2^4 &= 4.3^3-6.3^2+4.3-1\\
\ldots\ & \ldots\quad \ldots\quad \ldots\\
\ldots\ & \ldots\quad \ldots\quad \ldots\\
n^4-(n-1)^4 &= 4.n^3-6.n^2+4.n-1
\end{aligned}$$

যোগ করিয়া পাই, $$\begin{aligned} n^4 = {} & 4(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)\\ & -6(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)\\ & +4(1+2+3+\cdots+n)\\ & -n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad & 4(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)\\
&= n^4+n+6(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)\\
&\qquad -4(1+2+4+\cdots+n)\\
&= n(n^3+1)+\frac{6n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{4n(n+1)}{2}\\
&= n(n^3+1)+n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)\\
&= n(n+1)\{(n^2-n+1)+(2n+1)-2\}\\
&= n(n+1)\{n^2+n\}=\{n(n+1)\}^2
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad 1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

মন্তব্য : $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$

উদাহরণ 1. $1^2+3^2+5^2+\cdots n$-সংখ্যক পদ যোগ কর। [P. U. 1969]

$1, 3, 5, \cdots$ শ্রেণীটির n-তম পদ $=1+(n-1)\times 2=2n-1$

তাহা হইলে প্রদত্ত শ্রেণীটির n-তম $=(2n-1)^2$

মনে করি, $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=S$

এবং উহার n-তম পদ $=t_n$; তাহা হইলে,

$S=t_1+t_2+t_3+\cdots+t_n$ এবং

$t_n=(2n-1)^2=4n^2-4n+1$

এখন, n এর স্থলে 1, 2, 3,⋯, n পরপর বসাইয়া পাই,

$$t_1 = 4.1^2 - 4.1 + 1$$
$$t_2 = 4.2^2 - 4.2 + 1$$
$$t_3 = 4.3^2 - 4.3 + 1$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$t_n = 4.n^2 - 4.n + 1$$

যোগ করিয়া পাই, $t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_n$

$$= 4(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$$
$$- 4(1 + 2 + 3 + \cdots + n)$$
$$+ n$$

বা, $S = \dfrac{4n(n+1)(2n+1)}{6} - \dfrac{4n(n+1)}{2} + n$

$$= \tfrac{1}{3}n\{2(n+1)(2n+1) - 6(n+1) + 3\}$$
$$= \tfrac{1}{3}n\{4n^2 - 1\}$$
$$\therefore \quad 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \tfrac{1}{3}n(4n^2 - 1)$$

উদাহরণ 2. $2.3 + 3.4 + 4.5 + \cdots$ শ্রেণীর প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

মনে করি, প্রদত্ত শ্রেণীটির n-তম পদ $= t_n$

এবং প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি $= S_n$. তাহা হইলে,

$S_n = t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_n.$

এখন, 2, 3, 4,...শ্রেণীর

n-তম পদ $= 2 + (n-1) \times 1 = n + 1$;

এবং 3, 4, 5,...শ্রেণীর

n-তম পদ $= 3 + (n-1) \times 1 = n + 2$,

সুতরাং, $t_n = (n+1)(n+2) = n^2 + 3n + 2$

এখন, $n = 1, 2, 3,\ldots$ লিখিয়া পাই,

$$t_1 = 1^2 + 3.1 + 2$$
$$t_2 = 2^2 + 3.2 + 2$$
$$t_3 = 3^2 + 3.3 + 2$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$t_n = n^2 + 3n + 2$$

যোগ করিয়া পাই, $S_n = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + \cdots + n) + 2 \times n$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3n(n+1)}{2} + 2n$$
$$= \tfrac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1) + 9(n+1) + 12\}$$
$$= \tfrac{1}{6}n(2n^2 + 12n + 22)$$
$$= \tfrac{1}{3}(n^3 + 6n^2 + 11n)$$

উদাহরণ 3. $1.3^2 + 2.4^2 + 3.5^2 + \cdots$ শ্রেণীটির প্রথম n পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

মনে করি, প্রদত্ত শ্রেণীর n-তম পদ $= t_n$;

এবং উহার প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি $= S_n$. তাহা হইলে,

$S_n = t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_n$

এখন, 1, 2, 3,$\cdots$এর n-তম পদ $= n$;

এবং 3, 4, 5,…এর n-তম পদ $= 3 + (n-1) \times 1 = n + 2$

সুতরাং, $t_n = n.(n+2)^2 = n^3 + 4n^2 + 4n$

এখন, $n = 1, 2, 3, \ldots$ বসাইয়া পাই,

$$t_1 = 1^3 + 4.1^2 + 4.1$$
$$t_2 = 2^3 + 4,2^2 + 4.2$$
$$t_3 = 3^3 + 4.3^2 + 4.3$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$t_n = n^3 + 4.n^2 + 4.n.$$

যোগ করিয়া পাই, $S_n = (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3) + 4(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) + 4(1 + 2 + 3 + \cdots + n)$

$$=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2+\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{4n(n+1)}{2}$$

$$=n(n+1)\left[\frac{n(n+1)}{4}+\frac{2(2n+1)}{3}+2\right]$$

$$=\tfrac{1}{12}n(n+1)(3n^2+19n+32)$$

উদাহরণ 4. $(2)+(2+5)+(2+5+8)+\cdots\cdots n$ পদ পর্যন্ত যোগফল নির্ণয় কর।

মনে করি, প্রদত্ত শ্রেণীর n-তম পদ $=t_n$.

তাহা হইলে,

$t_n=2+5+8+\cdots n$-তম পদ পর্যন্ত

$=\frac{1}{2}\{2\times 2+(n-1)\times 3\}\times n=\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n$

প্রদত্ত শ্রেণীর n-সংখ্যক পদের সমষ্টি S হইলে,

$S=t_1+t_2+t_3+\cdots+t_n$

এখন, $t_n=\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n$ এর স্থলে

$n=1, 2, 3\ldots$ বসাইয়া পাই

$t_1=\frac{3}{2}.1^2+\frac{1}{2}.1$

$t_2=\frac{3}{2}\,2^2+\frac{1}{2}\,2$

$t_3=\frac{3}{2}.3^2+\frac{1}{2}.3$

$\ldots\quad\ldots\quad\ldots$

$\ldots\quad\ldots\quad\ldots$

$t_n=\frac{3}{2}.n^2+\frac{1}{2}.n$

যোগ করিয়া, $S=\frac{3}{2}(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)$

$+\frac{1}{2}(1+2+3+\cdots+n)$

$$=\tfrac{3}{2}.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\tfrac{1}{2}.\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\tfrac{1}{4}n(n+1)\{2n+1+1\}=\tfrac{1}{2}n(n+1)^2$$

উদাহরণ 5. $2+5+10+17+\cdots$ শ্রেণীর n-তম পদ পর্যন্ত যোগফল নির্ণয় কর।

মনে করি, প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি S এবং n-তম পদ $=t_n$. তাহা হইলে,

$$S = 2+5+10+17+\cdots\cdots+t_{n-1}+t_n$$

এবং $S = \quad 2+5+10+\cdots\cdots+t_{n-2}+t_{n-1}+t_n$

বিয়োগ করিয়া, $0 = 2+3+5+7+\cdots n$-তম পদ পর্যন্ত $-t_n$

$\therefore \quad t_n = 2+\{3+5+7+\cdots(n-1)$-তম পদ পর্যন্ত$\}$

$$= 2+\tfrac{1}{2}\{2\times 3+(n-2)\times 2\}\times(n-1)$$

$$= 2+\tfrac{1}{2}(2n+2)(n-1)$$

$$= 2+(n+1)(n-1) = n^2+1$$

এখন, $n=1, 2, 3, \cdots$ লিখিয়া পাই

$$t_1 = 1^2+1$$
$$t_2 = 2^2+1$$
$$t_3 = 3^2+1$$
$$\cdots \quad \cdots$$
$$\cdots \quad \cdots$$
$$t_n = n^2+1$$

যোগ করিয়া, $S = (1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+n$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+n$$

$$= \tfrac{1}{6}(2n^3+3n^2+7n).$$

উদাহরণ 6. $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots\cdots$ শ্রেণীর $2n$-সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। [H. S. 1974, Joint Ent. Ex. 1970]

$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots 2n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$=(1^2+3^2+5^2+\cdots n$-তম পদ পর্যন্ত $)$

$-(2^2+4^2+6^2+\cdots n$-তম পদ পর্যন্ত $)$

$=[1^2+(1+2)^2+(1+4)^2+\cdots n$-তম পদ পর্যন্ত $]$

$-(2^2+4^2+6^2+\cdots n$-তম পদ পর্যন্ত$)$

$=[1^2\times n+\{2^2+4^2+6^2+\cdots(n-1)$-তম পদ পর্যন্ত $\}$

$+2\{2+4+6+\cdots(n-1)$-তম পদ পর্যন্ত$\}]$

$-(2^2+4^2+6^2+\cdots n$-তম পদ পর্যন্ত$)$

$= [n + (2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots n\text{-তম পদ পর্যন্ত}) - (2n)^2$

$+ 4\{1 + 2 + 3 + \cdots (n-1)\text{-তম পদ পর্যন্ত}\}]$

$- (2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots n\text{-তম পদ পর্যন্ত})$

$= n - 4n^2 + 4\{1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + (n-1)\}$

$$= n - 4n^2 + 4\frac{n(n-1)}{2}$$

$= n - 4n^2 + 2n^2 - 2n = -n(2n+1)$

দ্বিতীয় পদ্ধতি ঃ

নির্ণেয় যোগফল

$= (1^2 - 2^2) + (3^2 - 4^2) + \cdots n\text{-সংখ্যক পদ পর্যন্ত}$

$= (-3) + (-7) + (-11) + \cdots n\text{-সংখ্যক পদ পর্যন্ত}$

$= -(3 + 7 + 11 + \cdots n\text{-সংখ্যক পদ পর্যন্ত})$

$= -\frac{1}{2}\{2 \times 3 + (n-1) \times 4\} \times n$

$= -\frac{1}{2}(4n + 2) \times n = -(2n+1)n.$

প্রশ্নমালা 16

1. n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত যোগফল নির্ণয় কর ঃ—

(*i*) $1.2 + 2.3 + 3.4 + \cdots$ [**P. U. 1968**]

(*ii*) $1.3 + 3.5 + 5.7 + \ldots$

(*iii*) $3.7 + 5.10 + 7.13 + \cdots$

(*iv*) $1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \cdots$

(*v*) $1.2.3 + 2.3.5 + 3.4.7 + \cdots$

(*vi*) $1.3.5 + 3.5.7 + 5.7.9 + \cdots$

(*vii*) $2.3.5 + 3.4.7 + 4.5.9 + \cdots$

(*viii*) $1.2^2 + 2.3^2 + 3.4^2 + \cdots$

(*ix*) $1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + \cdots$

(*x*) $2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + \cdots$

(*xi*) $2^2 + 5^2 + 8^2 + 11^2 + \cdots$

(*xii*) $1^2 + 4^2 + 7^2 + 10^2 + \cdots$

(*xiii*) $2.1^3 + 3.2^3 + 4.3^3 + \cdots$

2. যোগফল নির্ণয় কর :—

(i) $5^2+7^2+9^2+\cdots+25^2$

(ii) $1.3^2+2.4^2+3.5^2+\cdots$100টি পদ

(iii) $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots$100টি পদ

(iv) $\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.10}+\cdots n$ সংখ্যক পদ

(v) $\frac{1}{2.5}+\frac{1}{5.8}+\frac{1}{8.11}+\frac{1}{11.14}+\cdots n$ সংখ্যক পদ

3. নিম্নে প্রদত্ত রাশিমালার প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর :

(i) $3-4+5-6+7-8+\cdots\ldots$

(ii) $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots\cdots$

(iii) $1+4+8+13+19+\cdots\cdots$

(iv) $3+7+13+21+31+\cdots$

(v) $1+3+11+29+61+\cdots$

(vi) $3+6+10+15+21+\ldots$ [H. S. Comp. 1974]

(vii) $1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots$

(viii) $1+(1+3)+(1+3+5)+\cdots$

(ix) $1^2+(1^2+2^2)+(1^2+2^2+3^2)+\cdots$

(x) $(1^2)+(1^2+3^2)+(1^2+3^2+5^2)+\cdots$

(xi) $(3^2-2^2)+(5^2-4^2)+(7^2-6^2)+\cdots$

(xii) $(3^3-2^3)+(5^3-4^3)+(7^3-6^3)+\cdots$ [H. S. 1967]

4. 100 এবং 1000 এর মধ্যবর্তী যে সমস্ত অযুগ্ম পূর্ণ বর্গ সংখ্যা আছে তাহাদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

5. 50 এবং 10000 এর মধ্যবর্তী অযুগ্ম পূর্ণবর্গ স্বাভাবিক সংখ্যাসমূহের যোগফল নির্ণয় কর। [Joint Ent. Ex. 1975]

6. 100 এবং 10000 এর মধ্যবর্তী n^3 আকারের স্বাভাবিক সংখ্যাগুলির যোগফল নির্ণয় কর।

7. সমূহ স্বাভাবিক সংখ্যাগুলি 1 ; 2, 3 ; 4, 5, 6 ; 7, 8, 9, 10 ;…ইত্যাদি বিভাগে বিভক্ত থাকিলে দেখাও যে, k-বিভাগের সংখ্যাগুলির যোগফল $\frac{1}{2}k(k^2+1)$.

[Joint Ent. Ex. 1974]

8. প্রথম n-সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার যোগাফল S_n হইলে, $(S_1+S_2+S_3+\cdots+S_n)/n$ এর মান নির্ণয় কর।

5-9. গুণোত্তর প্রগতি।

কোন শ্রেণীর পদগুলি যদি এরূপ হয় যে, উহাদের যে কোন পদ (প্রথম পদ ভিন্ন) এর সহিত উহার ঠিক পূর্ববর্তী পদের অনুপাত সর্বদাই সমান হয়, তাহা হইলে, ঐ শ্রেণীর পদগুলি **গুণোত্তর প্রগতি** (Geometric Progression, বা, G. P.)-তে আছে বলা হয়, এবং ঐ সমান অনুপাতটিকে ঐ শ্রেণীর **সাধারণ অনুপাত** (Common ratio) বলা হয়।

উদাহরণস্বরূপ,

$1, 3, 9, 27, \cdots\cdots$ একটি গুণোত্তর শ্রেণী ; কারণ এখানে

দ্বিতীয় পদ : প্রথম পদ $= 3$;

তৃতীয় পদ : দ্বিতীয় পদ $= 3$;

চতুর্থ পদ : তৃতীয় পদ $= 3$; ইত্যাদি।

এখানে সাধারণ অনুপাত $= 3$.

সেইরূপ,

$4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \quad \cdots$

শ্রেণীটিও একটি গুণোত্তর শ্রেণী এবং উহার সাধারণ অনুপাত $= \frac{1}{2}$;

কারণ, দ্বিতীয় পদ : প্রথম পদ $= 2 : 4 = \frac{1}{2}$;

তৃতীয় পদ : দ্বিতীয় পদ $= 1 : 2 = \frac{1}{2}$,

চতুর্থ পদ : তৃতীয় পদ $= \frac{1}{2} : 1 = \frac{1}{2}$;

পঞ্চম পদ : চতুর্থ পদ $= \frac{1}{4} : \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; ইত্যাদি।

সাধারণভাবে,

$a, ar, ar^2, ar^3, \cdots\cdots$

একটি গুণোত্তর শ্রেণী, যেখানে **সাধারণ অনুপাত $= r$,** এবং **প্রথম পদ $= a$.**

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ

(i) $\frac{a}{r}, a, ar$-রাশি তিনটি গুণোত্তর প্রগতিতে আছে।

(ii) $\frac{a}{r^3}, \frac{a}{r}, ar, ar^3$-রাশি চারিটি গুণোত্তর প্রগতিতে আছে।

(iii) $\frac{a}{r^2}, \frac{a}{r}, a, ar, ar^2$-রাশি পাঁচটি গুণোত্তর প্রগতিতে আছে।

(iv) a, b, c, d, e, f-রাশি ছয়টি গুণোত্তর প্রগতিতে থাকিলে,

$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c} = \frac{e}{d} = \frac{f}{e} = r =$ সাধারণ অনুপাত।

5-10. গুণোত্তর শ্রেণীর n-তম পদ নির্ণয়।

মনে করি, একটি গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদ $= a$ এবং সাধারণ অনুপাত $= r$.

তাহা হইলে, গুণোত্তর শ্রেণীটি ঃ

$$a, ar, ar^2, ar^3, \cdots\cdots$$

এই শ্রেণীর n-তম পদকে t_n দ্বারা সূচিত করিলে,

$$t_1 = \text{প্রথম পদ} = a = ar^{1-1} ;$$
$$t_2 = \text{দ্বিতীয় পদ} = ar = ar^{2-1} ;$$
$$t_3 = \text{তৃতীয় পদ} = ar^2 = ar^{3-1} ;$$
$$t_4 = \text{চতুর্থ পদ} = ar^3 = ar^{4-1} ,$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$\therefore \quad t_n = n\text{-তম পদ} = ar^{n-1}.$$

সুতরাং, ঐ শ্রেণীর n-তম পদটির মান l হইলে,

$$l = ar^{n-1}$$

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ কোন একটি গুণোত্তর শ্রেণীর পদগুলি প্রথম পদ হইতে $t_1, t_2, t_3, t_4, \cdots\cdots t_n \cdots\cdots$ হইলে,

$$t_2 : t_1 = t_3 : t_2 = t_4 : t_3 = \cdots\cdots\cdots$$

5-11. যে কোন দুইটি পদ হইতে ঐ গুণোত্তর শ্রেণীটি নির্ণয়।

মনে করি, গুণোত্তর শ্রেণীটির p-তম পদ এবং q-তম পদ যথাক্রমে α এবং β.

মনে করি, ঐ শ্রেণীর প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r.

তাহা হইলে,

$$ar^{p-1} = \alpha \quad \cdots \quad (1)$$

$$\text{এবং } ar^{q-1} = \beta \quad \cdots \quad (2)$$

(1) ÷ (2) হইতে পাই,

$$r^{p-q} = \alpha/\beta$$

$$\therefore \quad r = (\alpha/\beta)^{\frac{1}{p-q}} \quad \cdots \quad (3)$$

এখন, (1) ও (3) হইতে পাই,

$$a = (\alpha^{1-q} . \beta^{p-1})^{\frac{1}{p-q}} \quad \cdots \quad (4)$$

সুতরাং, a এবং r জানিতে পারায়, সম্পূর্ণ শ্রেণীটি

$a, ar, ar^2, ar^3, \cdots\cdots$ সহজেই জানা যাইবে।

5-12 গুণোত্তরীয় মধ্যক নির্ণয়।

(1) তিনটি রাশি গুণোত্তর প্রগতিতে থাকিলে উহাদের মধ্যম রাশিটিকে প্রথম ও তৃতীয় রাশিদ্বয়ের **গুণোত্তরীয় মধ্যক (Geometric Mean বা, G. M.)** বলা হয়।

যেমন, 4, 8, 16 সংখ্যা তিনটি গুণোত্তরীয় প্রগতিতে আছে ; কারণ,

$$8 \div 4 = 16 \div 8 = 2\ ;$$

সুতরাং উহাদের সাধারণ অনুপাত 2 এবং উহাদের গুণোত্তরীয় মধ্যক 8.

বিশেষভাবে লক্ষ্যণীয় যে,

$$4 \times 16 = 8^2$$

অর্থাৎ, প্রথম পদ × তৃতীয় পদ = দ্বিতীয় পদের বর্গ।

সাধারণভাবে, a, b, c যদি গুণোত্তরীয় প্রগতিতে থাকে, তাহা হইলে,

$$b \div a = c \div b$$

বা, $$\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$$

অর্থাৎ, $a \times c = b^2$

সুতরাং, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ গুণোত্তরীয় প্রগতিতে থাকিলে, অতি অবশ্যই,

$$\boldsymbol{a \times c = b^2}$$

$$\therefore\ b = \pm \sqrt{ac}$$

অতএব, **a এবং c এর গুণোত্তরীয় মধ্যক = $\pm \sqrt{ac}$**

যেমন, 3 এবং 27 এর গুণোত্তরীয় মধ্যক

$$\pm \sqrt{3 \times 27} \quad \text{অর্থাৎ} \quad \pm 9.$$

(2) কতকগুলি রাশি গুণোত্তরীয় প্রগতিতে থাকিলে, উহাদের প্রথম এবং শেষ রাশির মধ্যবর্তী রাশিগুলিকে প্রথম ও শেষ রাশিদ্বয়ের **গুণোত্তরীয় মধ্যক** (*Geometric means*) বলা হয়। যেমন,

2, 6, 18, 54, 162—এই পাঁচটি সংখ্যা গুণোত্তরীয় প্রগতিতে আছে ; ইহাদের প্রথম পদ 2 ; শেষ পদ 162 ; সাধারণ অনুপাত 3 ; এবং 2 ও 162 এর গুণোত্তরীয় মধ্যক 6, 18, 54.

মনে করি, a এবং b দুইটি প্রদত্ত রাশি ; উহাদের মধ্যে n-সংখ্যক গুণোত্তরীয় মধ্যক সংস্থাপন করিতে হইবে।

মনে করি, $x_1, x_2, x_3 \cdots\cdots\cdots x$ রাশিগুলি নির্ণেয় গুণোত্তরীয় মধ্যক।

তাহা হইলে,

$a, x_1, x_2, x_3, \cdots x_{n-1}, x_n$, b-রাশিগুলি একটি গুণোত্তরীয় প্রগতি গঠন করিয়াছে, যেখানে প্রথম পদ $= a$; এবং শেষ পদ অর্থাৎ $(n+2)$-তম পদ $= b$.

মনে করি, উহাদের সাধারণ অনুপাত $= r$. তাহা হইলে,

$$b = (n+2)\text{-তম পদ} = ar^{n+1}$$

অর্থাৎ, $r = (b/a)^{\frac{1}{n+1}}$. সুতরাং,

$$x_1 = ar = a(b/a)^{\frac{1}{n+1}},$$

$$x_2 = ar^2 = a(b/a)^{\frac{2}{n+1}},$$

$$x_3 = ar^3 = a(b/a)^{\frac{3}{n+1}},$$

... ...

... ...

$$x_n = ar^n = a(b/a)^{\frac{n}{n+1}}.$$

উদাহরণ 1. 3, 6, 12, 24......শ্রেণীর নবম পদটি নির্ণয় কর।

এখানে, প্রথম পদ $a = 3$; এবং সাধারণ অনুপাত $r = 6 \div 3 = 2$;

সুতরাং, নবম পদ $= t_9 = ar^8$

$$= 3.2^8 = 768.$$

উদাহরণ 2. 4, -8, 16, -32......শ্রেণীর কোন্ পদটি 1024 হইবে ?

এখানে, প্রথম পদ $a = 4$; সাধারণ অনুপাত $r = -8 \div 4 = -2$;

মনে করি, n-তম পদ $= 1024$.

তাহা হইলে, $ar^{n-1} = 1024$

বা, $4.(-2)^{n-1} = 1024$

বা, $(-2)^{n-1} = 256$

বা, $(-2)^{n-1} = (-2)^8$

$\therefore$ $n - 1 = 8$ অর্থাৎ $n = 9$,

$\therefore$ নির্ণেয় উত্তর : নবম পদ।

উদাহরণ 3. একটি গুণোত্তর শ্রেণীর সপ্তম পদ এবং দশম পদ যথাক্রমে -27 এবং 729 হইলে শ্রেণীটি নির্ণয় কর।

মনে করি, প্রথম পদ $= a$; এবং সাধারণ অনুপাত $= r$.

তাহা হইলে শ্রেণীটি :

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\dots\dots$$

কিন্তু প্রদত্ত শর্তানুসারে,

সপ্তম পদ $= ar^6 = -27$ ... (1)

এবং দশম পদ $= ar^9 = 729$ ... (2)

(2)÷(1) হইতে পাই,

$$r^3 = -27 = (-3)^3$$

$\therefore\ r = -3$ ... ... (3)

এখন, (1) এবং (3) হইতে পাই

$a = -\frac{1}{27}$ ... ... (4)

স্থতরাং, নির্ণেয় শ্রেণীটি :

$$-\tfrac{1}{27},\ \tfrac{1}{9},\ -\tfrac{1}{3},\ 1,\ -3,\ 9,\ -27,\dots\dots$$

উদাহরণ 4. কোন একটি গুণোত্তর শ্রেণীর দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদের সমষ্টি 3/2 এবং ষষ্ঠ ও সপ্তম পদের সমষ্টি 24. শ্রেণীটি নির্ণয় কর।

মনে করি, শ্রেণীটির প্রথম পদ $= a$, এবং, সাধারণ অনুপাত $= r$,

তাহা হইলে, শ্রেণীটি :

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\dots\dots$$

এখন, প্রদত্ত শর্তানুসারে,

$ar + ar^2 = 3/2$ বা, $ar(1+r) = 3/2$ ... (1)

এবং, $ar^5 + ar^6 = 24$ বা, $ar^5(1+r) = 24$ ... (2)

(2) কে (1) দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

$r^4 = 16\quad \therefore\ r = \pm 2$ ... (3)

$r = 2$ হইলে, (1) হইতে $a = 1/4$

এবং, তখন নির্ণেয় শ্রেণীটি :

$$\tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{2},\ 1,\ 2,\ 4,\dots\dots$$

কিন্তু, $r = -2$ হইলে, (1) হইতে, $a = 3/4$,

এবং, তখন নির্ণেয় শ্রেণীটি :

$$\tfrac{3}{4},\ -\tfrac{3}{2},\ 3,\ -6,\ 12,\dots\dots$$

উদাহরণ 5. 6 এবং 54 এর গুণোত্তরীয় মধ্যক নির্ণয় কর।

নির্ণেয় গুণোত্তরীয় মধ্যক x হইলে,

$$x^2 = 6 \times 54 = 6^2 \times 3^2$$

$$\therefore \quad x = \pm 18$$

সুতরাং, নির্ণেয় মধ্যক ; 18 বা, -18.

উদাহরণ 6. $3\frac{5}{9}$ এবং $40\frac{1}{2}$ এর মধ্যে 5টি গুণোত্তরীয় মধ্যক সংস্থাপন কর।

নির্ণেয় গুণোত্তরীয় মধ্যক

x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 হইলে,

$3\frac{5}{9}, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, 40\frac{1}{2}$

রাশিগুলি গুণোত্তরীয় প্রগতিতে থাকিবে, যেখানে প্রথম পদ $= 3\frac{5}{9}$ এবং সপ্তম পদ $= 40\frac{1}{2}$. মনে করি, সাধারণ অনুপাত $= r$.

তাহা হইলে, সপ্তম পদ $= 3\frac{5}{9} \times r^6 = 40\frac{1}{2}$

বা, $\dfrac{32}{9} \times r^6 = \dfrac{81}{2}$ বা, $r^6 = \dfrac{81 \times 9}{64}$

$\therefore \quad r = \pm \frac{3}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যকগুলি :

$5\frac{1}{3}, 8, 12, 18, 27$;

অথবা, $-5\frac{1}{3}, 8, -12, 18, -27$.

উদাহরণ 7. তিনটি সংখ্যা গুণোত্তরীয় প্রগতিতে আছে। তাহাদের যোগফল $24\frac{4}{5}$ এবং গুণফল 64 হইলে, সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর।

মনে করি, সংখ্যাত্রয় : $\dfrac{a}{r}, a, ar$.

তাহা হইলে প্রদত্ত শর্ত হইতে,

$$\frac{a}{r} + a + ar = 24\tfrac{4}{5} \quad \ldots \quad (1)$$

এবং, $$\frac{a}{r} . a . ar = 64 \quad \ldots \quad (2)$$

এখন, (2) হইতে পাই,

$$a^3 = 64, \quad \therefore \quad a = 4 \quad \ldots \quad (3)$$

তাহা হইলে, (1) হইতে,

$$4\left(\frac{1}{r} + 1 + r\right) = \frac{124}{5}$$

বা, $\frac{1}{r}+r=\frac{26}{5}$

বা, $5r^2-26r+5=0$

বা, $(r-5)(5r-1)=0, \quad \therefore \; r=5, \frac{1}{5}.$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাত্রয় :

$\frac{4}{5}, 4, 20$; অথবা, $20, 4, \frac{4}{5}$.

উদাহরণ 8. কোন গুণোত্তর শ্রেণীর p-তম, q-তম এবং r-তম পদ যথাক্রমে a, b, c হইলে প্রমাণ কর যে,

$$a^{q-r}.\ b^{r-q}.\ c^{p-q}=1$$ **[H. S. 1968]**

মনে করি, গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদ $=x$ এবং সাধারণ অনুপাত $=y$. তাহা হইলে,

$$xy^{p-1}=a\ ;\ xy^{q-1}=b\ ;\ xy^{r-1}=c.$$

এখন, $a^{q-r}.\ b^{r-p}.\ c^{p-q}$

$=(xy^{p-1})^{q-r}.\ (xy^{q-1})^{r-p}.\ (xy^{r-1})^{p-q}$

$=x^{q-r+r-p+p-q}\times y^{(p-1)(q-r)+(q-1)(r-p)+(r-1)(p-q)}$

$=x^0\times y^0=1\times 1=1.$

উদাহরণ 9. a, b, c, d গুণোত্তরীয় প্রগতিতে থাকিলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{1}{a^2+b^2}, \frac{1}{b^2+c^2}, \frac{1}{c^2+d^2}$$

গুণোত্তরীয় প্রগতিতে থাকিবে।

a, b, c, d গুণোত্তরীয় প্রগতিতে থাকিলে,

$$\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{c}$$

বা, $\frac{b^2}{a^2}=\frac{c^2}{b^2}=\frac{d^2}{c^2}$

বা, $\frac{b^2+a^2}{a^2}=\frac{c^2+b^2}{b^2}=\frac{d^2+c^2}{c^2}$

$\therefore$ $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{a^2}{b^2}$ এবং, $\frac{b^2+c^2}{c^2+d^2}=\frac{b^2}{c^2}=\frac{a^2}{b^2}$

$\therefore$ $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{b^2+c^2}{c^2+d^2}$

বা, $\frac{1}{a^2+b^2}\cdot\frac{1}{c^2+d^2}=\frac{1}{(b^2+c^2)^2}$

$\therefore$ $\frac{1}{a^2+b^2}, \frac{1}{b^2+c^2}, \frac{1}{c^2+d^2}$

গুণোত্তরীয় প্রগতিতে আছে।

উদাহরণ 10. a, b, c, d গুণোত্তর প্রগতিতে থাকিলে, দেখাও যে,

$$(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2.$$

এখন, a, b, c, d রাশি চারিটি গুণোত্তর প্রগতিতে আছে বলিয়া,

$$\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{c}=\text{সাধারণ অনুপাত}=r.$$

$$\therefore \quad b=ar\ ;\ c=br=ar^2;\ d=cr=br^2=ar^3.$$

সুতরাং, $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)$

$$=(a^2+a^2r^2+a^2r^4)(a^2r^2+a^2r^4+a^2r^6)$$
$$=r(a^2+a^2r^2+a^2r^4)(a^2r+a^2r^3+a^2r^5)$$
$$=(a^2r+a^2r^3+a^2r^5)^2$$
$$=(a\,.\,ar+ar\,.\,ar^2+ar^2\,.\,ar^3)^2$$
$$=(ab+bc+cd)^2.$$

প্রশ্নমালা 17

1. $2, 6, 18, 54,$.........শ্রেণীর ষষ্ঠ পদটি নির্ণয় কর।

2. $2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4},$.........শ্রেণীর দশম পদটি নির্ণয় কর।

3. $\sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3\sqrt{3}},$ .... শ্রেণীর সপ্তম পদটি কত ?

4. $2\frac{3}{4}, 1\frac{5}{6}, 1\frac{2}{9},$.........শ্রেণীর অষ্টম পদটি কত ?

5. $\sqrt{3}, \sqrt{6}, 2\sqrt{3},$.........18-তম পদটি নির্ণয় কর।

6. $3, -6, 12, -24,$.........শ্রেণীর কোন্ পদটি 192 ?

7. $\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{9},$.........শ্রেণীর কোন্ পদটি $-\frac{64}{2187}$?

8. $\frac{8}{9}, \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{4}{3}$ ....শ্রেণীর কোন্ পদটি $\sqrt{6}$?

9. একটি গুণোত্তর শ্রেণীর পঞ্চম পদ 48 এবং দ্বাদশ পদ 6144. শ্রেণীটির সপ্তম পদ নির্ণয় কর।

10. কোন গুণোত্তর শ্রেণীর পঞ্চম পদ 16 এবং নবম পদ 256 হইলে শ্রেণীটি নির্ণয় কর।

11. একটি গুণোত্তর শ্রেণীর দ্বিতীয় পদ b এবং সাধারণ অনুপাত r. ঐ শ্রেণীর প্রথম তিনটি পদের গুণফল 64 হইলে, b-এর মান নির্ণয় কর। [**H. S. 1973**]

12. কোন গুণোত্তর শ্রেণীর তৃতীয় ও চতুর্থ পদদ্বয়ের যোগফল 60 এবং ষষ্ঠ ও সপ্তম পদদ্বয়ের যোগফল 480. ঐ শ্রেণীর দশম পদটি কত ?

13. একটি গুণোত্তর শ্রেণীর তৃতীয় ও চতুর্থ পদদ্বয়ের সমষ্টি 3; এবং সপ্তমও অষ্টম পদদ্বয়ের সমষ্টি $\frac{3}{16}$. শ্রেণীটি নির্ণয় কর।

14. দেখাও যে, দুইটি গুণোত্তর শ্রেণী বিদ্যমান যেখানে উভয়ের প্রথম পদ $\frac{3}{25}$ এবং উভয়ের ক্ষেত্রে প্রথম তিনটি পদের যোগফল $\frac{93}{25}$. **[P. U. 1974]**

15. কোন গুণোত্তর শ্রেণীর তৃতীয় পদ ও সপ্তম পদের অনুপাত 1 : 16; উহার প্রথম পদ 7 হইলে, অষ্টম পদটি নির্ণয় কর।

16. একটি গুণোত্তর শ্রেণীর পঞ্চম পদটি তৃতীয় পদের চারগুণ এবং প্রথম দুইটি পদের যোগফল -4. শ্রেণীটি নির্ণয় কর।

17. নিম্নে প্রদত্ত রাশিদ্বয়ের গুণোত্তরীয় মধ্যক নির্ণয় কর :—

(*i*) 4, 9; (*ii*) $-3, -12$; (*iii*) $6\sqrt{3}, 2\sqrt{3}$;

(*iv*) $a^2, (a+b)^2$; (*v*) $a^2-ab, ab-b^2$

(*vi*) $(a^4b-a^3b^2), (a^2b^3-ab^4)$.

18. (*i*) 5 এবং 135 এর মধ্যে 2টি গুণোত্তরীয় মধ্যক বসাও।

(*ii*) 4 এবং 324 এর মধ্যে 3টি গুণোত্তরীয় মধ্যক বসাও।

(*iii*) 25 এবং 164025 এর মধ্যে 3টি গুণোত্তরীয় মধ্যক সংস্থাপন কর।

(*iv*) $3\frac{1}{5}$ এবং $\frac{1}{20}$ এর মধ্যে 5টি গুণোত্তরীয় মধ্যক স্থাপন কর।

(*v*) 8 এবং $\frac{1}{2}$ এর মধ্যে 7টি গুণোত্তরীয় মধ্যক বসাও।

19. যদি 5, x, y, z, 405 গুণোত্তরীয় প্রগতিতে থাকে, তাহা হইলে x, y, z এর মান নির্ণয় কর। **[H. S. 1972]**

20. $2\frac{2}{9}$, a, b, c, d, $16\frac{7}{8}$ গুণোত্তরীয় শ্রেণীতে থাকিলে, a, b, c, d এর মান বাহির কর।

21. তিনটি সংখ্যা গুণোত্তরীয় প্রগতিতে আছে, যাহাদের যোগফল 38 এবং গুণফল 1728. সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর।

22. 26 কে এমন তিনটি অংশে বিভক্ত কর যেন অংশগুলি গুণোত্তরীয় প্রগতি গঠন করে এবং তাহাদের গুণফল 216 হয়।

23. তিনটি সংখ্যা গুণোত্তর শ্রেণীতে আছে; তাহাদের যোগফল 13 এবং তাহাদের বর্গের সমষ্টি 91. সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর।

24. কোন গুণোত্তর শ্রেণীর $(p+q)$-তম পদ m এবং $(p-q)$-তম পদ n হইলে উহার p-তম এবং q-তম পদ নির্ণয় কর। **[C. U. 1942]**

25. যদি $u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots$ শ্রেণীটি গুণোত্তর প্রগতিতে থাকে এবং $u_{m+n} = \text{A}$ $u_{m-n} = \text{B}$ হয় তবে দেখাও যে, $u_m = \pm\sqrt{\text{AB}}$.

26. একটি গুণোত্তরীয় শ্রেণীর প্রথম পদ এবং n-তম পদ যথাক্রমে a এবং b ; তাহাদের ক্রমিক গুণফল P হইলে দেখাও যে, $P^2 = (ab)^n$.

[**H. S. 1974 ; Joint Ent. Ex. 1971**]

27. a, b, c গুণোত্তর প্রগতিতে থাকিলে দেখাও যে, নিম্নে প্রদত্ত রাশিগুলি গুণোত্তর প্রগতিতে থাকিবে।

(i) a^2, b^2, c^2, (ii) a^3, b^3, c^3,

(iii) $a^2+b^2, ab+bc, b^2+c^2$.

28. a, b, c, d গুণোত্তর প্রগতিতে থাকিলে দেখাও যে, নিম্নোক্ত রাশিগুলিও গুণোত্তর প্রগতিতে থাকিবে :

(i) $a+b, b+c, c+d$,

(ii) $a^2+b^2, b^2+c^2, c^2+d^2$,

(iii) $a^3+b^3, b^3+c^3, c^3+d^3$,

(iv) $a^2+b^2+c^2, ab+bc+cd, b^2+c^2+d^2$.

(v) $a^2+b^2, ab+bc, b^2+c^2, bc+cd, c^2+d^2$.

29. a, b, c গুণোত্তর প্রগতিতে থাকিলে দেখাও যে,

(i) $(a^2+b^2)(b^2+c^2) = (ab+bc)^2$

(ii) $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} = \dfrac{1}{b}$

(iii) $\dfrac{a}{(a+b)^2} = \dfrac{c}{(b+c)^2}$

(iv) $a^2b^2c^2\left(\dfrac{1}{a^3} + \dfrac{1}{b^3} + \dfrac{1}{c^3}\right) = a^3+b^3+c^3$.

30. a, b, c, d, গুণোত্তর প্রগতিতে থাকিলে, দেখাও যে,

(i) $(b+c)(b+d) = (c+a)(c+d)$

(ii) $(b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2 = (a-d)^2$ [**H. S. 1963**]

31. x, y, z রাশি তিনটি যদি এরূপ হয় যে,

$(x^2+y^2)(y^2+z^2) = (xy+yz)^2$,

তাহা হইলে x, y, z রাশিত্রয় গুণোত্তরীয় প্রগতিতে থাকিবে।

32. $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_n$ রাশিগুলি যদি এরূপ হয় যে,

$(a_1{}^2+a_2{}^2+\ldots+a^2{}_{n-1})(a_2{}^2+a_3{}^2+\ldots+a^2{}_n)$

$= (a_1a_2+a_2a_3+\ldots+a_{n-1}a_n)^2$

তাহা হইলে, $a_1, a_2 \ldots\ldots a_n$ রাশিগুলি গুণোত্তরীয় প্রগতিতে থাকিবে।

5-13. গুণোত্তর শ্রেণীর n-সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয়।

মনে করি, একটি গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদ $=a$, সাধারণ অনুপাত $=r$ এবং প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি $=S_n$. এখানে, n-তম পদ $=ar^{n-1}$. তাহা হইলে,

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots\cdots + ar^{n-1}$$

$$r.\ S_n = \quad ar + ar^2 + \cdots\cdots + ar^{n-1} + ar^n$$

বিয়োগ করিয়া, $(1-r)\,S_n = a - ar^n$

$$\therefore\quad S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$

সুতরাং,

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad \text{অথবা,} \quad \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

উদাহরণ 1. 5, 10, 20, 40………শ্রেণীর প্রথম 8টি পদের যোগফল কত?

এখানে, প্রথম পদ $a=5$; এবং সাধারণ অনুপাত $r=10\div5=2$

$$\therefore\quad \text{নির্ণেয় যোগফল} = \frac{5(1-2^8)}{1-2}$$

$$= 5(2^8-1) = 1275.$$

উদাহরণ 2. যোগফল নির্ণয় কর :

$$3 - 6 + 12 - \cdots + 768.$$

এখানে, প্রথম পদ $a=3$; সাধারণ অনুপাত $r=-6\div3=-2$

মনে করি, n-তম পদ $=768$. তাহা হইলে,

$$ar^{n-1} = 768$$

বা, $3\times(-2)^{n-1} = 768$

বা, $(-2)^{n-1} = 256 = (-2)^8$

$\therefore\quad n-1=8.$ অর্থাৎ, $n=9$

সুতরাং প্রদত্ত শ্রেণীর নবম পদ $=768$.

$\therefore$ নির্ণেয় যোগফল :

$$S_9 = \frac{3\{1-(-2)^9\}}{1-(-2)}$$

$$= 1 + (2)^9 = 513.$$

উদাহরণ 3. কোন সূত্রের সাহায্য না লইয়া $3+3^2+3^3+\ldots\ldots$ শ্রেণীর প্রথম n-সংখ্যক পদের যোগফল নির্ণয় কর।

এখানে, প্রথম পদ $=3$; এবং সাধারণ অনুপাত $=3$;

তাহা হইলে n-তম পদ $=3.3^{n-1}=3^n$.

মনে করি, প্রথম n-সংখ্যক পদের যোগফল $=S$. তাহা হইলে,

$$S=3+3^2+3^3+\cdots+3^n$$

$$\therefore\quad 3S=\quad 3^2+3^3+\cdots+3^n+3^{n+1}$$

বিয়োগ করিয়া, $S-3S=3-3^{n+1}$

বা, $2S=3^{n+1}-3$

$\therefore\quad S=\frac{3}{2}(3^n-1)$.

উদাহরণ 4. $6,\ -12,\ 24,\ -48,\ldots\ldots$ শ্রেণীটির প্রথম কয়টি পদের যোগফল -2046 হইবে ?

এখানে, প্রথম পদ $=6$; সাধারণ অনুপাত $=-2$.

মনে করি, প্রথম n-সংখ্যক পদের যোগফল $=-2046$. তাহা হইলে,

$$\frac{6\times\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}=-2046$$

বা, $1-(-2)^n=-1023$

বা, $(-2)^n=1024=(-2)^{10}$; $\therefore\ n=10$

$\therefore$ নির্ণেয় পদ সংখ্যা $=10$.

উদাহরণ 5 যোগফল নির্ণয় কর :

$8+88+888+\ldots\ldots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

নির্ণেয় যোগফল

$=8+88+888+\ldots\ldots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$=\frac{8}{9}\{9+99+999+\ldots\ldots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত$\}$

$=\frac{8}{9}\{(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\ldots\ldots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত$\}$

$=\frac{8}{9}\{(10+10^2+10^3+\ldots\ldots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত$)-n\}$

$$=\frac{8}{9}\left\{\frac{10\times(10^n-1)}{10-1}-n\right\}$$

$=\frac{8}{9}\{\frac{10}{9}(10^n-1)-n\}$

উদাহরণ 6 যোগফল নির্ণয় কর :

$\dot{}4 + \dot{}44 + \dot{}444 + \cdots\cdots$ 100-তম পদ পর্যন্ত।

নির্ণেয় যোগফল

$= \dot{}4 + \dot{}44 + \dot{}444 + \ldots\ldots$ 100-তম পদ পর্যন্ত

$= \frac{4}{9}\{\dot{}9 + \dot{}99 + \dot{}999 + \ldots\ldots$ 100-তম পদ পর্যন্ত$\}$

$= \frac{4}{9}\{(1 - \dot{}1) + (1 - \dot{}01) + (1 - \dot{}001) + \ldots\ldots$ 100-সংখ্যক পদ পর্যন্ত$\}$

$= \frac{4}{9}\{100 - (\dot{}1 + \dot{}01 + \dot{}001 + \cdots\cdots$ 100 সংখ্যক পদ পর্যন্ত$)\}$

$= \frac{4}{9}\left\{100 - \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots\cdots \text{100 সংখ্যক পদ পর্যন্ত}\right)\right\}$

$$= \frac{4}{9}\left\{100 - \frac{\frac{1}{10}\left(1 - \frac{1}{10^{100}}\right)}{1 - \frac{1}{10}}\right\}$$

$= \frac{4}{9}\{100 - \frac{1}{9}(1 - 10^{-100})\} = \frac{4}{81}(899 + 10^{-100})$

উদাহরণ 7. $(1) + (1+3) + (1+3+3^2) + \cdots\cdots$ শ্রেণীটির প্রথম n সংখ্যক পদের (অর্থাৎ বিভাগের) সমষ্টি নির্ণয় কর।

প্রদত্ত শ্রেণীর n-তম পদকে t_n দ্বারা সূচিত করিলে,

$t_n = (1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots\cdots n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত)

$$= \frac{1.(3^n - 1)}{3 - 1} = \tfrac{1}{2}.3^n - \tfrac{1}{2}.$$

মনে করি, প্রদত্ত শ্রেণীর প্রথম n-সংখ্যক পদ (অর্থাৎ বিভাগ) এর যোগফল S_n. তাহা হইলে,

$$S_n = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots\ldots + t_n.$$

এখন, $t_n = (\frac{1}{2} \,.\, 3^n - \frac{1}{2})$-তে $n = 1, 2, 3\ldots\ldots$ বসাইয়া পাই

$t_1 = \frac{1}{2} \,.\, 3 - \frac{1}{2}$;

$t_2 = \frac{1}{2} \,.\, 3^2 - \frac{1}{2}$;

$t_3 = \frac{1}{2} \,.\, 3^3 - \frac{1}{2}$;

... ...

... .

$t_n = \frac{1}{2} \,.\, 3^n - \frac{1}{2}.$

যোগ করিয়া পাই, $S_n = t_1 + t_3 + \ldots\ldots + t_n$

$= \frac{1}{2}(3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^n) - \frac{1}{2} \times n$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3 \times (3^n - 1)}{3 - 1} - \frac{1}{2} \,.\, n$$

$$= \frac{3}{4}(3^n - 1) - \frac{n}{2}$$

উদাহরণ 8. n-তম পদ পর্য্যন্ত যোগফল নির্ণয় কর :

$$2+3\cdot3+4\cdot3^2+5\cdot3^3+\ldots\ldots.$$

2, 3, 4, 5,.....শ্রেণীটির n-তম পদ $=2+(n-1)\times1=n+1$;

$3^0, 3^1, 3^2, 3^3,$.....শ্রেণীটির n-তম পদ $=3^0\times3^{n-1}=3^{n-1}$

সুতরাং, প্রদত্ত শ্রেণীর n-তম পদকে t_n দ্বারা সূচিত করিলে,

$$t_n=(n+1)\times3^{n-1}.$$

মনে করি, প্রদত্ত শ্রেণীর প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি S. তাহা হইলে,

$$S=2+3\cdot3+4\cdot3^2+5\cdot3^3+\ldots\ldots+(n+1)\cdot3^{n-1}$$

$$\therefore\quad 3\cdot S=\quad 2\cdot3+3\cdot3^2+4\cdot3^3+\ldots\ldots+n\cdot3^{n-1}+(n+1)\cdot3^n$$

বিয়োগ করিয়া, $-2S=2+3+3^2+3^3+\ldots\ldots+3^{n-1}-(n+1)\cdot3^n$

$$=2+(3+3^2+3^3+\ldots\ldots+3^{n-1})-(n+1)\cdot3^n$$

$$=2+\frac{3\times(3^{n-1}-1)}{3-1}-(n+1)\cdot3^n$$

$$=2+\tfrac{3}{2}(3^{n-1}-1)-(n+1)\cdot3^n$$

$$=2+\tfrac{1}{2}\cdot3^n-\tfrac{3}{2}-(n+1)\cdot3^n$$

$$=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}(2n+1)\cdot3^n$$

$$\therefore\quad S=\tfrac{1}{4}(2n+1)\cdot3^n-\tfrac{1}{4}.$$

মন্তব্য : উপরের শ্রেণীটিকে **সমান্তর-গুণোত্তরীয় শ্রেণী (Arithmetico-Geometric Series)** বলা যায়।

উদাহরণ 9. প্রথম n-সংখ্যক পদের যোগফল নির্ণয় কর :

$$1+4+13+40+121+\ldots\ldots\ldots$$

মনে করি প্রদত্ত শ্রেণীর n-তম পদ t_n এবং প্রথম n-সংখ্যক পদের যোগফল S_n.

তাহা হইলে, $S_n=1+4+13+40+121+\ldots\ldots+t_n$

আবার, $S_n=\quad 1+4+13+40+\ldots\ldots+t_{n-1}+t_n$

বিয়োগ করিয়া, $0=(1+3+9+27+81+\ldots\ldots n\text{-পদ পর্যন্ত})-t_n$

$$\therefore\quad t_n=\{1+3+9+27+81+\ldots\ldots n\text{-সংখ্যক পদ পর্য্যন্ত}\}$$

$$=\frac{(3^n-1)}{3-1}=\tfrac{1}{2}.3^n-\tfrac{1}{2}.$$

এখন n-এর স্থলে পরপর 1, 2, 3......বসাইয়া পাই,

$$t_1 = \tfrac{1}{2} \cdot 3 - \tfrac{1}{2};$$
$$t_2 = \tfrac{1}{2} \cdot 3^2 - \tfrac{1}{2};$$
$$t_3 = \tfrac{1}{2} \cdot 3^3 - \tfrac{1}{2};$$
$$\ldots \quad \ldots$$
$$\ldots \quad \ldots$$
$$t_n = \tfrac{1}{2} \cdot 3^n - \tfrac{1}{2}.$$

যোগ করিয়া, $S_n = t_1 + t_2 + \ldots\ldots + t_n$

$$= \tfrac{1}{2}(3 + 3^2 + 3^3 + \ldots\ldots + 3^n) - \tfrac{1}{2} \cdot n$$
$$= \tfrac{3}{2}(1 + 3 + 3^2 + \ldots\ldots + 3^{n-1}) - \tfrac{1}{2}n$$
$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{1.(3^n - 1)}{3 - 1} - \frac{n}{2}$$
$$= \tfrac{3}{4}(3^n - 1) - \tfrac{n}{2}.$$

উদাহরণ 10. এক ব্যক্তি কোন এক প্রতিষ্ঠানকে দশ লক্ষ টাকায় 30 দিনের প্রত্যেক দিন দিয়াশলাইয়ের কাঠি সরবরাহ করিবার জন্য এইভাবে চুক্তি করিলে যে, যে কোন দিন ঠিক তাহার পূর্বের দিনে যত কাঠি সরবরাহ করিয়া থাকিবে তাহার দ্বিগুণ কাঠি দিবে। যদি সেই ব্যক্তি প্রথম দিন মাত্র একটি কাঠি সরবরাহ করিয়া থাকে এবং প্রতিটি দিয়াশলাইয়ের বাক্সে 60টি কাঠি থাকে এবং প্রতিটি বাক্সের দাম 6 পয়সা হয় তবে ঐ সরবরাহকারীর কত লাভ বা লোকসান হইবে?

ঐ সরবরাহকারী 30 দিনে মোট যত কাঠি সরবরাহ করিবে তাহার সংখ্যা

$= 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots\ldots 30$-তম পদ পর্য্যন্ত

$$= 1 \times \frac{(2^{30} - 1)}{2 - 1} = 2^{30} - 1$$
$$= 2^{10} \times 2^{10} \times 2^{10} - 1.$$
$$= 1024 \times 1024 \times 1024 - 1$$
$$= 1{,}0\ 73,\ 741,\ 823.$$

সুতরাং 30 দিনে ঐ ব্যক্তি যত কাঠি সরবরাহ করিবে তাহার মোট মূল্য

$$= \frac{1{,}073{,}741{,}823}{60} \times \frac{6}{100} \text{ টাকা}$$

$= 1{,}073{,}741{\cdot}823$ টাকা

সুতরাং মোট লোকসানের পরিমাণ $= 73{,}741{\cdot}823$ টাকা।

প্রশ্নমালা 18

1. যোগফল নির্ণয় কর :

(i) $1+2+4+8+\ldots\ldots$10টি পদ পর্যন্ত

(ii) $81+27+9+3+\ldots\ldots$প্রথম 8টি পদের

(iii) $2-6+18-54+\ldots\ldots$অষ্টম পদ পর্যন্ত

(iv) $2-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\ldots\ldots$দ্বাদশ পদ পর্যন্ত

(v) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots\ldots$20-তম পদ পর্যন্ত

(vi) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\ldots\ldots$50-তম পদ পর্যন্ত

(vii) $\frac{1}{2}+3(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^3+3(\frac{1}{2})^4+\ldots\ldots$প্রথম 12টি পদের [P.U. 1976]

(viii) $\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\ldots\ldots$দশম পদ পর্যন্ত

(ix) $1\frac{1}{2}+2\frac{1}{4}+3\frac{3}{8}+\ldots\ldots$প্রথম 8টি পদের

(x) $\dot{}5+\dot{}05+\dot{}005+\ldots\ldots$দশম পদ পর্যন্ত

2. প্রথম n-সংখ্যক পদের যোগফল নির্ণয় কর :

(i) $3+6+12+24+\ldots\ldots\ldots$

(ii) $1+3+3^2+3^3+\ldots\ldots\ldots$

(iii) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots\ldots\ldots$

(iv) $1+5^{-1}+5^{-2}+5^{-3}+\ldots\ldots\ldots$

(v) $2+\sqrt{2}+1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots\ldots\ldots$

(vi) $1+11+111+1111+\ldots\ldots\ldots$ [Joint Ent. Ex. 1976]

(vii) $\dot{}3+\dot{}03+\dot{}003+\ldots\ldots\ldots$

(viii) $(a-x)+(a^2-x^2)+(a^3-x^3)+\ldots\ldots\ldots$

(ix) $a-ar+ar^2-ar^3+\ldots\ldots\ldots$

3. কোন সূত্রের সাহায্য না লইয়া যোগ কর :

(i) $2+4+8+16+\ldots\ldots n$-তম পদ পর্যন্ত

(ii) $1+4^{-1}+4^{-2}+4^{-3}+\ldots\ldots n$-তম পদ পর্যন্ত

(iii) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+\ldots\ldots$50-তম পদ পর্যন্ত

(iv) $1-2+4-8+\ldots\ldots$প্রথম $2n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত

4. প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর :

(i) $5+55+555+\cdots\cdots$

(ii) $\cdot 7+\cdot 77+\cdot 777+\cdots\cdots$

(iii) $\cdot 9+\cdot 99+\cdot 999+\cdots\cdots$

(iv) $(1)+(1+2)+(1+2+2^2)+\cdots\cdots$

(v) $1+3\times 4+5\times 4^2+7\times 4^3+\cdots\cdots$

(vi) $3\times 2+5\times 2^2+7\times 2^3+\cdots\cdots$

(vii) $1+3+7+15+31+\cdots\cdots$ **[H. S. 1976]**

(viii) $1+2a+3a^2+4a^3+\cdots\cdots$

5. $(1)+(5+5^2)+(5^3+5^4+5^5)+\cdots\cdots$ এর জন্য দশম বিভাগের পদগুলির যোগফল নির্ণয় কর।

6. $3, -6, 12, -24, \cdots\cdots$ শ্রেণীর প্রথম কয়টি পদের যোগফল -1023 হইবে ?

7. কোন একটি শ্রেণীর r-তম পদ $(2r+1).2^r$ হইলে, ঐ শ্রেণীর প্রথম n-সংখ্যক পদের যোগফল নির্ণয় কর। **[P. U. 1972]**

8. কোন একটি গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম দুইটি পদের যোগফল 12 এবং উহার চতুর্থ ও পঞ্চম পদের সমষ্টি 324. ঐ শ্রেণীর প্রথম n-সংখ্যক পদের যোগফল নির্ণয় কর।

9. একটি গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম 10টি পদের যোগফল উহার প্রথম 5টি পদের যোগফলের 33 গুণ। ঐ শ্রেণীর সাধারণ অনুপাত বাহির কর। **[P. U. 1973]**

10. কোন গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম 6টি পদের সমষ্টি উহার প্রথম 3টি পদের সমষ্টির 9 গুণ। যদি উহার সপ্তম পদটি 384 হয়, তবে উহার প্রথম 10টি পদের সমষ্টি কত ?

11. একটি গুণোত্তর শ্রেণীর চতুর্থ পদ $\frac{1}{24}$ এবং সপ্তম পদ $\frac{1}{192}$. ঐ শ্রেণীর প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

12. কোন একটি গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদ 7 এবং শেষ পদ 448. ঐ শ্রেণীর পদগুলির যোগফল 889 হইলে শ্রেণীটি নির্ণয় কর।

13. কোন একটি গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদ a, সাধারণ অনুপাত r এবং প্রথম n-সংখ্যক পদের যোগফল S_n হইলে, $S_1+S_2+S_3+\cdots\cdots+S_n$ এর মান নির্ণয় কর।

14. S_1, S_2, S_3 যথাক্রমে যে কোন গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম n-সংখ্যক, $2n$-সংখ্যক ও $3n$-সংখ্যক পদের সমষ্টি হইলে দেখাও যে,

$$S_1(S_3 - S_2) = (S_2 - S_1)^2$$ [H. S. 1960]

15. কোন গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি S, গুণফল P এবং পদগুলির অন্যোন্যকগুলির সমষ্টি R হইলে প্রমাণ কর যে,

$$(S/R)^n = P^2.$$

16. $u_1, u_2, u_3, \cdots\cdots$ গুণোত্তরীয় প্রগতিতে থাকিলে, যেখানে উহাদের সাধারণ অনুপাত k, $u_1u_2 + u_2u_3 + \cdots\cdots + u_nu_{n+1}$ এর মান k এবং u_1 তে প্রকাশ কর। [H. S. 1975]

17. মান নির্ণয় কর :

(i) $\dfrac{\alpha}{(1+\beta)^{m+1}} + \dfrac{\alpha^2}{(1+\beta)^{m+2}} + \cdots\cdots + \dfrac{\alpha^n}{(1+\beta)^{m+n}}$.

(ii) $1 + 2\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) + 3\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^2 + \cdots\cdots + n\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n-1}$

(iii) $\left(1 + \dfrac{1}{r}\right)^2 + \left(1 + \dfrac{1}{r^3}\right)^2 + \left(1 + \dfrac{1}{r^5}\right)^2 + \cdots\cdots$

শ্রেণীর প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি।

18. একটি টেনিস্ বল প্রতিবারেই যে উচ্চতা হইতে সমতল ভূমিতে পতিত হয় ঠিক তাহার অর্ধেক উচ্চতায় উহা লাফাইয়া উপরে উঠে। বলটি 16 মিটার উচ্চতা হইতে পতিত হইলে উহা সমতলভূমিকে দশবার যখন আঘাত করিবে, তখন উহা মোট কত দূরত্ব অতিক্রম করিবে ? [Joint Ent. Ex. 1972]

19. কোন ব্যক্তি বিনা সুদে 6138 টাকার ঋণ গ্রহণ করিল এবং মোট 10টি কিস্তিতে সমূহ ঋণ পরিশোধ করিল। প্রতিটি কিস্তি যদি অব্যবহিত পূর্ব কিস্তির দ্বিগুণ হয়, তবে প্রথম ও শেষ কিস্তির পরিমাণ নির্ণয় কর।

20. এক ব্যক্তি তাহার বন্ধুকে 1200 টাকা এই শর্তে ধার দিল যে, তাহাকে কোন সুদ দিতে হইবে না ; কিন্তু যে মাসে ধার করিবে ঠিক তাহার পরবর্তী মাস হইতে প্রতি মাসে কিস্তিতে এক বৎসরে টাকা শোধ করিতে থাকিবে। যদি ঐ বন্ধু প্রথম চার মাসের প্রত্যেক মাসে 100 টাকা করিয়া, পঞ্চম মাসে পূর্বের চার মাসের দেওয়া টাকার সমান এবং এর পর যে কোন মাসে তাহার ঠিক পূর্বের মাসের দেওয়া টাকার পরিমাণের অর্ধেক পরিশোধ করিতে থাকে, তবে ঐ ব্যক্তি তাহার বন্ধুর নিকট হইতে মোট কত টাকা পাইবে ?

5-14. প্রগতিঘটিত বিবিধ প্রশ্ন।

[1] বিপরীত প্রগতি :

যদি কোন শ্রেণীর পদসমূহের অন্যোন্যকগুলি একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে, তাহা হইলে, ঐ শ্রেণীকে **বিপরীত শ্রেণী** (Harmonic Series) বলা হয় এবং উহার পদগুলি **বিপরীত প্রগতি** (Harmonic Progression বা সংক্ষেপে H. P.)-তে আছে বলা হয়।

উদাহরণস্বরূপ,

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$ শ্রেণীর পদগুলি বিপরীত প্রগতিতে আছে, কারণ, উহাদের অন্যোন্যকগুলি 1, 2, 3, 4,……সমান্তর প্রগতিতে আছে।

সাধারণভাবে,

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{a+b}, \frac{1}{a+2b}, \cdots\cdots$$

রাশিগুলি বিপরীত প্রগতিতে আছে।

[2] বিপরীত মধ্যক :

কতিপয় রাশি বিপরীত প্রগতিতে থাকিলে, তাহাদের প্রথম এবং শেষ রাশিদ্বয়ের মধ্যবর্তী রাশিগুলিকে প্রথম ও শেষ রাশিদ্বয়ের **বিপরীত মধ্যক** (Harmonic Means) বলা হয়।

তিনটি রাশি বিপরীত প্রগতিতে থাকিলে উহাদের মধ্য রাশিটিকে প্রথম ও তৃতীয় রাশিদ্বয়ের **বিপরীত মধ্যক** (H. M.) বলা হয়।

মনে করি, a এবং b দুইটি রাশি এবং x উহাদের বিপরীত মধ্যক। তাহা হইলে, a, x, b রাশিত্রয় বিপরীত প্রগতিতে থাকিবে। সুতরাং, $\frac{1}{a}, \frac{1}{x}, \frac{1}{b}$ সমান্তর প্রগতিতে থাকিবে।

$$\therefore \quad \frac{1}{x}-\frac{1}{a}=\frac{1}{b}-\frac{1}{x}$$

$$\text{বা,} \quad \frac{2}{x}=\frac{1}{b}+\frac{1}{a}$$

$$\text{বা,} \quad x=\frac{2ab}{a+b}.$$

সুতরাং a এবং b এর বিপরীত মধ্যক :

$$x=\frac{2ab}{a+b}.$$

5-15. সমান্তরীয় মধ্যক, গুণোত্তরীয় মধ্যক ও বিপরীত মধ্যকের পারস্পরিক সম্বন্ধ।

মনে করি, a এবং b দুইটি বাস্তব রাশি, যেখানে $b>a>0$. A, G এবং H যথাক্রমে a এবং b এর সমান্তরীয় মধ্যক, গুণোত্তরীয় মধ্যক ও বিপরীত মধ্যক হইলে,

$$A=\frac{a+b}{2}\ ;\ \ G=\sqrt{ab}\ ;\ H=\frac{2ab}{a+b}.$$

$$\therefore\quad H=\frac{2}{a+b}\cdot(ab)=\frac{G^2}{A}.$$

অর্থাৎ, $\boldsymbol{H=\frac{G^2}{A}}$. ... (1)

দ্রষ্টব্য ঃ (1) হইতে দেখা যাচ্ছে, A, G, H, রাশিত্রয় $G.\ P.$ তে আছে।

এখন, $A-G=\frac{a+b}{2}-(\sqrt{ab})=\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2>0$

$\therefore\ \boldsymbol{A>G}$. ... (2)

সুতরাং, যে কোন দুইটি অসমান ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার সমান্তরীয় মধ্যক উহাদের গুণোত্তরীয় মধ্যক অপেক্ষা বৃহত্তর।

এখন, (2) হইতে $AG>G^2$; বা, $G>\frac{G^2}{A}$

বা, $\boldsymbol{G>H}$ ... (3)

$\therefore\ \boldsymbol{A>G>H}$. ... (4)

মন্তব্য। এখানে, G এর ঋণাত্মক মান নেওয়া যাইবে না।

উদাহরণ 1. তিনটি সংখ্যা গুণোত্তরীয় প্রগতিতে আছে এবং তাহাদের যোগফল 70. যদি উভয় প্রান্তের সংখ্যাকে 4 দ্বারা এবং মধ্যককে 5 দ্বারা গুণ করিলে উহারা সমান্তর প্রগতি গঠন করে তবে সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর।

মনে করি, সংখ্যা তিনটি $\frac{a}{r}, a, ar$.

তাহা হইলে, $\frac{a}{r}+a+ar=70$

বা, $a\left(\frac{1}{r}+1+r\right)=70$ ... (1)

এবং $\frac{4a}{r}, 5a, 4ar$ সংখ্যা তিনটি সমান্তর প্রগতিতে আছে

সুতরাং, $\frac{4a}{r}+4ar=2\times 5a$ বা, $2\left(\frac{1}{r}+r\right)=5$

বা, $2r^2-5r+2=0$

$$\therefore \quad r=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5\pm 3}{4}$$

অর্থাৎ, $r=2$, বা, $\frac{1}{2}$ ... (2)

তাহা হইলে, (1) হইতে, $a=20$ ... (3)

সুতরাং, সংখ্যা তিনটি 10, 20, 40 অথবা 40, 20, 10.

উদাহরণ 2. যদি a, b, c রাশিত্রয় $G.\ P.$ তে থাকে তাহা হইলে দেখাও যে, $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{2b}, \frac{1}{b+c}$ রাশিত্রয় $A.\ P.$ তে থাকিবে।

যদি a, b, c রাশি তিনটি গুণোত্তরীয় প্রগতিতে থাকে তবে,

$$b^2=ac, \quad \text{বা,} \quad 2b^2=2ac$$

বা, $b^2-ac=ac-b^2$

বা, $ab+b^2-ac-bc=ab+ac-b^2-bc$

বা, $(a+b)(b-c)=(a-b)(b+c)$

বা, $\frac{a-b}{a+b}=\frac{b-c}{b+c}$ বা, $\frac{a-b}{2b(a+b)}=\frac{b-c}{2b(b+c)}$

$$\therefore \quad \frac{1}{2b}-\frac{1}{a+b}=\frac{1}{b+c}-\frac{1}{2b}$$

অর্থাৎ, $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{2b}, \frac{1}{b+c}$ সমান্তর প্রগতিতে থাকিবে।

দ্বিতীয় পদ্ধতি ঃ

যদি a, b, c গুণোত্তরীয় প্রগতিতে থাকে তবে,

$$\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=r=\text{সাধারণ অনুপাত};$$

$$\therefore \quad b=ar;\ c=br=ar^2.$$

তাহা হইলে, $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{1}{a+ar}+\frac{1}{ar+ar^2}$

$$=\frac{1}{a(1+r)}+\frac{1}{ar(1+r)}=\frac{r+1}{ar(r+1)}=\frac{1}{ar}=\frac{1}{b}.$$

অর্থাৎ, $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=2\times\frac{1}{2b}$

সুতরাং, $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{2b}, \frac{1}{b+c}$ সমান্তর প্রগতিতে থাকিবে।

প্রশ্নমালা 19

1. $8, x, y, 24$ সংখ্যা চারিটির প্রথম তিনটি গুণোত্তর শ্রেণীতে এবং শেষ তিনটি সমান্তর শ্রেণীতে থাকিলে, x এবং y এর মান নির্ণয় কর।

2. 2 এবং 9 এর মধ্যে এমন দুইটি সংখ্যা সংস্থাপন কর যেন উহাদের প্রথম তিনটি সংখ্যা সমান্তর প্রগতি এবং শেষ তিনটি গুণোত্তর প্রগতি গঠন কর।

3. চারিটি সংখ্যার প্রথম তিনটি সমান্তর প্রগতিতে এবং শেষ তিনটি গুণোত্তর প্রগতিতে আছে। যদি প্রথম ও শেষ পদের সমষ্টি 11 এবং অপর দুইটির সমষ্টি 10 হয়, তবে সংখ্যাগুলি নির্ণয় কর।

4. কোন সমান্তর শ্রেণীর ক্রমিক তিনটি সংখ্যার সমষ্টি 15. যদি উহাদের সহিত যথাক্রমে 1, 4, 19 যোগ করা হয়, তবে তাহারা গুণোত্তর প্রগতি গঠন করে। ঐ সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর।

5. কোন গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম তিনটি সংখ্যার গুণফল 512. কিন্তু প্রথমটির সহিত 8 এবং দ্বিতীয়টির সহিত 6 যোগ করিলে ঐ সংখ্যা তিনটি সমান্তর প্রগতি গঠন করে। গুণোত্তর শ্রেণীটি নির্ণয় কর।

6. একটি গুণোত্তর শ্রেণীর তিনটি ক্রমিক পদ যথাক্রমে একটি সমান্তর শ্রেণীর প্রথম, অষ্টম ও 22-তম পদ হইলে গুণোত্তর শ্রেণীর সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর। ঐ সমান্তর শ্রেণীর প্রথম 22টি পদের যোগফল 275 হইলে, উহার প্রথম পদটি নির্ণয় কর।

7. a, b, c সমান্তর প্রগতিতে এবং x, y, z গুণোত্তর প্রগতিতে থাকিলে, দেখাও যে, $x^{b-c}.\ y^{c-a}.\ z^{a-b}=1$

8. a, b, c ধনাত্মক বাস্তব রাশি হইলে এবং তাহারা গুণোত্তরীয় প্রগতিতে থাকিলে দেখাও যে, $a+c>2b$.

9. দুইটি রাশির সমান্তরীয় মধ্যক এবং গুণোত্তরীয় মধ্যক যথাক্রমে A এবং G হইলে, দেখাও যে, রাশি দুইটি $A \pm \sqrt{A^2-G^2}$

10. দুইটি অসমান ধনাত্মক বাস্তব রাশির সমান্তরীয় মধ্যক ও গুণোত্তরীয় মধ্যক যথাক্রমে A এবং G হইলে দেখাও যে,

$$A>G>\frac{G^2}{A}\ ;\ (G>0).$$

11. যদি $p,\ q,\ r$ সমান্তরীয় প্রগতিতে থাকে, তবে দেখাও যে, যে কোন গুণোত্তর শ্রেণীর p-তম, q-তম ও r-তম পদ তিনটি গুণোত্তর প্রগতিতে থাকিবে।

12. a, b, c রাশিত্রয় গুণোত্তরীয় প্রগতিতে আছে। যদি $a,\ b$ এর সমান্তরীয় মধ্যক x এবং b, c এর সমান্তরীয় মধ্যক y হয়, দেখাও যে,

$$(i)\quad \frac{a}{x}+\frac{c}{y}=2\ ;\qquad (ii)\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{b}.$$

13. যদি p, q, r সমান্তরীয় প্রগতিতে; q, r, s গুণোত্তরীয় প্রগতিতে এবং r, s, t, বিপরীত প্রগতিতে থাকে, দেখাও যে, p, r, t গুণোত্তরীয় প্রগতিতে থাকিবে।

[**Joint Ent. Ex. 1969**]

14. x, y, z রাশি তিনটি সমান্তরীয় প্রগতিতে আছে। যদি তাহাদের অন্যোন্যকগুলিও সমান্তরীয় প্রগতিতে থাকে, তবে দেখাও যে, x, y, z গুণোত্তরীয় প্রগতিতেও থাকিবে।

15. কোন বিপরীত শ্রেণীর p-তম পদ, q-তম ও r-তম পদ যথাক্রমে x, y, z, হইলে দেখাও যে, $(q-r)yz+(r-p)zx+(p-q)xy=0$.

16. যদি a, b, c সমান্তর প্রগতিতে এবং b, c, d বিপরীত প্রগতিতে থাকে, তবে দেখাও যে, $a : b = c : d$.

17. যদি a, x, y, b সমান্তর প্রগতিতে এবং a, u, v, b বিপরীত প্রগতিতে থাকে, তবে প্রমাণ কর যে, $xv = yu = ab$

18. a^2, b^2, c^2 সমান্তর প্রগতিতে থাকিলে, দেখাও যে, $b+c, c+a, a+b$ বিপরীত প্রগতিতে থাকিবে।

19. $a(b-c)x^2+b(c-a)x+c(a-b)=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় সমান হইলে দেখাও যে, a, b, c এর অন্যোন্যকগুলি সমান্তর প্রগতিতে থাকিবে।

20. যদি $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2b-a}+\frac{1}{2b-c}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, হয় $2a$ এবং $2c$-এর সমান্তরীয় মধ্যক $2b$ অথবা a এবং c এর বিপরীত মধ্যক $2b$.

21. $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots a_n$ বিপরীত প্রগতিতে থাকিলে দেখাও যে,

$$a_1a_2+a_2a_3+\cdots\cdots+a_{n-1}a_n=(n-1)a_1a_n$$

22. A, B, C এর নিকট মোট 1900 টাকা আছে এবং তাহাদের টাকার পরিমাণ যথাক্রমে গুণোত্তরীয় প্রগতি গঠন করে। যদি B এর নিকট 50 টাকা বেশী থাকিত তবে তাহাদের টাকার পরিমাণ সমান্তরীয় প্রগতি গঠন করিত। A এর নিকট সবচেয়ে বেশী টাকা থাকিলে, তাহাদের প্রত্যেকের নিকট কত পরিমাণ টাকা আছে?

23. কোন এক ব্যক্তি A, B, C, D নামক চারিটি দাতব্য প্রতিষ্ঠানকে মোট 21000 টাকা দান করিলেন। প্রথম তিনটি প্রতিষ্ঠানের প্রত্যেকটিকে যে পরিমাণ করিয়া টাকা তিনি দিলেন তাহারা সমান্তর প্রগতি এবং শেষ তিনটি প্রতিষ্ঠানের প্রত্যেকটিকে যে পরিমাণ করিয়া টাকা তিনি দিলেন তাহারা গুণোত্তরীয় প্রগতি গঠন করিলে, প্রত্যেকটি প্রতিষ্ঠানে তিনি কত পরিমাণ টাকা দিলেন? [দেওয়া আছে, A এবং D এর মোট প্রাপ্তি B এবং C এর মোট প্রাপ্তির (4/3) গুণ।]

লগারিদম্
(Logarithms)

6-1. উপস্থাপন।

[1] a এবং x দুইটি নির্দিষ্ট বাস্তব রাশি হইলে, যেখানে $a \neq 0$, এবং $a^x = N$ লিখিলে পূর্ববর্তী আলোচনা হইতে N এর মান নির্ণয় করা যাইতে পারে। যেমন,

(i) $2^3 = 8$, (এখানে, $a = 2$; $x = 3$; $\therefore \; N = 8$);

(ii) $(-3)^4 = 81$, (এখানে, $a = -3$; $x = 4$; $\therefore \; N = 81$);

(iii) $8^{\frac{1}{3}} = 2, 2\omega, 2\omega^2$; $\omega = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3})$;

(এখানে, $a = 8$; $x = \frac{1}{3}$; $\therefore \; N = 2, 2\omega, 2\omega^2$).

[2] যদি x এবং N দুইটি নির্দিষ্ট বাস্তব রাশি হয়, তাহা হইলে, $a^x = N$ হইতে a এর মান পূর্ববর্তী আলোচনা হইতে নির্ণয় করা যাইতে পারে। যেমন,

(i) $a^{\frac{1}{3}} = 2$ হইলে, $a = 2^3 = 8$;

(ii) $a^3 = 8$ হইলে, $a = 8^{\frac{1}{3}} = 2, 2\omega, 2\omega^2$; $\omega = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3})$;

(iii) $a^4 = 16$ হইলে, $a = 16^{\frac{1}{4}} = \pm 2, \; \pm 2i$; $i = \sqrt{-1}$.

[3] এখন প্রশ্ন হইল, x এর মান কি হইলে $2^x = 8$ হইবে ? এখানে পর্যবেক্ষণ দ্বারা বলা যাইতে পারে $x = 3$ হইলে। কিন্তু সাধারণভাবে, a এবং N যে কোন দুইটি নির্দিষ্ট বাস্তব রাশি হইলে x এর কি মান $a^x = N$ কে সিদ্ধ করিবে তাহা নির্ণয় করিবার পদ্ধতি এযাবৎ পূর্বে কোথাও আলোচিত হয় নাই। যেমন, x এর মান কত হইলে

(i) $2^x = 5$; (ii) $10^x = 4$; (iii) $(7{\cdot}5)^x = 10$; (iv) $(4{\cdot}5)^x = 7{\cdot}46$

ইত্যাদি সমীকরণকে x সিদ্ধ করিবে তাহা পূর্ববর্তী আলোচনা হইতে অথবা পর্যবেক্ষণ দ্বারা বলা সম্ভব নয়। এই সমুদয় ক্ষেত্রে x এর মান নির্ণয় করিবার যে নূতন প্রক্রিয়া প্রবর্তিত হইয়াছে তাহার নাম **লগারিদম্ (Logarithm)**।

6-2. লগারিদমের সংজ্ঞা।

a এবং N যে কোন দুইটি নির্দিষ্ট **ধনাত্মক** বাস্তব রাশি হইলে যেখানে $a \neq 1$, x এর মান একটি এবং কেবলমাত্র একটি থাকিবে এবং তাহা বাস্তব রাশি হইবে, যাহার জন্য

$$a^x = N.$$

এইরূপ ক্ষেত্রে, x সংখ্যাটিকে a নিধানের সাপেক্ষে N এর **লগারিদম্ (Logarithm)** বা সংক্ষেপে লগ (**log**) বলা হয় এবং ইহাকে লেখা হয়—

$$x = \log_a N$$

বিপরীতক্রমে, $\log_a N = x$ হইলে, $N = a^x$ কে বুঝাইবে।

দ্রষ্টব্য : a এবং N নির্দিষ্ট ধনাত্মক বাস্তব রাশি হইলে, $(a \neq 1)$, $a^x = N$ সমীকরণকে x এর একটি এবং কেবলমাত্র একটি মান সিদ্ধ করিবে, এবং তাহা বাস্তব রাশি হইবে ; ইহার প্রমাণ এই পাঠ্যসূচীর বহির্ভূত।

উদাহরণস্বরূপ,

(a) (i) $4^3 = 64$; $\therefore\ 3 = \log_4 64$;

(ii) $10^2 = 100$; $\therefore\ 2 = \log_{10} 100$;

(iii) $8^{\frac{1}{6}} = \sqrt{2}$; $\therefore\ \frac{1}{6} = \log_8 \sqrt{2}$;

(iv) $5^{-2} = \cdot 04$; $\therefore\ -2 = \log_5(\cdot 04)$.

(b) (i) $\log_3 9 = 2$; $\because\ 3^2 = 9$;

(ii) $\log_8 4 = \frac{2}{3}$; $\because\ 8^{\frac{2}{3}} = 4$;

(iii) $\log_2 K = = -3$; $\therefore\ K = 2^{-3} = \frac{1}{8}$;

(iv) $\log_a(\frac{1}{16}) = 2$; $\therefore\ a^2 = \frac{1}{16}$ $\therefore\ a = \frac{1}{4}$, $(\because\ a > 0)$.

মন্তব্য :

[1] $1^1 = 1$; $1^2 = 1$; $1^3 = 1$; $1^4 = 1$; ইত্যাদি।
$1^0 = 1$; $1^{-1} = 1$; $1^{-2} = 1$; $1^{-3} = 1$; ইত্যাদি।

সুতরাং, দেখা যাইতেছে, যদি $a = 1$ এবং $N = 1$ ধরা হয়, তাহা হইলে, $\log_a N$ এর মান অনির্দিষ্ট হইবে।

আবার, যেহেতু, $1^{\frac{1}{3}} = 1, \omega, \omega^2$, যেখানে, $\omega = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3})$,

যদি, $a = 1$ এবং $N = 1$, অথবা, $N = \omega$, অথবা, $N = \omega^2$ ধরা হয়, $\log_a N$ এর মান প্রত্যেক ক্ষেত্রেই $\frac{1}{3}$ হইবে। এই সমস্ত অসুবিধার জন্য লগারিদমের নিধান হিসাবে 1 ব্যবহৃত হয় না।

[2] $0^1 = 0$; $0^2 = 0$; $0^3 = 0$; ইত্যাদি।

আবার, 0^0 ; 0^{-1} ; 0^{-2} ; ইত্যাদি অনির্ণীত। সুতরাং যদি $a = 0$ ধরা হয়, তাহা হইলে, $\log_a N$ এর মান হয় অনির্দিষ্ট অথবা অনির্ণীত। সেই কারণে লগারিদমের নিধান হিসাবে 0 (শূন্য) ব্যবহৃত হয় না।

[3] এখন $3^2 = 9$; আবার $(-3)^2 = 9$; সুতরাং, লগারিদমের নিধান যদি ঋণাত্মক সংখ্যা ব্যবহৃত হয় তাহা হইলে $\log_a 9 = 2$ হইতে $a = 3$ এবং $a = -3$ হইবে অর্থাৎ দুইটি বিভিন্ন নিধানের সাপেক্ষে একই সংখ্যার লগারিদম্ কেবলমাত্র একটি সংখ্যা 2 হইতেছে। এই কারণে, লগারিদমের নিধান হিসাবে কখনই ঋণাত্মক সংখ্যা ব্যবহার করা হইবে না।

[4] a যে কোন নির্দিষ্ট ধনাত্মক বাস্তব রাশি এবং x যে কোন নির্দিষ্ট বাস্তব রাশি হইলে, a^x-এর মান কখনই ঋণাত্মক হইতে পারে না।

সুতরাং $a^z = -N$ এর ক্ষেত্রে, যেখানে N ধনাত্মক বাস্তব রাশি এবং a ধনাত্মক বাস্তব রাশি কিন্তু $a \neq 1$, z এর মান কোন বাস্তব রাশি হইতে পারে না। সুতরাং, এইরূপ ক্ষেত্রে নিধান a এর সাপেক্ষে ঋণাত্মক বাস্তব রাশি $-N$ এর লগারিদ্‌ম্ জটিলরাশি (complex number) ভিন্ন কোন বাস্তব রাশি হইতে পারে না। ঋণাত্মক রাশির লগারিদ্‌ম্ এই পাঠ্যসূচীর বহির্ভূত বলিয়া এই পুস্তকে তাহা আলোচিত হইবে না।

[5] $\log_{64}64 = 1$; $\because$ $64^1 = 64$;
$\log_8 64 = 2$; $\because$ $8^2 = 64$;
$\log_4 64 = 3$; $\because$ $4^3 = 64$;
$\log_2 64 = 6$; $\because$ $2^6 = 64$.

সুতরাং, দেখা যাইতেছে, বিভিন্ন নিধানের সাপেক্ষে একই রাশির লগারিদ্‌ম্ বিভিন্ন রাশি হইতে পারে। সেইজন্য কোন সংখ্যার লগারিদ্‌ম্ নির্ণয় করিতে হইলে উহার ক্ষেত্রে নিধান নির্দিষ্ট হইতে হইবে। যে কোন নির্দিষ্ট ধনাত্মক সসীম বাস্তব রাশি a ($\neq 1$), যে কোন ধনাত্মক বাস্তব রাশির লগারিদ্‌মের নিধান হিসাবে ব্যবহৃত হইতে পারে। তবে ব্যবহারের সুবিধার জন্য লগারিদ্‌মের নিধান হিসাবে 10 এবং e ($= 2{\cdot}71828\cdots\cdots$) সংখ্যাদ্বয় ব্যবহৃত হয়।

6-3. সাধারণ লগারিদ্‌ম্ এবং নেপিরিয়ান্ লগারিদ্‌ম্।

(a) 10 কে নিধান হিসাবে ব্যবহার করিয়া বিভিন্ন ধনাত্মক বাস্তব রাশির যে লগারিদ্‌ম্ নির্ণয় করা হয় তাহাদিগকে **সাধারণ লগারিদ্‌ম্** (Common Logarithms) বলা হয়। এই পদ্ধতি যিনি প্রথম প্রবর্তন করেন তাহার নাম **Henry Briggs.** সেইজন্য তাহার নামানুসারে এই পদ্ধতির অপর নাম *Briggsian System.*

লিখিবার সুবিধার জন্য সাধারণতঃ নিধান 10 কে উহ্য রাখা হইয়া থাকে। অবশ্য, যদি কোন প্রশ্নে সমুদয় লগের একই নিধান থাকে তাহা হইলে সুবিধার জন্য উহাদের নিধানকে উহ্য রাখা যাইতে পারে।

(a) গণিতের বিভিন্ন শাখায় e দ্বারা যে সংখ্যাটিকে বুঝানো হইয়া থাকে তাহা একটি অমেয় রাশি (Incommensurable quantity) যাহার মান 5 দশমিক স্থান পর্যন্ত $2{\cdot}71828$, ($2 < e < 3$).

e কে নিধান হিসাবে ব্যবহার করিয়া বিভিন্ন ধনাত্মক বাস্তব রাশির লগারিদম্ নির্ণয় করার পদ্ধতি **John Napier** আবিষ্কার করেন। সেইজন্য তাহার নামানুসারে এই পদ্ধতির নাম **নেপিরিয়ান্ পদ্ধতি** (*Napierian System*)

6-4. কতিপয় অতি প্রয়োজনীয় সিদ্ধান্ত :

[1] ধরা যাক্, a যে কোন নির্দিষ্ট ধনাত্মক বাস্তব রাশি কিন্তু $a \neq 1$.

(i) $\because \; a^0 = 1 \;; \quad \therefore \; \log_a 1 = 0 \;;$

(ii) $\because \; a^1 = a \;; \quad \therefore \; \log_a a = 1 \;;$

(iii) $\because \; a^{-1} = \frac{1}{a}; \quad \therefore \; \log_a \left(\frac{1}{a}\right) = -1 \;;$

(iv) $\because \; \left(\frac{1}{a}\right)^{-1} = a \;; \quad \therefore \; \log_{\frac{1}{a}} a = -1 \;;$

[2] মনে করি, a এবং N দুইটি নির্দিষ্ট ধনাত্মক বাস্তব রাশি, যেখানে $a \neq 1$. তাহা হইলে,

$$a^x = N \quad \cdots \quad (1)$$

এই সমীকরণ হইতে, লগারিদমের সংজ্ঞা অনুযায়ী

$$x = \log_a N \quad \cdots \quad (2)$$

এখন, (2) হইতে x এর মান (1)-তে বসাইয়া পাই,

$$a^{\log_a N} = N \quad \cdots \quad (3)$$

এখন, p যে কোন বাস্তব রাশি হইলে, (3) হইতে পাই,

$$\left(a^{\log_a N}\right)^p = N^p$$

অর্থাৎ, $a^{p \log_a N} = N^p \quad \cdots \quad (4)$

স্থতরাং, $N^p = e^{p \log_e N} \quad \cdots \quad (5)$

উদাহরণ স্বরূপ, যেমন,

(a) (i) $\log_e e = 1$; (ii) $\log_e 1 = 0$; (iii) $\log_{10} 1 = 0$.

(b) (i) $\log_5 5 = 1$; (ii) $\log_8 8 = 1$; (iii) $\log_{10} 10 = 1$.

(c) (i) $\log_4 (\frac{1}{4}) = \log_{\frac{1}{4}} 4 = -1$; (ii) $\log_{10} (\frac{1}{10}) = \log_{\frac{1}{10}} 10 = -1$.

(d) (i) $5^{\log_5 3} = 3$; (ii) $a^{\log_a 4} = 4$.

(e) (i) $3^{2 \log_3 4} = 4^2 = 16$; (ii) $e^{4 \log_e 2} = 2^4 = 16$.

(f) (i) $e^{2 \log_e x} = x^2$; (ii) $e^{-3 \log_e x} = x^{-3}$.

6-5. লগারিদ্মের প্রধান সূত্রাবলী।

a, b ধনাত্মক বাস্তব রাশি কিন্তু $a \neq 1, b \neq 1$ এবং m, n বাস্তব রাশি হইলে,

I. $\log_a (m \times n) = \log_a m + \log_a n, \quad (m > 0, n > 0)$;

II. $\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n, \quad (m > 0, n > 0)$;

III. $\log_a (m^n) = n \log_a m, \quad (m > 0)$;

IV. $\log_a m = \log_a b \times \log_b m, \quad (m > 0)$

প্রমাণ :

I. ধরি, $\log_a m = x$; $\log_a n = y$; এবং $\log_a (m \times n) = z$.

তাহা হইলে, লগারিদ্মের সংজ্ঞা হইতে,

$$a^x = m \; ; \; a^y = n \; ; \; a^z = m \times n.$$

$\therefore \quad a^z = a^x \times a^y = a^{x+y}$. সুতরাং, $z = x + y$

$\therefore \quad \log_a (m \times n) = \log_a m + \log_a n$.

অনুসিদ্ধান্ত। $\log_a (m \times n \times p) = \log_a m + \log_a n + \log_a p$.

II. ধরি, $\log_a m = x$; $\log_a n = y$; এবং $\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = p$.

তাহা হইলে, লগারিদ্মের সংজ্ঞা হইতে, $a^x = m$; $a^y = n$; $a^p = \frac{m}{n}$.

$\therefore \quad a^p = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$. সুতরাং, $p = x - y$

$\therefore \quad \log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$.

III. ধরি, $\log_a m = x$; এবং $\log_a (m^n) = q$.

তাহা হইলে, লগারিদ্মের সংজ্ঞা হইতে,

$$a^x = m \text{ এবং } a^q = m^n.$$

$\therefore \quad a^q = m^n = (a^x)^n = a^{nx}$. সুতরাং, $q = nx$.

$\therefore \quad \log_a (m^n) = n \log_a m$.

IV. ধরি, $\log_a b = x$; $\log_b m = y$; $\log_a m = z$.

তাহা হইলে, লগারিদ্মের সংজ্ঞা হইতে,

$$a^x = b \; ; \; b^y = m \; ; \; a^z = m.$$

$\therefore \quad a^z = m = b^y = (a^x)^y = a^{xy}$. সুতরাং, $z = xy$.

$\therefore \quad \log_a m = \log_a b \times \log_b m$.

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ

[1] $\log_a m = \log_a b \times \log_b m$ হইতে পাই,

$$\log_b m = \frac{\log_a m}{\log_a b}$$

[2] $\log_a m = \log_a b \times \log_b m$ এর মধ্যে $m = a$ বসাইয়া পাই,

$$\log_a a = \log_a b \times \log_b a$$

অর্থাৎ, $\log_a b \times \log_b a = 1$

অথবা, $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

অবশ্য অন্যভাবে,

$\log_a b = x$ এবং $\log_b a = y$ ধরিয়া পাই,

$a^x = b$ এবং $b^y = a$.

$\therefore \quad a = b^y = (a^x)^y = a^{xy}$

স্নতরাং, $xy = 1$

$\therefore \quad \log_a b \times \log_b a = 1.$

[3] a, b, x ধনাত্মক বাস্তব রাশি হইলে, যেখানে $a \neq 1,\ b \neq 1,\ x \neq 1,$

$$a^{\log_x b} = b^{\log_x a}.$$

ধরি, $a^{\log_x b} = A$

তাহা হইলে,

$$\log_x A = \log_x \left\{a^{\log_x b}\right\} = \log_x b \times \log_x a$$

$$= \log_x a \times \log_x b = \log_x \left\{b^{\log_x a}\right\}$$

$\therefore \quad A = b^{\log_x a}$

বা, $a^{\log_x b} = b^{\log_x a}$

উদাহরণ 1. সরল কর :—

(i) $\log_4 64$; (ii) $\log_3 (\frac{1}{27})$; (iii) $\log_{\sqrt{3}} 81.$

(i) $\log_4 64 = \log_4 (4^3) = 3 \log_4 4 = 3 \times 1 = 3.$

অবশ্য অন্যভাবে,

ধরি, $\log_4 64 = x. \quad \therefore\ 4^x = 64 = 4^3. \quad \therefore\ x = 3.$

(ii) $\log_3 (\frac{1}{27}) = \log_3 1 - \log_3 27 = 0 - \log_3 (3^3)$

$= -3 \log_3 3 = -3 \times 1 = -3.$

অবশ্য অন্যভাবে,

ধরি, $\log_3 (\frac{1}{27}) = x$;

$\therefore\ 3^x = \frac{1}{27} = 3^{-3}$; $\therefore\ x = -3$.

(iii) ধরি, $\log_{\sqrt{3}} 81 = x$;

$\therefore\ (\sqrt{3})^x = 81$; বা, $3^{\frac{x}{2}} = 3^4$; $\therefore\ x = 8$.

$\therefore\ \log_{\sqrt{3}} 81 = 8$.

উদাহরণ 2. নিধান $2\sqrt{5}$ এর সাপেক্ষে 8000 এর লগারিদম্ নির্ণয় কর।

ধরি, $\log_{2\sqrt{5}} 8000 = x$.

$\therefore\ (2\sqrt{5})^x = 8000$; বা, $(20)^{\frac{x}{2}} = (20)^3$

$\therefore\ \frac{x}{2} = 3$; বা, $x = 6$.

$\therefore$ নির্ণেয় লগারিদম্ = 6.

উদাহরণ 3. $\log_a b = 10$ এবং $\log_{6a} (32b) = 5$ হইলে a এর মান নির্ণয় কর।

যেহেতু, $\log_a b = 10$, $\therefore\ a^{10} = b$;

$\because\ \log_{6a} (32b) = 5$, $\therefore\ (6a)^5 = 32b$.

তাহা হইলে,

$(6a)^5 = 32 \times b = 32 \times a^{10} = 2^5 \times (a^2)^5 = (2a^2)^5$.

$\therefore\ 6a = 2a^2$; বা, $a = 3$; $\because\ a \neq 0$.

উদাহরণ 4. সরল কর :

(i) $e^{-2\log_e 4}$, $(2 < e < 3)$; (ii) $a^{3\log_a 2}$, $(a > 0, a \neq 1)$;

(iii) $b^{\log_{b^2} 4}$, $(b > 0, b \neq 1)$; (iv) $\frac{1}{\log_{40} 10} - \frac{2}{\log_4 100}$.

(i) $e^{p\log_e N} = N^p$ সূত্রের সাহায্যে,

$e^{-2\log_e 4} = 4^{-2} = \frac{1}{16}$.

অবশ্য অন্যভাবে,

ধরি, $e^a = 4$; $\therefore\ \log_e 4 = a$

$\therefore\ e^{\log_e 4} = e^a = 4$; $\therefore\ e^{-2\log_e 4} = 4^{-2} = \frac{1}{16}$.

(ii) $a^{p \log_a N} = N^p$ সূত্রের সাহায্যে,

$a^{3 \log_a 2} = 2^3 = 8.$

অবশ্য অন্যভাবে,

ধরি, $a^k = 2$; $\quad \therefore \; k = \log_a 2$

$\therefore \; a^{\log_a 2} = a^k = 2.$

$\therefore \; a^{3 \log_a 2} = 2^3 = 8.$

(iii) এখানে, $(b^2)^{\log_{b^2} 4} = 4^1$

অর্থাৎ, $b^{2 \log_{b^2} 4} = 4$

$\therefore \; b^{\log_{b^2} 4} = 4^{\frac{1}{2}} = 2.$

অবশ্য অন্যভাবে,

ধরি, $b^{2k} = 4$

বা, $(b^2)^k = 4, \quad \therefore \; k = \log_{b^2} 4$;

$\therefore \; b^{2 \log_{b^2} 4} = 4$

$\therefore \; b^{\log_{b^2} 4} = 4^{\frac{1}{2}} = 2.$

(iv) $\dfrac{1}{\log_{40} 10} - \dfrac{2}{\log_4 100}$

$= \log_{10} 40 - \dfrac{2}{2 \log_4 10}$

$= \log_{10} 40 - \log_{10} 4 = \log_{10} (\frac{40}{4})$

$= \log_{10} 10 = 1$

উদাহরণ 5. সরল কর :

$7 \log \frac{16}{15} + 5 \log \frac{25}{24} + 3 \log \frac{81}{80}.$

প্রদত্ত রাশিমালা

$= 7\{\log 16 - \log 15\} + 5\{\log 25 - \log 24\} + 3\{\log 81 - \log 80\}$

$= 7\{\log 2^4 - \log(3 \times 5)\} + 5\{\log 5^2 - \log(3 \times 2^3)\}$
$\qquad + 3\{\log(3^4) - \log(5 \times 2^4)\}$

$= 7\{4 \log 2 - \log 3 - \log 5\} + 5\{2 \log 5 - \log 3 - 3 \log 2\}$
$\qquad + 3\{4 \log 3 - \log 5 - 4 \log 2\}$

$= (28 - 15 - 12) \log 2 + (12 - 7 - 5) \log 3 + (10 - 7 - 3) \log 5$

$= \log 2.$

দ্রষ্টব্য : এখানে, লগারিদমের **নিধান** একই (অভিন্ন) ধরা হইয়াছে এবং উহ্য রাখা হইয়াছে।

উদাহরণ 6. সরল কর :

(i) $\log_b a \times \log_c b \times \log_a c$

(ii) $\log_{\frac{1}{b}} a \times \log_{\frac{1}{c}} b \times \log_{\frac{1}{a}} c$

(i) $\log_b a \times \log_c b \times \log_a c$

$= (\log_b a \times \log_c b) \times \log_a c$

$= \log_c a \times \log_a c = 1.$

(ii) মনে করি,

$$\log_{\frac{1}{b}} a = x \; ; \; \log_{\frac{1}{c}} b = y \; ; \; \log_{\frac{1}{a}} c = z.$$

তাহা হইলে,

$$\left(\frac{1}{b}\right)^x = a \; ; \quad \left(\frac{1}{c}\right)^y = b \; ; \quad \left(\frac{1}{a}\right)^z = c$$

অর্থাৎ, $a = b^{-x}$; $b = c^{-y}$; $c = a^{-z}$.

$\therefore \quad a = b^{-x} = (c^{-y})^{-x} = c^{xy} = (a^{-z})^{xy}$

$= a^{-xyz}$.

$\therefore \quad -xyz = 1$ অথবা, $xyz = -1$.

স্থতরাং প্রদত্ত রাশিমালার মান $= -1$.

উদাহরণ 7. যদি $\dfrac{\log x}{y-z} = \dfrac{\log y}{z-x} = \dfrac{\log z}{x-y}$ হয়, তবে দেখাও যে, $x^x y^y z^z = 1$.

[Joint Ent. Ex. 1972 ; H. S. Comp. 1974]

মনে করি, $\dfrac{\log x}{y-z} = \dfrac{\log y}{z-x} = \dfrac{\log z}{x-y} = k$.

তাহা হইলে,

$$\log x = k\,(y-z) \; ; \; \log y = k\,(z-x) \; ; \; \log z = k\,(x-y).$$

স্থতরাং,

$\log (x^x y^y z^z) = x \log x + y \log y + z \log z$

$= k\{x(y-z) + y(z-x) + z(x-y)\}$

$= k \times 0 = 0 = \log 1.$

$\therefore \quad x^x y^y z^z = 1.$

উদাহরণ 8. দেখাও যে,

$$x^{\log y-\log z}\times y^{\log z-\log x}\times z^{\log x-\log y}=1.$$

[**C. U. Int. 1944**]

মনে করি,

$$x^{\log y-\log z}\times y^{\log z-\log x}\times z^{\log x-\log y}=k;$$

$$\therefore\ \log k=(\log y-\log z)\log x+(\log z-\log x)\log y+(\log x-\log y)\log z$$

$$=0=\log 1$$

$$\therefore\ k=1.$$

উদাহরণ 9. যদি $y=10^{\frac{1}{1-\log_{10}x}}$ এবং $z=10^{\frac{1}{1-\log_{10}y}}$ হয়, তবে দেখাও যে, $x=10^{\frac{1}{1-\log_{10}z}}$. [**H. S. 1973**]

যেহেতু, $y=10^{\frac{1}{1-\log_{10}x}}$; $\therefore\ \log_{10}y=\dfrac{1}{1-\log_{10}x}$

আবার, $\because\ z=10^{\frac{1}{1-\log_{10}y}}$; $\therefore\ \log_{10}z=\dfrac{1}{1-\log_{10}y}$

তাহা হইলে,

$$1-\log_{10}z=1-\frac{1}{1-\log_{10}y}=\frac{\log_{10}y}{\log_{10}y-1}.$$

$$\therefore\ \frac{1}{1-\log_{10}z}=\frac{\log_{10}y-1}{\log_{10}y}=1-\frac{1}{\log_{10}y}$$

$$=1-(1-\log_{10}x)=\log_{10}x;$$

$$\therefore\ x=10^{\frac{1}{1-\log_{10}z}}$$

প্রশ্নমালা 20

1. কেবল পর্য্যবেক্ষণ দ্বারা মান নির্ণয় কর :

(*i*) $\log_2 2$; (*ii*) $\log_5 5$; (*iii*) $\log_{10} 10$; (*iv*) $\log_3 9$;
(*v*) $\log_2 8$; (*vi*) $\log_3 81$; (*vii*) $\log_9 3$; (*viii*) $\log_{64} 4$
(*ix*) $\log_3 \frac{1}{3}$; (*x*) $\log_5 \frac{1}{625}$; (*xi*) $\log_{\frac{1}{3}} 3$; (*xii*) $\log_{\frac{1}{4}} 64$;
(*xiii*) $\log_{\frac{1}{4}} (\frac{1}{4})$; (*xiv*) $\log_{\frac{1}{3}} (\frac{1}{81})$; (*xv*) $\log_{\sqrt{2}} 8$;

(*xvi*) $\log_{\sqrt{5}}(5\sqrt{5})$ (*xvii*) $5^{2\log_5 3}$; (*xviii*) $e^{3\log_e 2}$

(*xix*) $10^{-2\log_{10} 5}$ (*xx*) $5^{2\log_{25} 4}$; (*xxi*) $\log_{10} 5+\log_{10} 2$;

(*xxii*) $\log_4 20-\log_4 5$ (*xxiii*) $\log_5 20+\log_5 \frac{5}{4}$;

(*xxiv*) $\log_5 7\times\log_7 5$; (*xxv*) $2\log_4 3\times\log_9 4$;

(*xxvi*) $2\log_5 2+2\log_5 \frac{5}{2}$.

2. সরল কর :

(*i*) $\log_{2\sqrt{3}}(144)$; (*ii*) $\log_{3\sqrt{2}} 324$; (*iii*) $\log_{3\sqrt{2}} 5832$

(*iv*) $\log_{.01} 10000$; (*v*) $\log_a 512$; $a=\frac{1}{4}\sqrt{2}$; (*vi*) $\log_{a^x}(a^y)$.

3. নিম্নোল্লিখিতগুলির কোন্‌টি ঠিক এবং কেন তাহার যুক্তি দেখাও :

(*i*) $\log_7 \frac{1}{7}=\log_{\frac{1}{7}} 7$; (*ii*) $\log_5 9=(\log_5 3)^2$

(*iii*) $\log_e (x+y)=\log_e x+\log_e y$;

(*iv*) $\log_5 (a-b)=\log_5 a-\log_5 b$;

(*v*) $\log_{10}(1+2+3)=\log_{10} 1+\log_{10} 2+\log_{10} 3$;

(*vi*) $\log_{10}(3+7+\frac{1}{2})=\log_{10} 3+\log_{10} 7+\log_{10} \frac{1}{2}$.

4. সঠিক উত্তরটি চিহ্নিত কর :

(*i*) $\log_a 9=2$ হইলে, $a=3, -3, \pm 3$;

(*ii*) $\log_3 \frac{1}{9}=N$ হইলে, $N=2, -2, \frac{1}{3}$;

(*iii*) $\log_2 \log_2 x=1$ হইলে, $x=1, 2, 4$;

(*iv*) $(\log a)^2+(\log b)^2=\{\log(ab)\}^2-N$ হইলে,

$$N=2\log(ab),\ 2(\log a)(\log b),\ \log(a^2b).$$

5. সরল কর :

(*i*) $\log\sqrt{\frac{15}{14}}+\log\sqrt{\frac{42}{45}}$;

(*ii*) $\log\frac{9}{14}+\log\frac{35}{24}-\log\frac{15}{16}$;

(*iii*) $\log_2 \sqrt{\frac{1}{2}}+\log_2 \sqrt{\frac{2}{3}}+\log_2 \sqrt{\frac{3}{4}}$.

6. যদি $a^2+b^2=7ab$ হয়, দেখাও যে,

$$\log a+\log b=2\log\left(\frac{a+b}{3}\right).$$

7. দেখাও যে,

(i) $\log(1+3+5+7) = 4\log 2$; (ii) $\log_2 \log_2 \log_2 16 = 1$;

(iii) $\log_4 \log_4 \log_4 256 = 0$;

(iv) $(\log a)^2 - (\log b)^2 = \log(ab) \cdot \log\left(\frac{a}{b}\right)$. (v) $a^x = b^{(x \log_b a)}$.

8. (i) যদি $\sqrt{2}$ নিধানের সাপেক্ষে কোন একটি সংখ্যার লগারিদম্ a হয়, তবে $2\sqrt{2}$ নিধানের সাপেক্ষে ঐ সংখ্যার লগারিদম্ কত হইবে ?

(ii) যদি, $\log_{10} a - \log_{10} \sqrt{a} = \dfrac{2}{\log_{10} a}$ হয়, তবে a এর মান কত ?

(iii) $\log_{10} 242 = a$, $\log_{10} 80 = b$, $\log_{10} 45 = c$ হইলে $\log_{10} 36$ এবং $\log_{10} 66$ এর মান a, b, c তে বাহির কর। [**Joint Ent. Ex. 1971**]

9. তিনটি ধনাত্মক বাস্তব রাশি a, b, c গুণোত্তরীয় প্রগতিতে থাকিলে, দেখাও যে,

(i) $\log a$, $\log b$, $\log c$ সমান্তরীয় প্রগতিতে থাকিবে ; [**H. S. 1960**]

(ii) $\log_a x$, $\log_b x$, $\log_c x$, বিপরীত প্রগতিতে থাকিবে।

10. দেখাও যে, $\log_4 2 \times \log_2 3 = \log_4 5 \times \log_5 3$.

[**Joint Ent. Ex. 1969**]

11. a, b, c ধনাত্মক বাস্তব রাশি হইলে প্রমাণ কর :

$\log_b a \times \log_c b = \log_c a$, $(b, c, \neq 1)$. [**H. S. 1974**]

12. প্রমাণ কর : $\log_a m = \log_b m \times \log_a b$, [**H. S, 1967**]

13. প্রমাণ কর :

$\log_a b \times \log_b c \times \log_c a = 1$ [**H. S. 1975 ; P. U. 1974**]

14. সরল কর :

(i) $3\log 2 + 2\log \frac{2}{3} + \log \frac{9}{5} + 3\log \frac{5}{2}$

(ii) $7\log \frac{16}{15} + 5\log \frac{25}{24} + 3\log \frac{81}{80}$ [**P. U. 1963**]

(iii) $7\log \frac{10}{9} - 2\log \frac{25}{24} + 3\log \frac{81}{80}$. [**Cal. Int. 1923**]

(iv) $\log_{10} 2 + 16\log_{10} \frac{16}{15} + 12\log_{10} \frac{25}{24} + 7\log_{10} \frac{81}{80}$

[**H. S. Comp. 1974 ; P.U. 1960**]

(v) $\log_{10} \frac{384}{5} + \log_{10} \frac{81}{32} + \log_{10} \frac{5}{3} + \log_{10} \frac{1}{9}$ [**H. S. 1960**]

(vi) $\log_{10} \frac{384}{5} + \log_{10} \frac{513}{32} + \log_{10} \frac{5}{27} - \log_{10} \frac{57}{25}$.

(vii) $\dfrac{\log \frac{9}{5} + \log \frac{35}{33} - \log \frac{7}{11}}{\log \frac{5}{3} - \log \frac{7}{18} + \log \frac{7}{15}}$

15. দেখাও যে

$$5^{\log 7} = 7^{\log 5},$$

16. দেখাও যে,

(*i*) $\log\frac{b^n}{c^n} + \log\frac{c^n}{a^n} + \log\frac{a^n}{b^n} = 0$ (*ii*) $\log\frac{a^2}{bc} + \log\frac{b^2}{ca} + \log\frac{c^2}{ab} = 0$

17. যদি $a^{2-x} \cdot b^{5x} = a^{x+3} . b^{3x}$,

দেখাও যে, $x \log (b/a) = \frac{1}{2} \log a$ [**H. S. 1970**]

18. যদি $a^x = b^y = c^z$ এবং $b^2 = ac$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2}{y}$$ (**H.S. 1972**)

19. দেখাও যে,

$$\frac{\log_a x}{\log_{ab} x} = 1 + \log_a b$$ [**Joint Ent. Ex. 1976**]

20. সমাধান কর :

$$\frac{1}{\log_x 10} + 2 = \frac{2}{\log_{\cdot 5} 10}$$ [**H. S. 1976**]

21. দেখাও যে,

$$\log_a{}^m \times \log_b{}^n = \log_b{}^m \times \log_a{}^n$$

22. যদি, $\log_{10}(n+1) - \log_{10} n < \log_{10} 1\cdot01$ হয়, তাহা হইলে, n-এর লঘিষ্ঠ ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যার মান কত হইবে ? [**P. U. 1975**]

23. কোন তালিকার সাহায্য না লইয়া x এর মান নির্ণয় কর, যদি

(*i*) $2^{1+x} - 2^{1-x} = 3$ হয়। [**Joint Ent. Ex. 1966**]

(*ii*) সমীকরণটি $2^{1+x} + 2^{-x} = 3$ হইলে, কি হইবে ?

(*iii*) $a^x = b^y$; $b^x = a^y$; $a \neq b, ab \neq 1$.

(*iv*) $2^x = 3^y, 2^{y+1} = 3^{x-1}$.

24. যদি $a = xy^{p-1}$, $b = xy^{q-1}$, $c = xy^{r-1}$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$(q-r)\log a + (r-p)\log b + (p-q)\log c = 0.$$

25. a, b, c যথাক্রমে কোন গুণোত্তরীয় শ্রেণীর p-তম, q-তম ও r-তম পদ হইলে দেখাও যে, $(q-r)\log a + (r-p)\log b + (p-q)\log c = 0$

[**Joint Ent. Ex. 1968**]

26. দেখাও যে, $\log_{a^2} a \times \log_{b^2} b \times \log_{c^2} c = \frac{1}{8}$.

27. দেখাও যে,

$$a^{\log_{a^2} x} \times b^{\log_{b^2} y} \times c^{\log_{c^2} z} = \sqrt{xyz}. \quad \text{[H. S. 1976]}$$

28. x, y, z ধনাত্মক বাস্তব রাশি হইলে দেখাও যে,

$$(yz)^{\log y - \log z} \times (zx)^{\log z - \log x} \times (xy)^{\log x - \log y} = 1$$

[H. S. Comp 1971]

29. দেখাও যে, $\log_a x \times \log_b y \times \log_c z = \log_b x \times \log_c y \times \log_a z$

$$= \log_c x \times \log_a y \times \log_b z.$$

30. যদি, $\dfrac{\log x}{b-c} = \dfrac{\log y}{c-a} = \dfrac{\log z}{a-b}$ হয়, তবে দেখাও যে,

(i) $xyz = 1$, (ii) $x^a y^b z^c = 1$. **[Joint Ent: Ex. 1968]**

(iii) $x^{b+c}.y^{c+a}.z^{a+b} = 1$.

31. যদি, $y = a^{\frac{1}{1-\log_a x}}$, $z = a^{\frac{1}{1-\log_a y}}$, দেখাও যে, $x = a^{\frac{1}{1-\log_a z}}$

[Joint Ent. Ex. 1974]

32, যদি, $x = \log_a bc$, $y = \log_b ca$, $z = \log_c ab$, তবে দেখাও যে,

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = 1$$

[Joint Ent. Ex. 1970 ; H. S. 1974]

33. (i) যদি, $\dfrac{a(b+c-a)}{\log a} = \dfrac{b(c+a-b)}{\log b} = \dfrac{c(a+b-c)}{\log c}$ হয়, তবে দেখাও যে,

$b^c c^b = c^a a^c = a^b b^a$. **[Joint Ent. Ex. 1971]**

(ii) যদি $\dfrac{pq \log (pq)}{p+q} = \dfrac{qr \log (qr)}{q+r} = \dfrac{rp \log (rp)}{r+p}$

তবে প্রমাণ কর যে, $p^p = q^q = r^r$.

34. যদি, $x = \log_a bc$, $y = \log_b ca$, $z = \log_c ab$, দেখাও যে,

$$xyz = x + y + z + 2.$$

35. যদি, $x = \log_c b + \log_b c$, $y = \log_a c + \log_c a$, $z = \log_b a + \log_a b$,

দেখাও যে, $xyz = x^2 + y^2 + z^2 - 4$.

36. যদি, $x = \log_{2a} a$, $y = \log_{3a} 2a$, $z = \log_{a4} 3a$ দেখাও যে,

$$xyz = 2yz - 1.$$

6-6. লগারিদ্‌মের প্রকৃতি।

a, x, y নির্দিষ্ট ধনাত্মক বাস্তব রাশি এবং $a>1$ হইলে,

$$\log_a x > \log_a y, \text{ যদি } x>y.$$

ধরি, $\log_a x = A$ এবং $\log_a y = B$.

তাহা হইলে, $x = a^A$ এবং $y = a^B$

স্বতরাং, $x>y$ হইলে,

$$a^A > a^B, \text{ অর্থাৎ, } A>B; (\because a>1).$$

$$\therefore \log_a x > \log_a y \text{ যদি } x>y; a>1.$$

উদাহরণস্বরূপ,

(i) $\log_{10} 100 > \log_{10} 10$; $\because 100>10, 10>1$;

(ii) $\log_{10} 3 > \log_{10} 2$; $\because 3>2; 10>1$;

(iii) $\log_5 7 > \log_5 3$; $\because 7>3; 5>1$.

মন্তব্য ঃ $x=y$ হইলে, $\log_a x = \log_a y$.

6-7. সাধারণ লগারিদ্‌মের পূর্ণক এবং অংশক।

পূর্ববর্তী আলোচনায় উল্লিখিত আছে, লগারিদ্‌মের নিধান 10 হইলে তাহাকে সাধারণ লগারিদ্‌ম্ বলা হয়। পরবর্তী আলোচনায় কোন লগারিদ্‌মের নিধান উল্লেখ না থাকিলে বুঝিতে হইবে উহা সাধারণ লগারিদ্‌ম্ অর্থাৎ, উহার নিধান 10 আছে। লিখিবার স্থবিধার জন্য সাধারণ লগারিদ্‌মের নিধান 10 কে উহ্য রাখা হইয়া থাকে।

লগারিদ্‌মের সাহায্যে অনেক জটিল প্রশ্ন সাধারণ করা সহজ হয়। গণিতবিদ্‌গণ লগারিদ্‌মের বিভিন্ন সূত্রাবলীর সাহায্যে বিভিন্ন ধনাত্মক বাস্তব রাশির সাধারণ লগারিদ্‌মের মান বাহির করিয়া তালিকা প্রস্তুত করিয়াছেন। সেই তালিকা হইতে যে কোন ধনাত্মক বাস্তব রাশির সাধারণ লগারিদ্‌মের মান আমরা পাইতে পারি। সেই তালিকা হইতে পাই,

$\log_{10} 2 = 0{\cdot}30103$, (আসন্ন পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত);

$\log_{10} 3 = 0{\cdot}47712$, (আসন্ন পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত);

$\log_{10} 7 = 0{\cdot}84510$, (আসন্ন পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত);

[তালিকা হইতে ইহাদের মান নির্ণয় পদ্ধতি পরে আলোচিত হইবে।]

লক্ষ্যণীয় ঃ

$\because\ 10^2 = 100$; $\therefore\ \log 100 = 2$;

$\because\ 10^1 = 10$; $\therefore\ \log 10 = 1$;

$\because\ 10^0 = 1$; $\therefore\ \log 1 = 0$;

$\because\ 10^{-1} = \dot{}1$; $\therefore\ \log \dot{}1 = -1$;

$\because\ 10^{-2} = \dot{}01$; $\therefore\ \log \dot{}01 = -2$.

এখন দেখা যাক, $\log_{10} 56$, $\log_{10} 5\dot{}6$ এবং $\log_{10} \dot{}56$ এর মান কিরূপ হইতে পারে ।

ধরি, $\log_{10} 56 = x$; $\therefore\ 10^x = 56$.

যেহেতু, $10 < 56 < 100$,

$\therefore\ 10^1 < 10^x < 10^2$; $\therefore\ 1 < x < 2$

অর্থাৎ, $1 < \log_{10} 56 < 2$.

$\therefore\ \log_{10} 56 = 1 +$ একটি ধনাত্মক দশমিক ভগ্নাংশ

$= 1 + M$, যেখানে, $0 < M < 1$.

এখন, $\log_{10} 5\dot{}6 = \log \frac{56}{10}$

$= \log 56 - \log 10$

$= 1 + M - 1 = M, (0 < M < 1)$.

এবং, $\log_{10} \dot{}56 = \log \dfrac{56}{100}$

$= \log 56 - \log 100$

$= 1 + M - 2 = -1 + M, (0 < M < 1)$.

আলোচ্য দৃষ্টান্তগুলি হইতে বুঝা যাইতেছে, বিভিন্ন সংখ্যার লগারিদ্‌মের মান বিভিন্ন হইবে অর্থাৎ N এর বিভিন্ন ধনাত্মক বাস্তব মানের জন্য $\log N$ এর মানও বিভিন্ন হইবে এবং কোন কোন ক্ষেত্রে উহার মান ধনাত্মক বা ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা অথবা শূন্য হইতে পারে ; আবার কোন কোন স্থলে, তাহা না হইয়া ধনাত্মক বা ঋণাত্মক দশমিক ভগ্নাংশ হইতে পারে ।

সুতরাং, কোন নির্দিষ্ট ধনাত্মক বাস্তব রাশি N এর সাধারণ লগারিদ্‌মের মান ধনাত্মক বা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা অথবা শূন্য না হইলে, উহার মানকে $C + M$ আকারে লেখা যাইতে পারে ; অর্থাৎ,

$$\log N = C + M$$

যেখানে, C এর মান **শূন্য** অথবা **একটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা** ; কিন্তু M এর মান একটি **ধনাত্মক ভগ্নাংশ** অর্থাৎ $0<M<1$ এবং তখন C এবং M কে যথাক্রমে **log** N এর **পূর্ণক** (Characteristic) এবং **অংশক** (Mantissa) বলা হয়।

তাহা হইলে, কোন সংখ্যার লগারিদ্‌মের অংশক সর্বদাই ধনাত্মক ভগ্নাংশ হইবে এবং উহার পূর্ণক শূন্য অথবা একটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইতে পারে।

উদাহরণস্বরূপ,

(*i*) $\log 2 = 0{\cdot}30103$ বলিয়া,

$\log 2$ এর পূর্ণক $=0$; এবং উহার অংশক $= {\cdot}30103.$

(*ii*) $\log 20 = \log (2\times 10) = \log 2 + \log 10$

$= 0{\cdot}30103 + 1 = 1{\cdot}30103 = 1 + {\cdot}30103.$

$\therefore$ $\log 20$ এর পূর্ণক $=1$; উহার অংশক $= {\cdot}30103.$

(*iii*) $\log {\cdot}03 = \log \dfrac{3}{100} = \log 3 - \log 100$

$= 0{\cdot}47712 - 2 = -2 + {\cdot}47712.$

$\therefore$ $\log_{10} {\cdot}03$ এর পূর্ণক $=-2$ এবং অংশক $= {\cdot}47712.$

প্রচলিত রীতি অনুযায়ী লেখার সুবিধার জন্য $-2+{\cdot}47712$ কে সংক্ষেপে $\bar{2}{\cdot}47712$ লেখা হয় ; অর্থাৎ,

$$\log {\cdot}03 = -2 + {\cdot}47712 = \bar{2}{\cdot}47712.$$

সেইরূপ, $\log {\cdot}2 = \log 2 - \log 10 = {\cdot}30103 - 1$

$= -1 + {\cdot}30103 = \bar{1}{\cdot}30103$

সুতরাং, $\log {\cdot}2$ এর পূর্ণক $=-1$ অর্থাৎ, $\bar{1}$ এবং অংশক $= {\cdot}30103.$

মন্তব্য :

(*i*) $\log {\cdot}03 = -2 + {\cdot}47712 = -1{\cdot}52288$ এর পূর্ণক -1 নহে এবং অংশক ${\cdot}52288$ বা $-{\cdot}52288$ নহে।

$\log {\cdot}03 = -1{\cdot}52288 = -1 - {\cdot}52288$

$= -1 - 1 + (1 - {\cdot}52288)$

$= -2 + {\cdot}47712 = \bar{2}{\cdot}47712$

বলিয়া, $\log {\cdot}03$ এর পূর্ণক $=-2$ এবং অংশক $= {\cdot}47712.$

(*ii*) $\log 100 = 2 = 2 + 0 = 2{\cdot}0$ বলিয়া $\log 100$ এর পূর্ণক $=2$ এবং অংশক $=0$ বলিতে পারি।

$\log {\cdot}01 = -2 = -2 + 0 = \bar{2}{\cdot}0$ বলিয়া $\log {\cdot}01$ এর পূর্ণক $=-2$ এবং অংশক $=0$ বলিতে পারি।

(*iii*) log 2, log 3, log 5, log 53, log 532 ইত্যাদির মান পূর্ণসংখ্যা বা কোন মূলদ রাশি নহে। ইহাদের মান অমূলদ রাশি হইবে।

(*iv*) a এর মান 10 ভিন্ন যে কোন ধনাত্মক বাস্তব রাশি, ($a \neq 1$) এবং $N > 0$; $\log_a N = C + M$; যেখানে, $0 < M < 1$ এবং $C = 0$ অথবা ধনাত্মক বা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইলে, C এবং M কে যথাক্রমে $\log_a N$ এর পূর্ণক ও অংশক বলা হইবে।

6-8. সাধারণ লগারিদ্‌মের পূর্ণক নির্ণয়ের নিয়ম।

লক্ষ্যণীয় ঃ

$\because\ 10^0 = 1$; $\therefore\ \log 1 = 0$;

$\because\ 10^1 = 10$; $\therefore\ \log 10 = 1$;

$\because\ 10^2 = 100$; $\therefore\ \log 100 = 2$;

$\because\ 10^3 = 1000$; $\therefore\ \log 1000 = 3$; ইত্যাদি।

তাহা হইলে, 1 এবং 10 এর মধ্যবর্তী যে কোন সংখ্যার লগারিদ্‌মের মান 0 (শূন্য) অপেক্ষা বড় কিন্তু 1 অপেক্ষা ছোট হইবে। সুতরাং, যে ধনাত্মক বাস্তব রাশির পূর্ণাংশ এক অঙ্ক বিশিষ্ট তাহার লগারিদ্‌মের পূর্ণক 0 (শূন্য) হইবে।

আবার, 10 এবং 100 এর মধ্যবর্তী যে কোন সংখ্যার লগারিদ্‌মের মান 1 অপেক্ষা বড় কিন্তু 2 অপেক্ষা ছোট হইবে। সুতরাং, যে ধনাত্মক বাস্তব রাশির পূর্ণাংশ দুই অঙ্ক বিশিষ্ট তাহার লগারিদ্‌মের পূর্ণক 1 হইবে।

সেইরূপ, যে ধনাত্মক বাস্তব রাশির পূর্ণাংশ তিন অঙ্ক বিশিষ্ট তাহার লগারিদ্‌মের পূর্ণক 2 হইবে ; ইত্যাদি।

[1] **প্রথম নিয়ম ঃ**

সাধারণভাবে, যে ধনাত্মক বাস্তব রাশির পূর্ণাংশ n-সংখ্যক অঙ্ক বিশিষ্ট তাহার লগারিদ্‌মের পূর্ণক $(n-1)$ হইবে।

উদাহরণস্বরূপ,

(*ii*) log 3 এর পূর্ণক = 0 ; (*ii*) log 42·5 এর পূর্ণক = 1 ;

(*iii*) log 456·7 এর পূর্ণক = 2 ; (*iv*) log 4·567 এর পূর্ণক = 0.

লক্ষ্যণীয় ঃ

$\because\ 10^0 = 1$; $\therefore\ \log 1 = 0$;

$\because\ 10^{-1} = \cdot 1$; $\therefore\ \log \cdot 1 = -1$;

$\because\ 10^{-2} = \cdot 01$; $\therefore\ \log \cdot 01 = -2$;

$\because\ 10^{-3} = \cdot 001$; $\therefore\ \log 001 = -3$; ইত্যাদি।

তাহা হইলে, ˙1 এবং 1 এর মধ্যবর্তী যে কোন সংখ্যার লগারিদ্‌মের মান -1 অপেক্ষা বড় কিন্তু 0 (শূন্য) অপেক্ষা ছোট। সুতরাং, কোন পূর্ণাংশবিহীন ধনাত্মক দশমিক সংখ্যায় দশমিক বিন্দু এবং প্রথম সার্থক অঙ্কের মধ্যে কোন 0 (শূন্য) না থাকিলে সেই সংখ্যার লগারিদ্‌মের পূর্ণক -1 অর্থাৎ $\bar{1}$ হইবে। যেমন,

(*i*) log ˙57 এর পূর্ণক $= -1$;

(*ii*) log ˙507 এর পূর্ণক $= -1$;

(*iii*) log ˙5604 এর পূর্ণক $= -1$.

আবার, ˙01 এবং ˙1 এর মধ্যবর্তী যে কোন সংখ্যার লগারিদ্‌মের মান -2 অপেক্ষা বড় কিন্তু -1 অপেক্ষা ছোট হইবে।

সুতরাং, কোন পূর্ণাংশবিহীন ধনাত্মক দশমিক সংখ্যায় দশমিক বিন্দু এবং প্রথম সার্থক অঙ্কের মধ্যে একটি মাত্র 0 (শূন্য) থাকিলে, সেই সংখ্যার লগারিদ্‌মের পূর্ণক -2 অর্থাৎ, $\bar{2}$ হইবে। যেমন,

(*i*) log ˙057 এর পূর্ণক $= -2$, বা, $\bar{2}$;

(*ii*) log ˙0608 এর পূর্ণক $= -2$, বা, $\bar{2}$;

(*iii*) log ˙0476 এর পূর্ণক $= -2$, বা, $\bar{2}$;

সেইরূপ,

(*i*) log ˙0057 এর পূর্ণক $= -3$, বা, $\bar{3}$;

(*ii*) log ˙00507 এর পূর্ণক $= -3$ বা, $\bar{3}$;

(*iii*) log ˙00065 এর পূর্ণক $= -4$ বা, $\bar{4}$.

ইত্যাদি।

[2] দ্বিতীয় নিয়ম ঃ

সাধারণভাবে, কোন পূর্ণাংশবিহীন ধনাত্মক দশমিক ভগ্নাংশে দশমিক বিন্দু এবং প্রথম সার্থক অঙ্কের মধ্যে *n*-সংখ্যক 0 (শূন্য) থাকিলে, সেই সংখ্যার সাধারণ লগারিদ্‌মের পূর্ণক $-(n+1)$, অর্থাৎ, $\overline{n+1}$ হইবে।

মন্তব্য ঃ পর্যবেক্ষণ দ্বারা অতি সহজেই যে কোন ধনাত্মক বাস্তব রাশির সাধারণ লগারিদ্‌মের পূর্ণক নির্ণয় করা যাইবে।

দ্রষ্টব্য ঃ

(*i*) ˙564 এর দশমিক বিন্দুর পরে প্রথম সার্থক অঙ্ক 5 ; সুতরাং, দশমিক বিন্দু ও 5 এর মধ্যে কোন 0 নাই ; অতএব log ˙564 এর পূর্ণক $= -1$, বা, $\bar{1}$.

(*ii*) ˙0564 এর দশমিক বিন্দুর পরে প্রথম সার্থক অঙ্ক 5 ; এখানে, দশমিক বিন্দু এবং 5 এর মধ্যে একটি 0 আছে ; অতএব, log ˙0564 এর পূর্ণক = $-(1+1)$, অর্থাৎ, -2, বা, $\bar{2}$.

(*iii*) সেইরূপ, ˙00504 সংখ্যাটির দশমিক বিন্দু এবং প্রথম সার্থক অঙ্কের মধ্যে দুইটি 0 আছে ; অতএব, log ˙00504 এর পূর্ণক = $-(2+1)$, অর্থাৎ, -3, বা, $\bar{3}$.

6-9. সাধারণ লগারিদ্গমের অংশক নির্ণয়ের নিয়ম।

মনেকরি, $b = a \times 10^n$, যেখানে, a এবং b দুইটি নির্দিষ্ট ধনাত্মক বাস্তব রাশি এবং n একটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

তাহা হইলে, $\log_{10}b = \log_{10}(a \times 10^n)$

$= \log_{10}a + \log_{10}(10^n)$

$= \log_{10}a + n$,

$\therefore \log_{10}b - \log_{10}a = n$.

= একটি পূর্ণ সংখ্যা।

সুতরাং, $\log_{10}b$ এবং $\log_{10}a$ উভয়েরই একই অংশক থাকিবে। অতএব, যে সকল ধনাত্মক সংখ্যার সার্থক অঙ্কগুলি একই এবং তাহারা একইক্রমে সজ্জিত, তাহাদের দশমিক বিন্দুর অবস্থান ভিন্ন হইলেও, সেই সমস্ত সংখ্যার সাধারণ লগারিদমের অংশকগুলি একই হইবে।

বিভিন্ন সংখ্যার লগারিদমের অংশকগুলি তালিকাভুক্ত করা আছে। তাহা নির্ণয়-পদ্ধতি পরে আলোচিত হইবে।

উদাহরণস্বরূপ, 567, 5670, 56700, ˙567, ˙0567, ˙00567, ˙000567 সংখ্যাগুলির সাধারণ লগারিদমের অংশকগুলি একই হইবে।

লগারিদমের তালিকা হইতে পাই

log 567 = 2˙75358, (আসন্ন পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত)

∴ log 567 এর অংশক = ˙75358 ,

∴ log 5670 বা log 56700 এর অংশক = ˙75358 ,

log ˙567, বা, log ˙0567 বা, log ˙00567 এর অংশক = ˙75358 ,

log ˙000567 এর অংশক = ˙75358.

মন্তব্য :

(*i*) log 567 এবং log 568 উভয়েরই পূর্ণক একই , কিন্তু $568 > 567$ বলিয়া log 568 > log 567 ; সুতরাং log 568 এর অংশক, log 567 এর অংশক অপেক্ষা বড়।

(*ii*) log 567˙4 এবং log 567 উভয়েরই পূর্ণক একই , কিন্তু 567˙4 > 567 বলিয়া log 567˙4 > log 567 ; সুতরাং log 567˙4 এর অংশক, log 567-এর অংশক অপেক্ষা বড়। অতএব, log 567˙4 এর অংশক log 567 এর অংশক অপেক্ষা বড়।

উদাহরণ 1. পূর্ণক নির্ণয় কর :—

(*i*) $\log_{10}400$, (*ii*) $\log_{10}5{\cdot}07$, (*iii*) $\log_{10}{\cdot}79$,

(*iv*) $\log_{10}{\cdot}0068$, (*v*) $\log_7 54$.

(*i*) 400 সংখ্যাটির পূর্ণাংশে তিনটি অঙ্ক আছে ,

$\therefore$ $\log_{10}400$ এর পূর্ণক $=3-1=2$.

(*ii*) 5·07 সংখ্যাটির পূর্ণাংশে কেবলমাত্র একটি অঙ্ক 5 আছে ;

$\therefore$ $\log_{10}5{\cdot}07$ এর পূর্ণক $=1-1=0$.

(*ii*)) ·79 সংখ্যাটিতে কোন পূর্ণ অংশ নাই ; দশমিক বিন্দু এবং উহার প্রথম সার্থক অঙ্ক 7 এর মধ্যে কোন 0 (শূন্য) নাই ;

$\therefore$ $\log_{10}{\cdot}79$ এর পূর্ণক $=-(0+1)=-1$, বা, $\bar{1}$.

(*iv*) ·0068 সংখ্যাটিতে কোন পূর্ণ অংশ নাই ; দশমিক বিন্দু এবং উহার পরে প্রথম সার্থক অঙ্ক 6 এর মধ্যে দুইটি 0 (শূন্য) আছে :

$\therefore$ $\log_{10}{\cdot}0068$ এর পূর্ণক $=-(2+1)=-3$, বা, $\bar{3}$.

(*v*) ধরি, $\log_7 54=x$; $\therefore$ $7^x=54$.

এখন, $7^2=49$ এবং $7^3=343$;

$\because$ $49<54<343$

$\therefore$ $7^2<7^x<7^3$, বা, $2<x<3$

$\therefore$ $2<\log_7 54$ 3.

$\therefore$ $\log_7 54=2+$ একটি ধনাত্মক দশমিক ভগ্নাংশ ।

$\therefore$ $\log_7 54$ এর পূর্ণক $=2$.

উদাহরণ 2. দেওয়া আছে, $\log 485=2{\cdot}68574$.

মান নির্ণয় কর :—

(*i*) $\log 48500$, (*ii*) $\log 4{\cdot}850$

(*iii*) $\log {\cdot}485$ (*iv*) $\log {\cdot}000485$.

(*i*) $\log 48500=\log 485+\log 100$

$=2{\cdot}68574+2=4{\cdot}68574$.

(*ii*) $\log\ 4{\cdot}850=\log 485-\log 100$

$=2{\cdot}68574-2=0{\cdot}68574$.

(*iii*) $\log {\cdot}485=\log 485-\log 1000$

$=2{\cdot}68574-3=\bar{1}{\cdot}68574$,

(*iv*) $\log {\cdot}000485=\log 485-\log 10^6$

$=2{\cdot}68574-6=\bar{4}{\cdot}68574$.

উদাহরণ 3. দেখাও যে, $\log_{10}3$ এর মান $\frac{1}{3}$ এবং $\frac{1}{2}$ এর মধ্যে অবস্থিত।

ধরি, $\log_{10}3 = x$; $\therefore$ $10^x = 3$.

এখন, $\frac{1}{2}$ ও $\frac{1}{3}$ এর 2 এবং 3 এর ল. সা. গু. = 6.

তাহা হইলে, $10^2 = 100$; $10^3 = 1000$;

$(10^x)^6 = 3^6$, অর্থাৎ, $10^{6x} = 729$.

এখন, যেহেতু, $100 < 729 < 1000$,

$\therefore$ $10^2 < 10^{6x} < 10^3$

$\therefore$ $2 < 6x < 3$, বা, $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$.

উদাহরণ 4. দেওয়া আছে, $\log_{10} 2 = \cdot30103$ এবং $\log_{10} 3 = \cdot47712$; 18^{30} সংখ্যাটি কয়টি অঙ্কদ্বারা গঠিত তাহা বল।

ধরি, $18^{30} = x$.

$$\therefore \log_{10}x = 30 \log 18 = 30 \log (3^2 \times 2)$$
$$= 30\{2 \log 3 + \log 2\}$$
$$= 30\{2 \times \cdot47712 + \cdot30103\}$$
$$= 30 \times 1\cdot25527 = 37\cdot6581.$$

তাহা হইলে, $\log_{10}x$ এর পূর্ণক = 37.

সুতরাং, 18^{30} সংখ্যাটিতে মোট 38টি অঙ্ক আছে।

উদাহরণ 5. দেওয়া আছে, $\log 2 = \cdot30103$ এবং $\log 3 = \cdot47712$; মান নির্ণয় কর :—(*i*) $\log (\frac{6}{5})$, (*ii*) $\log \cdot015$. [**H. S. 1961**].

$$(i) \quad \log (\tfrac{6}{5}) = \log (\tfrac{12}{10}) = \log 12 - \log 10$$
$$= \log (3 \times 2^2) - 1$$
$$= \log 3 + 2 \log 2 - 1$$
$$= \cdot47712 + 2 \times \cdot30103 - 1 = 0\cdot07918.$$

$$(ii) \quad \log \cdot015 = \log 15 - \log 1000$$
$$= \log (5 \times 3) - 3$$
$$= \log 3 + \log 5 - 3$$
$$= \log 3 + (\log 10 - \log 2) - 3$$
$$= \log 3 + 1 - \log 2 - 3$$
$$= \log 3 - \log 2 - 2$$
$$= \cdot47712 - \cdot30103 - 2$$
$$= -2 + \cdot17609 = -1\cdot82391.$$

উদাহরণ 6. মান নির্ণয় কর :

$$\sqrt[3]{\frac{7.2 \times 6.4}{62.5}}$$ (আসন্ন তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত)

দেওয়া আছে $\log 2 = \cdot 30103$, $\log 3 = \cdot 47712$, $\log 90.34 = 1.95588$

ধরি, $x = \sqrt[3]{\frac{7.2 \times 6.4}{62.5}}$

$$\therefore \log x = \tfrac{1}{3}\{\log 7.2 + \log 6.4 - \log 62.5\}$$
$$= \tfrac{1}{3}\{(\log 72 - \log 10) + (\log 64 - \log 10) - (\log 625 - \log 10)\}$$
$$= \tfrac{1}{3}\{\log 72 + \log 64 - \log 625 - 1\}$$
$$= \tfrac{1}{3}\{\log (3^2 \times 2^3) + \log (2^6) - \log (5^4) - 1\}$$
$$= \tfrac{1}{3}\{(2 \log 3 + 3 \log 2) + 6 \log 2 - 4 \log 5 - 1\}$$
$$= \tfrac{1}{3}\{2 \log 3 + 9 \log 2 - 4 \log (\tfrac{10}{2}) - 1\}$$
$$= \tfrac{1}{3}\{2 \log 3 + 9 \log 2 - 4(1 - \log 2) - 1\}$$
$$= \tfrac{1}{3}\{2 \log 3 + 13 \log 2 - 5\}$$
$$= \tfrac{1}{3}\{2 \times \cdot 47712 + 13 \times \cdot 30103 - 5\}$$
$$= \tfrac{1}{3}\{\cdot 95424 + 3.91339 - 5\}$$
$$= \tfrac{1}{3}(\bar{1}.86763) = \tfrac{1}{3}(-3 + 2.86763)$$
$$= \bar{1}.95588, \text{ প্রায় ।}$$

দেওয়া আছে, $\log 90.34 = 1.95588.$

$\therefore \log \cdot 9034 = \bar{1}.95588.$

সুতরাং, $\log x = \bar{1}.95588 = \log \cdot 9034$

$\therefore x = 0.9034$

$= 0.903$ (আসন্ন তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত)

প্রশ্নমালা 21

1. পূর্ণক নির্ণয় কর :

(*i*) $\log_{10} 653$; (*ii*) $\log_{10} 500$; (*iii*) $\log_{10} 5.066$;
(*iv*) $\log_{10} \cdot 0093$; (*v*) $\log_7 1000$; (*vi*) $\log_5 1003$; (*vii*) $\log_6 7776$.

2. মান নির্ণয় কর :

(*i*) $\log 65.42$, (*ii*) $\log \cdot 6542$ (*iii*) $\log \cdot 06542$,
(*iv*) $\log 654200$; দেওয়া আছে $\log 6.542 = 0.81571$.

3. দেওয়া আছে, log 2 = ˙30103 ; log 3 = ˙47712 ; মান নির্ণয় কর :

(i) log 45 ; (ii) log ˙0072.

4. দেওয়া আছে, log 2 = ˙30103 ; log 3 = ˙47712 এবং log 7 = ˙84510 ; (i) 7˙84 এবং (ii) ˙0084 এর লগারিদ্‌মের মান বাহির কর।

5. দেওয়া আছে, log 2 = ˙30103 ; log 3 = ˙47712 ; মান নির্ণয় কর :

(i) log 75 ; (ii) 4500 ; **[H. S. 1963]**

(iii) log $5\frac{1}{16}$; (iv) log ˙1875 ; **[H. S. 1962]**

(v) log $\sqrt{\frac{15}{14}}$ + log $\sqrt{\frac{35}{24}}$.

6. দেওয়া আছে, log 2 = ˙30103 ; নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলির অঙ্ক সংখ্যা নির্ণয় কর : (i) 2^{40} ; (ii) 4^{50} ; (iii) $(640)^{20}$,

(iv) 5^{25} ; **[Joint Ent. Ex. 1968]** (v) $(50)^{50}$.

7. দেওয়া আছে, log 2 = ˙30103 ; log 3 = ˙47712 ; নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলির অঙ্ক সংখ্যা নির্ণয় কর :

(i) 3^{12} ; **[H. S. 1974]** (ii) $(72)^{20}$;

(iii) $(108)^{10}$; **[H. S, 1976]** (iv) $2^{19} \times 3^{17}$.

8. দেওয়া আছে, log 6˙47 = ˙81090 ; $(647)^{50}$ এর অঙ্ক সংখ্যা নির্ণয় কর।

9. দেওয়া আছে, log 2 = ˙30103 ; নিম্নলিখিত রাশিগুলির দশমিক বিন্দু এবং প্রথম সার্থক অঙ্কে মধ্যে যতগুলি 0 (শূন্য) আছে তাহা নির্ণয় কর।

(i) $\left(\frac{1}{2}\right)^{500}$; (ii) $\left(\frac{2}{5}\right)^{200}$

10. দেওয়া আছে, log 2 = 0˙30103 ; log 3 = 0˙47712 এবং log 7 = 0˙84510 দেখাও যে, $\left(\frac{21}{20}\right)^{100}$ রাশিটি 100 অপেক্ষা বৃহত্তর। **[H. S. 1970]**

11. লগারিদমের তালিকার সাহায্য না লইয়া দেখাও যে

(i) $\log_{10} 2$ এর মান $\frac{3}{10}$ এবং $\frac{4}{13}$ এর মধ্যে আছে ; (ii) $\frac{1}{4} < \log_{10} 2 < \frac{1}{3}$

(iii) $\log_{10} 7$ এর মান $\frac{5}{6}$ এবং $\frac{6}{7}$ এর অবস্থিত ;

(iv) $\log_5 4$ এর মান $\frac{2}{3}$ এবং 1 এর মধ্যবর্তী ; (v) $\frac{6}{7} < \log_5 4 < \frac{8}{9}$.

12. দেওয়া আছে, log 2 = ˙3010300 ; এবং log 3 = ˙4771213 ; দেখাও যে, 3^{100} সংখ্যাটি 2^{158} এবং 2^{159} মধ্যবর্তী।

13. 37˙203 ; 3˙7203 ; 0˙0037203 এবং 372˙03 সংখ্যাগুলির অবিরত গুণফল নির্ণয় কর ; দেওয়া আছ log 37˙203 = 1˙5705780 ; log 1915631 = 6˙2823120.

[P. U. 1972]

14. দেওয়া আছে, $\log 2 = \cdot30103$; আসন্ন তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত $\log_{25} 1000$ এর মান বাহির কর।

15. $\log 2 = \cdot30103$; $\log e = \cdot4342945$, $y = k/2$; হইলে আসন্ন তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত t এর মান বাহির কর, যদি $y = ke^{-0\cdot038t}$ হয়। [H. S. 1966]

16. দেওয়া আছে $\log 2 = \cdot3010300$ এবং $\log 3 = \cdot4771213$; $\sqrt{8}$ নিধানের সাপেক্ষে 81 এর লগারিদ্মের মান আসন্ন তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

17. যদি $\log 2 = \cdot30103$; $\log 3 = \cdot47712$; $\log 7 = \cdot84510$ হয়, তবে, $\log_{12} 49$ এর মান তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত বাহির কর।

18. দেওয়া আছে $\log 165 = 2\cdot2175$ এবং $\log 6974 = 3\cdot8435$,

$\sqrt[5]{0\cdot00000165}$ এর মান বাহির কর। [H. S.1964]

19. $3\cdot528$ এর সপ্তমতম মূল নির্ণয় কর ; দেওয়া আছে, $\log 2 = \cdot3010300$; $\log 3 = \cdot4771213$; $\log 7 = \cdot8450980$; $\log 1197\cdot34 = 3\cdot0782184$.

20. $\log 2 = \cdot3010300$ এবং $\log 3 = \cdot4771213$ হইলে,

$$\log\left\{\frac{\sqrt[4]{5} \times \sqrt[10]{2}}{\sqrt[3]{(18\sqrt{2})}}\right\}$$ এর মান নির্ণয় কর।

21. $\log\left\{\dfrac{(10\cdot8)^{\frac{1}{2}} \times (24)^{\frac{5}{3}}}{90^{-2}}\right\}$ এর সাংখ্যমান বাহির কর ; দেওয়া আছে,

$\log 2 = \cdot3010300$; $\log 3 = \cdot4771213$- [H. S. 1965]

22. আসন্ন মান নির্ণয় কর :

$$\sqrt[3]{\left\{\frac{294 \times 125}{42 \times 32}\right\}^2}$$, (সার্থক ছয়টি অঙ্ক পর্যন্ত)

দেওয়া আছে, $\log 2 = \cdot3010300$; $\log 7 = \cdot8450980$

$\log 9076\cdot226 = 3\cdot9579053$ [P. U. 1970]

23. সরল কর :— $\left\{\dfrac{(\cdot32)^3 \times (625)^4}{(\cdot00432)^2 \times (\cdot3125)^3 \times 25}\right\}^{\frac{1}{5}}$,

(সার্থক ছয়টি অঙ্ক পর্য্যন্ত) ; যেখানে দেওয়া আছে, $\log 2 = \cdot3010300$;

$\log 3 = \cdot4771213$; $\log 259569 = 5\cdot4142524$ [H. S. 1967]

24. $2 + \dfrac{8}{5} + \dfrac{32}{25} + \dfrac{128}{125} + \cdots\cdots$

শ্রেণীটির কমপক্ষে প্রথম কতকগুলি পদের যোগফল 9·9 অপেক্ষা বেশী হইবে ? (দেওয়া আছে, $\log 2 = \cdot30103$).

6·10. তালিকা হইতে লগারিদ্‌মের মান নির্ণয় পদ্ধতি।

লগারিদ্‌মের বিভিন্ন সূত্রাবলীর সাহায্যে গণিতবিদ্‌গণ বিভিন্ন সংখ্যার সাধারণ লগারিদ্‌মের মান বাহির করিয়া তালিকা প্রস্তুত করিয়াছেন। এই পুস্তকের শেষে Table—I-তে 1 হইতে 1000 পর্যন্ত অর্থাৎ তিন অঙ্কবিশিষ্ট পর্যন্ত পূর্ণ সংখ্যার সাধারণ লগারিদ্‌মের **কেবল অংশকগুলি** আসন্ন পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত লইয়া এবং দশমিক বিন্দু না লিখিয়া লিপিবদ্ধ আছে। ঐ তালিকার ঠিক মাথার উপরে অনুভূমিক রেখা বরাবর মাঝারি অক্ষরে 0 হইতে 9 পর্যন্ত যে 10টি সংখ্যা লেখা আছে তাহাদের নীচে নীচে এবং সর্ব বামে অবস্থিত 10 হইতে 99 পর্যন্ত সংখ্যাগুলি দ্বারা গঠিত স্তম্ভের ডান দিকে আলাদা আলাদা ভাবে বিভিন্ন সংখ্যাগুলি (পূর্ণসংখ্যা নহে) লেখা আছে। তাহারা কোন না কোন সংখ্যার সাধারণ লগারিদ্‌মের অংশক মাত্র।

Table—I

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
47	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
48	68124	68215	68305	68395	68485	**68574**	68664	68753	68842	68931
49	69020	69108	69197	**69285**	69373	69461	69548	69636	69723	69810
50	69897	69984	70070	70157	70243	70329	70415	70501	70586	70672
51	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

				Mean Difference								
				1	2	3	4	5	6	7	8	9
...				...	...	...	...	...	...	...	...	...
...				...	...	...	...	...	...	...	...	...
48	...	...	...	9	18	27	36	45	54	63	72	81
49	...	...	...	9	18	26	35	44	53	61	70	79
50	...	...	...	9	17	26	34	43	52	60	69	77
...				...	...	...	...	...	...	...	...	...
...				...	...	...	...	...	...	...	...	...

ঐ তালিকার একটি অংশ এখানে দেখানো হইল। লক্ষ্যণীয়, সর্ববামে অবস্থিত স্তম্ভের 48 সংখ্যাটি হইতে অনুভূমিক রেখা বরাবর এবং সর্বোপরি অবস্থিত সারির 5 সংখ্যাটির নীচে 68574 অবস্থিত; এবং এই সংখ্যাটি আসলে ˙68574 এবং উহা $\log_{10} 485$ এর অংশক। ∴ $\log 485 = 2\cdot68574$.

সেইরূপ, $\log_{10} 493$ এর অংশক নির্ণয়ের জন্য ঐ তালিকার সর্ববামে অবস্থিত 49 সংখ্যাটির অনুভূমিক রেখা বরাবর অথচ 3 এর স্তম্ভের নীচে সংখ্যাটি 69285 লও; তাহা হইলে, $\log_{10} 493$ এর অংশক হইবে ˙69285 ; ∴ $\log 493 = 2\cdot69285$.

এইভাবে তালিকা হইতে তিন অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যাগুলির সাধারণ লগারিদমের অংশকগুলিকে অতি সহজেই জানা যাইবে।

কিন্তু এইভাবে $\log_{10} 4865$ এবং $\log_{10} 48653$ এর অংশক নির্ণয় করা যাইবে না। এইরূপক্ষেত্র, **"Mean Difference"** তালিকার সাহায্য লইতে হইবে। ঐ তালিকায় সর্বডানে" Mean Difference,' কথাটির নীচে 1 হইতে 9 পর্যন্ত যে 9টি সংখ্যা লেখা আছে ঠিক তাহাদের নীচে নীচে কতকগুলি সংখ্যা লেখা আছে ; সেইগুলি আসলে পূর্ণ সংখ্যা নহে ; লগারিদ্‌মের চতুর্থ অঙ্কের জন্য লগারিদমের অংশকের যে বৃদ্ধি তাহার আসন্ন পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত অংশটির দশমিক বিন্দু না লিখিয়া সংক্ষেপে তাহাদের সার্থক অঙ্কগুলিকে সঠিক অবস্থানে রাখিয়া লেখা আছে। যেমন ঐ তালিকাতে 9 দ্বারা ˙00009 কে ; 53 দ্বারা ˙00053 কে ; 81 দ্বারা ˙00081 কে ; 127 দ্বারা ˙00127 কে ; 120 দ্বারা ˙00120 কে বুঝাইবে।

সুতরাং, লগারিদ্‌মের চতুর্থ অঙ্কের জন্য অংশটির যে বৃদ্ধি হইবে তাহা "Mean Difference" তালিকায় অনুরূপ সারি এবং স্তম্ভ হইতে পাওয়া যাইবে।

সেইরূপ, লগারিদ্‌মের পঞ্চম অঙ্কের জন্য "Mean Difference" তালিকায় অনুরূপ সারি ও স্তম্ভ হইতে যাহা পাওয়া যাইবে তাহার দশমাংশ লইলে অনুরূপ বৃদ্ধিটুকু পাওয়া যাইবে।

"Mean Difference" তালিকায় 48 ; 49 ; 50 সংখ্যার অনুরূপ সারি তিনটির অংশকগুলির বৃদ্ধি এখানে দেখানো হইয়াছে।

এখন, $\log 4853$ এর অংশক কত দেখা যাক্।

পূর্বের নিয়মে, $\log 485$ এর অংশক = ˙68574 ; লগারিদমের অন্তর্গত চতুর্থ সংখ্যাটি 3.

সর্ববামে অবস্থিত স্তম্ভের 48 সংখ্যাটির অনুভূমিক রেখা বরাবর "Mean Difference" তালিকার মাথার উপরের সারিতে অবস্থিত 3 সংখ্যাটির স্তম্ভে 27 অর্থাৎ, ˙00027 অবস্থিত।

তাহা হইলে, log 485·3 এর অংশক = ·68574 + ·00027 = ·68601 ; সংক্ষেপে ইহা নিম্নলিখিতভাবে লেখা হয় :—

log 485 এর অংশক	= ·68574	
·3 বৃদ্ধির জন্য অংশকে বৃদ্ধি =	27	
∴ log 485·3 এর অংশক	= ·68601	

∴ log 4853 = 3·68601 ;

এবং log 48·53 = 1·68601.

এখন, log 48537 এর অংশক কত দেখা যাক্।

log 485 এর অংশক	=	·68574	
·3 বৃদ্ধির জন্য অংশক বৃদ্ধি	=	27	
·07 বৃদ্ধির জন্য অংশক বৃদ্ধি	=	6	3
∴ log 485·37 এর অংশক	=	·68607	

তাহা হইলে,

log 48537 = 4·68607 ;

এবং log 48·537 = 1·68607.

মন্তব্য : **"Principle of proportional parts"** বা **"সমানুপাতের নিয়ম"** এর সাহায্যে অনেক সময় অতি সহজেই কোন একটি সংখ্যার লগারিদমের মান বাহির করা যাইতে পারে।

6-11. অ্যান্টিলগারিদম্ নির্ণয়ের নিয়ম।

$\log_{10} N = x$ হইলে, N কে x এর অ্যান্টিলগারিদম্ বলা হয় ; এবং

$N =$ Antilog x লেখা হয়। যেমন, log 48·5 = 1·68574,

∴ Antilog 1·68574 = 48·5.

এই পুস্তকের পিছনে Table II-তে ·000 হইতে ·999 পর্যন্ত সংখ্যার Antilogarithm নির্ণয়ের তালিকা দেওয়া আছে। দশমিক বিন্দুর পর পাঁচ অঙ্ক পর্যন্ত সংখ্যার Antilogarithm নির্ণয়ের জন্য ডানপার্শ্বে "Mean Difference" তালিকা দেওয়া আছে।

দ্রষ্টব্য : কোন সংখ্যার Logarithm এবং Antilogarithm "তালিকা হইতে নির্ণয় পদ্ধতি" একই।

উদাহরণ 1. তালিকা হইতে নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলির লগারিদ্‌মের মান বাহির কর :—

(*i*) 56·765, (*ii*) 6·0407, (*iii*) ·054017

(*i*) প্রথমে log 567·65 এর অংশক নির্ণয় করা যাক্।

log 567 এর অংশক	= ·75358	
·6 বৃদ্ধির জন্য অংশক বৃদ্ধি	= 46	
·05 বৃদ্ধির জন্য অংশক বৃদ্ধি	= 3	9
∴ log 567·65 এর অংশক	= ·75408	

তাহা হইলে,

log 567·65 এর অংশক = ·75408

$\therefore$ log 56·765 = 1·75408.

(*ii*) প্রথমে log 604·07 এর অংশক নির্ণয় করা যাক্।

log 604 এর অংশক	= ·78104	
·07 বৃদ্ধির জন্য অংশক বৃদ্ধির	= 5	0
∴ log 604·07 এর অংশক	= ·78109	

তাহা হইলে,

log6·0407 এর অংশক = ·78109

$\therefore$ log 6·0407 = 0·78109.

(*iii*) সংখ্যাটি হইতে দশমিক বিন্দু তুলিলে, ইহা দাঁড়ায় 054017, অর্থাৎ, 54017 ; এখন প্রথমে log 540·17 এর অংশক নির্ণয় করা যক্।

log 540 এর অংশক	= ·73239	
·1 বৃদ্ধির জন্য অংশক বৃদ্ধি	= 8	
·07 বৃদ্ধির জন্য অংশক বৃদ্ধি	= 5	6
∴ log 540·17 এর অংশক	= ·73253	

তাহা হইলে,

log ·054017 এর অংশক = ·73253

$\therefore$ log ·054017 = $\bar{2}$·73253

উদাহরণ 2. তালিকা হইতে নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলির অ্যান্টিলগারিদম্ নির্ণয় কর: (*i*) ˙63999, (*ii*) 1˙73260, (*iii*) −1˙24816.

(*i*) নির্ণেয় সংখ্যা x হইলে,

$\log x = ˙63999$; অর্থাৎ, নির্ণেয় সংখ্যাটির লগারিদমের অংশক = ˙63999.

অ্যান্টি লগারিদমের তালিকা হইতে,

639 এর জন্য	= 43551	
˙9 বৃদ্ধির জন্য	= 89	
˙09 বৃদ্ধির জন্য	= 8	9
∴ 639˙99 এর জন্য	= 43649	

∴ Antilog ˙63999 = 4˙3649

= 4˙365 (আসন্ন তিন দশমিক স্থান পর্য্যন্ত)

(*ii*) নির্ণেয় সংখ্যাটি x হইলে,

$\log x = 1˙73260$; অর্থাৎ, নির্ণেয় সংখ্যাটির লগারিদমের অংশক = ˙73260.

এখন অ্যান্টি লগারিদমের তালিকা হইতে,

732 এর জন্য	= 53951	
˙60 বৃদ্ধির জন্য	75	
∴ 732˙60 এর জন্য	= 54026	

∴ Antilog 1˙73260 = 54˙026

(*iii*) মনে করি, নির্ণেয় সংখ্যা x.

তাহা হইলে, $\log x = -1˙24816 = \bar{2}˙75184$;

অর্থাৎ, নির্ণেয় সংখ্যাটির লগারিদমের অংশক = ˙75184.

এখন অ্যান্টিলগারিদমের তালিকা হইতে,

751 এর জন্য	= 56364	
˙8 বৃদ্ধির জন্য	= 105	
˙04 বৃদ্ধির জন্য	= 5	2
∴ 751˙84 এর জন্য	= 56474	

∴ x = ˙056474

∴ Antilog (−1˙24816) = ˙056474.

উদাহরণ 3. কোন তালিকার সাহায্য না লইয়া $\bar{2}.801914$ এর অ্যান্টিলগারিদম্ নির্ণয় কর; দেওয়া আছে,

$$\log 6.3374 = .801911\ ;\quad \log 6.3375 = .801918.$$

এখন, $\log 63375 = 4.801918$

$\log 63374 = 4.801911$

$.000007$

তাহা হইলে,

63375 এবং 63374 এর অন্তরফল = 1 এবং উহাদের লগারিদমের অন্তর = $.000007$.

স্পষ্টতঃই দেখা যাইতেছে, $.801914$ সংখ্যাটি $.801911$ এবং $.801918$ এর মধ্যে অবস্থিত।

ধরি, $\log (63374 + x) = 4.801914.$

এখন, $.801914 - .801911 = .000003.$

স্থতরাং, **সমানুপাতের নিয়মানুযায়ী**

$7 : 3 :: 1 : x\ ;\ \therefore\ x = \frac{3}{7} = .43$, প্রায়।

$\therefore\ \log (63374 + .43) = 4.801914$

বা, $\log (63374.43) = 4.801914.$

$\therefore\ \log (.06337443) = \bar{2}.801914$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাটি $= .06337443......$.

উদাহরণ 4. সরলকর :—

$$\frac{\sqrt[3]{54.6} \times \sqrt{0.843}}{\sqrt[5]{0.045} \times (3.45)^2}$$

ধরি, প্রদত্ত রাশিমালার মান $= x$.

$$\therefore\ \log x = \tfrac{1}{3} \log (54.6) + \tfrac{1}{2} \log (0.843)$$
$$- \tfrac{1}{5} \log (.045) - 2 \log (3.45)$$
$$= \tfrac{1}{3} \times (1.73719) + \tfrac{1}{2} \times (\bar{1}.92583)$$
$$- \tfrac{1}{5} \times (\bar{2}.65321) - 2 \times (0.53782)$$
$$= .57906 + \tfrac{1}{2}(-1 + .92583)$$
$$- \tfrac{1}{5}(-2 + .65321) - 1.07564$$
$$= .57906 - .03709 + .26936 - 1.07564$$
$$= 0.84842 - 1.11273 = -0.26431 = \bar{1}.73569$$

Antilogarithm এর তালিকা হইতে,

735 এর জন্য	= 54325	
˙6 এর জন্য	= 75	
˙09 এর জন্য	= 11	3
735˙69 এর জন্য	= 54411	

$\therefore$ Antilog ˙73569 = 5˙4411

অর্থাৎ, log 5˙4411 = ˙73569.

$\therefore \log x = \bar{1}{\cdot}73569 = \log (0{\cdot}54411)$

$\therefore x = 0{\cdot}54411 = 0{\cdot}5441$ (আসন্ন চার দশমিক স্থান পর্য্যন্ত)।

উদাহরণ 5. সমাধান কর : $2^x.3^{2x} = 100$

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই,

$$\log (2^x.3^{2x}) = \log (100)$$

বা, $x \log 2 + 2x \log 3 = 2$

$$\therefore x = \frac{2}{\log 2 + 2 \log 3}$$

$$= \frac{2}{{\cdot}30103 + 2 \times {\cdot}47712}$$

$$= \frac{2}{1{\cdot}25527}$$

$$\therefore \log x = \log 2 - \log (1{\cdot}25527)$$

$$= {\cdot}30103 - {\cdot}09873$$

$$= {\cdot}20230$$

$$= \log (1{\cdot}5933)$$

$\therefore x = 1{\cdot}5933$

$\therefore x = 1{\cdot}59$ (আসন্ন দুই দশমিক স্থান পর্য্যন্ত)

˙09691
173
70
24
˙09873|4
15922
11
15933|0

প্রশ্নমালা 22

1. লগারিদ্‌মের তালিকা হইতে মান বাহির কর :

(i) log 564, (ii) log 600, (iii) log 74·53, (iv) log 50·607, (v) log ·0064705.

2. তালিকা হইতে নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলির অ্যান্টিলগারিদ্‌ম্ বাহির কর :

(i) ·56467, (ii) 1·37658, (iii) $\bar{2}$·87216,
(iv) $\bar{1}$·74725, (v) −2·12552, (vi) −1·39102.

3. মান নির্ণয় কর :—

(i) $5{\cdot}03 \times 74{\cdot}65$; (ii) $7{\cdot}4 \times 56{\cdot}7 \times {\cdot}4325$;

(iii) $\dfrac{42{\cdot}36 \times 3{\cdot}802}{56{\cdot}745}$; (iv) $\dfrac{{\cdot}00831 \times 52{\cdot}51}{{\cdot}648 \times {\cdot}0896}$;

(v) $\dfrac{1}{(1{\cdot}045)^{20}}$; (vi) $(2{\cdot}0075)^{-50}$.

4. দুই দশমিক স্থান পর্য্যন্ত মান নির্ণয় কর :—

$$\frac{5{\cdot}631 \times 42{\cdot}13 \times 0{\cdot}2783}{2{\cdot}451 \times 0{\cdot}8092 \times 12{\cdot}61}.$$ [P. U. 1968]

5. সরল কর :—

(i) $\dfrac{1}{\sqrt[7]{36{\cdot}21}}$; (ii) $\dfrac{\sqrt[5]{2{\cdot}415}}{(0{\cdot}824)^4}$;

(iii) $2{\cdot}41 \times (1{\cdot}24)^{\frac{1}{3}} \div (0{\cdot}70)^{\frac{1}{2}}$; [P. U. 1961]

(iv) $\dfrac{\sqrt[3]{41{\cdot}7} \times \sqrt{{\cdot}00321}}{0{\cdot}372}$; [P. U. 1962]

(v) $(0{\cdot}12)^{-0{\cdot}34}$, (vi) $(1{\cdot}2)^{-3{\cdot}4}$ (vii) $80\{1-(1{\cdot}05)^{-20}\}$

6. আসন্ন দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত মান বাহির কর :—

$$\sqrt{(5{\cdot}1)^5 \times 29^3 \div 64^2}$$

7. লগারিদ্‌ম্ তালিকার সাহায্যে আসন্ন দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত মান বাহির কর :—

$$\sqrt[7]{\left(\frac{294 \times 425}{142 \times 324}\right)^2}.$$

8. নিম্নলিখিত ভগ্নাংশটির মান আসন্ন চার দশমিক স্থান পর্য্যন্ত নির্ণয় কর :—

$$\frac{(0\cdot000008)^{-\frac{2}{3}}\cdot(0\cdot0081)^{\frac{3}{4}}\cdot 10^{-2}}{(0\cdot0256)^{-\frac{1}{2}}\cdot(0\cdot125)^{\frac{1}{3}}\cdot(0\cdot3)^2}$$ [H. S. 1976]

9. তালিকার সাহায্যে মান বাহির কর : (প্রথম চারিটি সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত)

$$\frac{\sqrt[3]{47\cdot1}\times\sqrt{0\cdot153}}{\sqrt[5]{1\cdot02}\times(0\cdot0955)^2}.$$ [H. S. Comp. 1975]

10. বর্গমূল নির্ণয় কর :—

$$\frac{\sqrt[3]{0\cdot4165}}{\sqrt[3]{0\cdot6438}}\times\frac{\sqrt[5]{0\cdot8264}}{\sqrt[8]{0\cdot0186}}.$$

11. সমাধান কর :—

(i) $3^{x+1}=5^{x-1}$; (ii) $4^{3x}=8\times5^{x+2}$;

(iii) $4^{x+1}-2^{x+3}=252$; (iv) $3^{2-x}\times4^{2x-3}=20$;

দেওয়া আছে, $\log 2=\cdot30103$; $\log 3=\cdot47712$.

12. সমাধান কর :—

(i) $2^x+27\times2^{-x}=12$; (ii) $6^{3-4x}\times4^{x+5}=8$;

(iii) $3^y=500$; $2^x\times7^y=80000$;

(iv) $2^x=3^y$; $3^{x-1}=2^{y+1}$;

(v) $7^{3x+2}+4^{x+2}=7^{3x+1}+2^{2x+6}$. [C. U. 1941]

সপ্তম অধ্যায়

বিন্যাস ও সমবায়

(Permutation and Combination)

7-1. [*a*] **বিন্যাসের সংজ্ঞা।**

নির্দিষ্ট সংখ্যক কতকগুলি বস্তু হইতে সমসংখ্যায় কয়েকটি কয়েকটি করিয়া লইয়া অথবা সমস্তগুলিকে একত্রে লইয়া বিভিন্ন প্রকারে সাজাইলে প্রত্যেক প্রকারের সাজানোকে (Arrangement) এক একটি **বিন্যাস** (Permutation) বলা হয়। যেমন,

(*i*) a এবং b এই দুইটি অক্ষরকে একত্রে লইয়া সাজাইলে কেবলমাত্র

$$ab \,;\, ba$$

এই দুইটি বিন্যাস হইবে ;

(*ii*) a, b এবং c এই তিনটি অক্ষর হইতে দুইটি দুইটি করিয়া লইয়া বিভিন্ন উপায়ে সাজাইলে, কেবলমাত্র

$$ab,\ ba,\ bc,\ cb,\ ca,\ ac,$$

এই ছয়টি বিন্যাস হইবে ;

(*iii*) a, b, c এই তিনটি অক্ষরকে একত্রে লইয়া সাজাইলে, কেবলমাত্র

$$abc,\ acb,\ bca,\ bac,\ cab,\ cba,$$

এই ছয়টি বিন্যাস হইবে।

[*b*] **বিন্যাস সংক্রান্ত প্রতীক।**

n সংখ্যক **বিভিন্ন** প্রকারের বস্তু হইতে r $(\leqslant n)$ সংখ্যক করিয়া লইয়া যত প্রকারে বিন্যাস করা সম্ভব তাহাদের সমষ্টিকে ${}^nP_r$ অথবা ${}_nP_r$ দ্বারা সাধারণতঃ সূচিত করা হইয়া থাকে। এইরূপক্ষেত্রে, স্পষ্টতঃই,

$${}^nP_1 = n.$$

[*c*] **উৎপাদক সংক্রান্ত প্রতীক।**

প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ক্রমিক গুণফলকে সাধারণতঃ $\lfloor n$ অথবা n ! দ্বারা সূচিত করা হইয়া থাকে, অর্থাৎ,

$$1.2.3.4. \cdots \cdots (n-1).n = \lfloor n, \text{ বা, } n\,!$$

সুতরাং,

$$\lfloor 1 = 1 \,;\, \lfloor 2 = 1.2 \,;\, \lfloor 3 = 1.2.3 \,;\ \text{ইত্যাদি} \,;$$

$$\text{এবং } \lfloor n = n\lfloor \underline{n-1} = n(n-1)\lfloor \underline{n-2} \,;\ \text{ইত্যাদি।}$$

7-2. বিন্যাসের মূল তত্ত্ব (Fundamental Principle of Permutation) :

কোন একটি প্রক্রিয়া m সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে করা সম্ভব হইলে এবং ঐরূপ একটি প্রক্রিয়া করার পর অন্য একটি প্রক্রিয়া n সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে করা সম্ভব হইলে, ঐ দুইটি প্রক্রিয়া মিলিতভাবে $m \times n$ সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে করা সম্ভব হইবে।

এই তত্ত্বটি নিম্নের উদাহরণদ্বয় হইতে সহজেই বুঝা যাইবে।

(1) মনে করি, হাওড়া ষ্টেশন হইতে খড়গপুর পর্যন্ত চারটি ট্যাক্সি যাতায়াত করে ; এবং খড়গপুর হইতে দীঘা পর্যন্ত পাঁচটি বাস যাতায়াত করে। এক ব্যক্তি হাওড়া ষ্টেশন হইতে টাক্সিতে খড়গপুর গিয়া তথা হইতে বাসে দীঘা কত উপায়ে যাইতে পারে দেখা যাক্।

ঐ ব্যক্তি হাওড়া ষ্টেশন হইতে খড়গপুর বিভিন্ন 4 ভাবে ট্যাক্সিতে যাইতে পারে ; কারণ, সে 4টি ট্যাক্সির যে কোন একটিতে খড়গপুর যাইতে পারে।

এখন, ঐ 4 প্রকারের যে কোন একভাবে খড়গপুর যাওয়ার পর তথা হইতে ঐ ব্যক্তি বিভিন্ন 5 উপায়ে দীঘা যাইতে পারে ; কারণ, সে খড়গপুর হইতে 5টি বাসের যে কোন একটিতে দীঘা যাইতে পারে।

স্থতরাং, ঐ ব্যক্তি হাওড়া ষ্টেশন হইতে দীঘা পর্যন্ত মোট $5+5+5+5$, অর্থাৎ 4×5 প্রকারে যাইতে পারে।

(2) মনে করি, a, b, c, d চিহ্নিত 4টি বিভিন্ন মার্বেল আছে। উহাদের তিন তিনটি করিয়া লইয়া মোট কত প্রকারে সাজানো সম্ভব তাহা দেখা যাক্। এখানে একই বিন্যাসে কোন বস্তুর পুনরাবৃত্তি সম্ভব নহে।

মনে করি, X, Y, Z চিহ্নিত তিনটি শূন্যস্থান আছে। ইহা পরিষ্কার যে নির্ণেয় বিন্যাসের সংখ্যা, 4টি মার্বেলের তিন তিনটি করিয়া লইয়া X, Y, Z নামক স্থানে (প্রত্যেকটিতে এক একটি করিয়া) যত প্রকারের রাখা যায়, সেই সংখ্যার সমান।

প্রথম স্থানে, অর্থাৎ, X-স্থানে, 4টি মার্বেলের যে কোন একটিকে রাখা যায়। স্থতরাং, প্রথম স্থানটি বিভিন্ন 4 উপায়ে পূর্ণ করা যায়।

এখন, 4টি মার্বেলের যে কোন একটিকে প্রথম স্থানে রাখিলে, বাকি থাকে 3টি মার্বেল ; এবং এই অবশিষ্ট তিনটি মার্বেলের যে কোন একটিকে দ্বিতীয় স্থানে অর্থাৎ Y এতে রাখা যায়।

সুতরাং প্রথম স্থানটি 4 প্রকারের যে কোন এক প্রকারে পূর্ণ করার পরে দ্বিতীয় স্থানটি বিভিন্ন 3 প্রকারে পূর্ণ করা যাইতে পারে। সুতরাং, প্রথম ও দ্বিতীয় স্থান দুইটি মোট 4×3 বিভিন্ন প্রকারে পূর্ণ করা যাইতে পারে।

প্রথম ও দ্বিতীয় স্থান দুইটি 4×3 বিভিন্ন প্রকারের যে কোন এক প্রকারে পূর্ণ করার পরে অবশিষ্ট থাকে 2টি মার্বেল। সুতরাং, তখন তৃতীয় স্থানটিকে (Z কে) বিভিন্ন 2 প্রকারে পূর্ণ করা যাইতে পারে।

তাহা হইলে, X, Y, Z স্থান তিনটিকে মোট $4 \times 3 \times 2$ প্রকারে পূর্ণ করা যাইতে পারে।

সুতরাং, a, b, c, d চিহ্নিত বিভিন্ন 4টি মার্বেলের তিন তিনটি করিয়া লইলে মোট বিন্যাসের সংখ্যা $4 \times 3 \times 2$, অর্থাৎ,

$$^4P_3 = 4 \times 3 \times 2.$$

7-3. n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর r সংখ্যক করিয়া লইয়া বিন্যাসের সংখ্যা নির্ণয়।

এখানে, একই বিন্যাসে কোন বস্তুর পুনরাবৃত্তি হইবে না ; কারণ, বস্তুগুলি সবই বিভিন্ন। তাহা হইলে, ইহা পরিষ্কার যে নির্ণেয় বিন্যাসের সংখ্যা, n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর r সংখ্যক করিয়া লইয়া ঐ r এর সমান সংখ্যক স্থানে (প্রত্যেকটিতে একটি করিয়া) যত প্রকারে রাখা যায়, সেই সংখ্যার সমান।

এখন, প্রথম স্থানটি n সংখ্যক বিভিন্ন প্রকারে পূর্ণ করা যায় ; কারণ, উক্ত n সংখ্যক বস্তুর যে কোন একটিকে ঐ স্থানে রাখা যায়।

প্রথম স্থানটিকে বিভিন্ন n প্রকারের যে কোন এক প্রকারে পূর্ণ করার পর বাকি থাকে $(n-1)$ সংখ্যক বস্তু এবং এই অবশিষ্ট $(n-1)$ সংখ্যক বস্তুর যে কোন একটি দ্বিতীয় স্থানে রাখা যায়, অর্থাৎ, দ্বিতীয় স্থানটি $(n-1)$ সংখ্যক বিভিন্ন প্রকারে পূর্ণ করা যায়। এখন, যেহেতু, প্রথম স্থানটি বিভিন্ন n প্রকারের যে কোনও এক প্রকারে পূর্ণ করার পরে, দ্বিতীয় স্থানটি বিভিন্ন $(n-1)$ প্রকার পূর্ণ করা যায়, সুতরাং, প্রথম এবং দ্বিতীয় স্থান দুইটিকে মিলিতভাবে মোট $n(n-1)$ সংখ্যক বিভিন্ন প্রকারে পূর্ণ করা যাইবে।

প্রথম দুইটি স্থানকে $n(n-1)$ বিভিন্ন প্রকারের যে কোনও এক প্রকারে পূর্ণ করার পরে, তৃতীয় স্থানটিকে বিভিন্ন $(n-2)$ প্রকারে পূর্ণ করা যায় ; কারণ, অবশিষ্ট $(n-2)$ বস্তুর যে কোন একটি দ্বারা তৃতীয় স্থানটিকে পূর্ণ করা যায়। আবার, যেহেতু, প্রথম দুইটি স্থান বিভিন্ন $n(n-1)$ প্রকারের যে কোন এক প্রকারে পূর্ণ করার পরে তৃতীয়

স্থানটিকে বিভিন্ন $(n-2)$ প্রকারে পূর্ণ করা যায়, সুতরাং, প্রথম তিনটি স্থানকে মিলিত ভাবে মোট $n(n-1)(n-2)$ সংখ্যক বিভিন্ন প্রকারে পূর্ণ করা যাইবে।

সুতরাং, এইভাবে অগ্রসর হইলে দেখা যায়, r সংখ্যক স্থানকে মোট যত প্রকারে পূর্ণ করা যাইবে তাহার সংখ্যা হইবে r সংখ্যক ক্রমিক উৎপাদকের গুণফল যাহার প্রথম উৎপাদকটি n এবং পরবর্তী উৎপাদকগুলি ক্রমশঃ 1 করিয়া কম। সুতরাং, r সংখ্যক স্থান যত প্রকারে পূর্ণ করা যাইবে তাহার মোট সংখ্যা

$$= n(n-1)(n-2)\ldots\ldots r \text{ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত}$$
$$= n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-\overline{r-1})$$
$$= n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1).$$

তাহা হইলে, n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর r সংখ্যক করিয়া লইয়া বিন্যাসের মোট সংখ্যা ^nP_r দ্বারা সূচিত হইলে,

$$^nP_r = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)$$

দ্বিতীয় পদ্ধতি :

মনে করি, n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু $a, b, c, d\ldots\ldots$নামক n সংখ্যক বিভিন্ন অক্ষর দ্বারা চিহ্নিত এবং এই n সংখ্যক বস্তুর r সংখ্যক করিয়া লইয়া বিন্যাসের মোট সংখ্যা ^nP_r দ্বারা সূচিত। এই ^nP_r সংখ্যক বিন্যাসের মধ্যে যে সমস্ত বিন্যাসের প্রথমে a চিহ্নিত বস্তুটি থাকিবে তাহার সংখ্যা হইবে $^{n-1}P_{r-1}$; কারণ, তখন উক্ত n সংখ্যক বস্তু হইতে a চিহ্নিত বস্তুটি বাদ রাখিয়া অবশিষ্ট $b, c, d,\ldots\ldots$চিহ্নিত $(n-1)$ সংখ্যক বস্তুর $(r-1)$ সংখ্যক করিয়া লইয়া যতগুলি বিন্যাস হইবে তাহাদের প্রত্যেকটির পূর্বে a চিহ্নিত বস্তুটি বসাইলে উহাদের সংখ্যা $^{n-1}P_{r-1}$ হইবে। অনুরূপ ভাবে, যে সমস্ত বিন্যাসের প্রথমে b চিহ্নিত বস্তুটি থাকিবে তাহাদের সংখ্যা হইবে $^{n-1}P_{r-1}$; ইত্যাদি।

এখন যেহেতু মোটের উপর n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু আছে, অতএব ^nP_r এতে এই $^{n-1}P_{r-1}$ জাতীয় n সংখ্যকের সমষ্টি থাকিবে ; অর্থাৎ, নির্ণেয় বিন্যাসের সংখ্যা $n \times {}^{n-1}P_{r-1}$ হইবে।

$$\therefore\ \ ^nP_r = n \times {}^{n-1}P_{r-1}\ ;$$

সেইরূপ,

$$^{n-1}P_{r-1} = (n-1) \times {}^{n-2}P_{r-2}\ ;$$
$$^{n-2}P_{r-2} = (n-2) \times {}^{n-3}P_{r-3}\ ;$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$^{n-r+2}P_2 = (n-r+2) \times {}^{n-r+1}P_1\ ;$$

এবং $^{n-r+1}P_1 = (n-r+1).$

এখন, বামপক্ষের পদগুলির গুণফল এবং ডানপক্ষের পদগুলির গুণফল হইতে উহাদের সাধারণ উৎপাদকগুলি দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

$$^nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$$

দ্রষ্টব্য :

$$^nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1) \quad \cdots \quad (a)$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)\lfloor\underline{n-r}}{\lfloor\underline{n-r}}$$

$$\therefore \quad {}^nP_r = \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{n-r}} \quad \cdots \quad \cdots \quad (b)$$

বিশেষ দ্রষ্টব্য :

(*a*) হইতে,

$$^nP_n = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 3.2.1.$$

$$\therefore \quad {}^nP_n = \lfloor\underline{n} \quad \cdots \quad \cdots \quad (c)$$

(*b*) হইতে,

$$^nP_1 = \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{n-1}} = \frac{n\lfloor\underline{n-1}}{\lfloor\underline{n-1}}$$

$$\therefore \quad {}^nP_1 = n \quad \cdots \quad \cdots \quad (d)$$

(*a*) হইতে পাই,

$$^nP_n = \lfloor\underline{n} \text{ এবং } {}^nP_{n-1} = \lfloor\underline{n}$$

$$\therefore \quad {}^nP_n = {}^nP_{n-1} \quad \cdots \quad \cdots \quad (e)$$

মন্তব্য :

(*a*) হইতে, $^nP_n = \lfloor\underline{n}$;

কিন্তু, (*b*) হইতে, $^nP_n = \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{0}}$

$$\therefore \quad \lfloor\underline{n} = {}^nP_n = \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{0}}$$

অর্থাৎ, $\lfloor\underline{0} = 1$

লক্ষ্যণীয়, (*b*) হইতে

$$^nP_0 = 1$$

উদাহরণস্বরূপ, কোন অঙ্কের পুনরাবৃত্তি না করিয়া 6, 7, 8 অঙ্কগুলি হইতে দুই অঙ্কবিশিষ্ট কতগুলি সংখ্যা গঠন দ্বারা যাইতে পারে দেখা যাক্। সূত্র সাহায্যে ; নির্ণেয় বিন্যাসের সংখ্যা $= {}^3P_2 = 3 \times 2 = 6$. সাধারণভাবে, সংখ্যাগুলি 67, 68, 78, 76, 86, 87.

7-4. শর্তাধীন বিন্যাস (Restricted Permutations) :

[1] n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর p সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু কখনই বিন্যাসে থাকিবে না এই শর্তে r সংখ্যক বস্তু এক সঙ্গে লইয়া বিন্যাসের মোট সংখ্যা $^{n-p}P_r$, $(r \leq n-p)$.

যে p সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু বিন্যাসের মধ্যে কখনই থাকিবে না তাহাদের বাদ দিয়া রাখিলে অবশিষ্ট $(n-p)$ সংখ্যক বস্তুর r সংখ্যক করিয়া লইলে বিন্যাসের মোট সংখ্যা হইবে $^{n-p}P_r$. সুতরাং, নির্ণেয় বিন্যাসের সংখ্যা $= {}^{n-p}P_r$ হইবে।

[2] n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর r সংখ্যক করিয়া লইয়া বিন্যাসের মধ্যে একটি নির্দিষ্ট বস্তু থাকিলে তাহাদের মোট বিন্যাস সংখ্যা হইবে $r \times {}^{n-1}P_{r-1}$.

মনে করি, n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু $a, b, c, \ldots$ প্রভৃতি n সংখ্যক অক্ষর দ্বারা চিহ্নিত। প্রতিটি বিন্যাসে a চিহ্নিত বস্তুটি থাকিলে, এই a চিহ্নিত বস্তুটিকে বাদ রাখিয়া বাকী $(n-1)$ সংখ্যক বস্তুর $(r-1)$ সংখ্যক করিয়া লইলে, মোট বিন্যাসের সংখ্যা $= {}^{n-1}P_{r-1}$. উহাদের প্রত্যেকটি বিন্যাসের মধ্যে $(r-1)$ সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু বা অক্ষর থাকায়, প্রত্যেকটি বিন্যাসের বস্তুগুলির মাঝখানে $(r-2)$ সংখ্যক এবং দুই প্রান্তে 2টি মিলিয়া মোট r সংখ্যক স্থান থাকিবে। ঐ r সংখ্যক স্থানে a চিহ্নিত বস্তুটিকে r সংখ্যক প্রকারে রাখা যাইতে পারে। সুতরাং, যে সকল বিন্যাসে a চিহ্নিত বস্তুটি থাকিবে তাহাদের মোট সংখ্যা $= r \times {}^{n-1}P_{r-1}$.

[3] n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর p সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু বিন্যাসের মধ্যে থাকিবে এই শর্তে r সংখ্যক বস্তু এক সঙ্গে লইলে বিন্যাসের সংখ্যা $^{n-p}P_{r-p} \times {}^{r}P_{p}$, $(p \leq r \leq n)$.

p সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তুকে পৃথক করিয়া রাখিলে বাকী $(n-p)$ বস্তুর $(r-p)$ সংখ্যক করিয়া লইলে, বিন্যাসের মোট সংখ্যা $= {}^{n-p}P_{r-p}$; এই বিন্যাসগুলির প্রত্যেকটির মধ্যে $(r-p)$ সংখ্যক বস্তু আছে এবং তাহাদের মাঝখানে $r-p-1$ সংখ্যক এবং দুই প্রান্তে 2টি, মিলিয়া মোট $(r-p+1)$ সংখ্যক স্থান আছে। p সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তুর যে কোন একটিকে ঐ $(r-p+1)$ সংখ্যক স্থানে $(r-p+1)$ উপায়ে বসানো যাইবে। উক্ত প্রক্রিয়ার পরে, দ্বিতীয় নির্দিষ্ট বস্তুটিকে উহাদের যে কোন একটি বিন্যাসের মধ্যে (প্রান্তদ্বয় সহ), $(r-p+2)$ উপায়ে বসানো যাইবে। এইভাবে অগ্রসর হইয়া শেষে p-তম নির্দিষ্ট বস্তুটিকে ঠিক উহার পূর্বের যে কোন একটি বিন্যাসের বস্তুগুলির মধ্যে (প্রান্তদ্বয় সহ) $r-p+p$ অর্থাৎ r সংখ্যক উপায়ে বসানো যাইবে।

এইভাবে, p সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তুগুলি দ্বারা ${}^{n-p}P_{r-p}$ সংখ্যক বিন্যাসের প্রতিটি হইতে r সংখ্যক বস্তু সমন্বিত $(r-p+1)(r-p+2)\ldots\ldots(r-1)r$ সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যাইবে। সুতরাং, নির্ণেয় বিন্যাসের সংখ্যা $= {}^{n-p}P_{r-p} \times r(r-1)(r-2)\ldots(r-p+1)$ $= {}^{n-p}P_{r-p} \times {}^{r}P_{p}$.

[4] n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর p সংখ্যক বস্তু প্রত্যেকটি নির্দিষ্ট স্থানে সর্বদা থাকিবে এই শর্তে r সংখ্যক বস্তু এক সঙ্গে লইয়া বিন্যাসের মোট সংখ্যা ${}^{n-p}P_{r-p}$, $(p < r \leq n)$.

প্রথমেই নির্দিষ্ট p সংখ্যক বস্তু তাহাদের নির্ধারিত p সংখ্যক স্থানে রাখিলে বাকী $(n-p)$ সংখ্যক বস্তুর $(r-p)$ সংখ্যক করিয়া লইয়া বিন্যাস করিতে হইবে এবং তাহা সম্ভব হইবে ${}^{n-p}P_{r-p}$ উপায়ে। সুতরাং, নির্ণেয় বিন্যাসের সংখ্যা হইবে ${}^{n-p}P_{r-p}$.

উদাহরণস্বরূপ, **NUMBER** শব্দটির 4টি করিয়া অক্ষর লইয়া বিন্যাস করিলে তাহাদের কতগুলিতে (*i*) U এবং E থাকিবে না; (*ii*) U এবং E সর্বদা থাকিবে; (*iii*) U প্রথমে এবং E শেষে থাকিবে?

(*i*) নির্ণেয় বিন্যাসের সংখ্যা $= {}^{4}P_{4} = \lfloor 4 = 24$;

(*ii*) নির্ণেয় বিন্যাসের সংখ্যা $= {}^{6-2}P_{4-2} \times {}^{4}P_{2} = 12 \times 12 = 144$.

(*iii*) নির্ণেয় বিন্যাসের সংখ্যা $= {}^{4}P_{2} = 4.3 = 12$.

7-4. সবগুলি বিভিন্ন নহে এইরূপ n-সংখ্যক বস্তুর সমস্তগুলিকে এক সঙ্গে লইয়া বিন্যাসের মোট সংখ্যা নির্ণয়।

মনে করি, প্রদত্ত n সংখ্যক বস্তুর মধ্যে p সংখ্যক বস্তু এক প্রকারের, q সংখ্যক বস্তু অন্য এক প্রকারের, r সংখ্যক বস্তু অপর এক প্রকারের এবং বাকীগুলি উহাদের হইতে এবং নিজেদের মধ্যে বিভিন্ন।

মনে করি, এই n সংখ্যক বস্তু n সংখ্যক অক্ষর দ্বারা সূচিত যাহাদের মধ্যে একই প্রকারের p সংখ্যক বস্তুর প্রতিটি a অক্ষর দ্বারা, q সংখ্যক বস্তুর প্রতিটি b অক্ষর দ্বারা r সংখ্যক বস্তুর প্রতিটি c অক্ষর দ্বারা এবং অবশিষ্ট বস্তুগুলির প্রত্যেকটি অপর বিভিন্ন অক্ষর $d, e, \ldots\ldots$ইত্যাদি দ্বারা সূচিত।

মনে করি, নির্ণেয় বিন্যাসের সংখ্যা x; তাহা হইলে এই x সংখ্যক বিন্যাসের প্রত্যেকটিতে p সংখ্যক a, q সংখ্যক b, r সংখ্যক c নিশ্চয় থাকিবে এবং প্রতিটি বিন্যাসের বস্তু-সংখ্যা n হইবে।

এখন যদি p সংখ্যক a অক্ষরকে পরিবর্তিত করিয়া পরস্পর বিভিন্ন এবং অপর চিহ্নিত অক্ষরগুলি হইতে ভিন্ন অক্ষর দ্বারা চিহ্নিত করা হয়, এবং অন্য অক্ষরগুলির

বিন্যাসের কোন পরিবর্তন না করিয়া কেবলমাত্র ঐ p সংখ্যক নূতন অক্ষরের মধ্যে বিন্যাস করা হয়, তবে x সংখ্যক বিন্যাসের প্রত্যেকটি হইতে $\lfloor p$ সংখ্যক বিভিন্ন বিন্যাস পাওয়া যাইবে। সুতরাং, এইরূপক্ষেত্রে x সংখ্যক বিন্যাস হইতে মোট $x \times \lfloor p$ সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যাইবে।

এখন, q সংখ্যক b কে পরস্পর বিভিন্ন এবং অবশিষ্ট অক্ষরগুলি হইতে সম্পূর্ণ ভিন্ন অক্ষরে রূপান্তরিত করিয়া নিজেদের মধ্যে সাজাইলে পূর্বোক্ত নিয়মে $(x \times \lfloor p)$ সংখ্যক বিন্যাস হইতে মোট $x \times \lfloor p \times \lfloor q$ সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যাইবে।

অনুরূপ প্রণালীতে, r সংখ্যক c কে সম সংখ্যক বিভিন্ন এবং অবশিষ্ট অক্ষরগুলি হইতে স্বতন্ত্র অক্ষরে পরিবর্তন করিয়া উহাদিগকে নিজেদের মধ্যে বিভিন্ন ভাবে সাজাইলে $(x \times \lfloor p \times \lfloor q)$ সংখ্যক বিন্যাস হইতে মোট $x \times \lfloor p \times \lfloor q \times \lfloor r$ সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যাইবে।

কিন্তু, p সংখ্যক a, q সংখ্যক b, r সংখ্যক c বিভিন্ন অক্ষরে রূপান্তরিত হওয়ায়, n সংখ্যক বস্তু বিভিন্ন অক্ষর দ্বারা চিহ্নিত হইল এবং এখন সবগুলিকে একসঙ্গে লইয়া বিন্যাস করিলে মোট বিন্যাসের সংখ্যা হইবে $\lfloor n$.

$$\therefore \quad x \times \lfloor p \times \lfloor q \times \lfloor r = \lfloor n.$$

$$\therefore \quad \text{নির্ণেয় বিন্যাসের সংখ্যা} = x = \frac{\lfloor n}{\lfloor p . \lfloor q . \lfloor r}.$$

উদাহরণস্বরূপ, ASS এই শব্দটির অক্ষরগুলিকে বিভিন্ন কত প্রকারে সাজানো যাইতে পারে দেখা যাক্। শব্দগুলি নিশ্চয়, ASS, SSA, SAS মোট এই তিনটি হইবে।

আবার, সূত্র সাহায্যেও পাই,

$$\text{নির্ণেয় সংখ্যা} = \frac{\lfloor 3}{\lfloor 2} = 3.$$

সেইরূপ, BOOK শব্দটির অক্ষরগুলিকে বিভিন্ন ভাবে সাজাইলে,

$$\text{নির্ণেয় বিন্যাসের সংখ্যা} = \frac{\lfloor 4}{\lfloor 2} = 12.$$

7-5. $1 < r \leq n$ হইলে,

$$^{n-1}P_r + r.^{n-1}P_{r-1} = {}^nP_r.$$

আমরা জানি, $^nP_r = \dfrac{\lfloor n}{\lfloor n-r}$.

$$\therefore\ {}^{n-1}P_r + r.\ {}^{n-1}P_{r-1} = \frac{\underline{|n-1}}{\underline{|n-r-1}} + r \times \frac{\underline{|n-1}}{\underline{|n-r}}$$

$$= \frac{\underline{|n-1}}{\underline{|n-r-1}} \times \left(1 + \frac{r}{n-r}\right)$$

$$= \frac{\underline{|n-1}}{\underline{|n-r-1}} \times \frac{n}{n-r}$$

$$= \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}} = {}^nP_r\ .$$

দ্বিতীয় পদ্ধতি ঃ

মনে করি, n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু $a, b, c,$......প্রভৃতি n সংখ্যক অক্ষর দ্বারা চিহ্নিত। n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর r সংখ্যক করিয়া লইয়া বিন্যাস করিলে বিন্যাসের মোট সংখ্যা $= {}^nP_r$. এই বিন্যাসগুলির মধ্যে (i) কতকগুলির ভিতর a চিহ্নিত বস্তু থাকিবে না, (ii) এবং বাকীগুলির ভিতর উহা থাকিবে।

(i) a চিহ্নিত বস্তুটি বাদ রাখিয়া বাকী $(n-1)$ সংখ্যক বস্তুর r সংখ্যক করিয়া লইলে বিন্যাসের সংখ্যা হইবে ${}^{n-1}P_r$; সুতরাং, যে সকল বিন্যাসের মধ্যে a চিহ্নিত বস্তুটি থাকিবে না তাহাদের সংখ্যা $= {}^{n-1}P_r$.

(ii) এখন, a চিহ্নিত বস্তুটিকে বাদ রাখিয়া বাকী $(n-1)$ সংখ্যক বস্তুর $(r-1)$ সংখ্যক করিয়া লইয়া বিন্যাস করিলে তাহাদের সংখ্যা $= {}^{n-1}P_{r-1}$. উহাদের প্রত্যেকটি বিন্যাসের $(r-1)$ সংখ্যক বস্তুর মাঝে $(r-2)$ সংখ্যক এবং দুই প্রান্তে 2টি মিলিয়া মোট r সংখ্যক স্থান আছে। এই r সংখ্যক স্থানে a চিহ্নিত বস্তুটিকে r সংখ্যক উপায়ে বসানো যাইতে পারে। সুতরাং, যে সকল বিন্যাসে a চিহ্নিত বস্তুটি থাকিবে তাহাদের মোট সংখ্যা $= r \times {}^{n-1}P_{r-1}$.

$$\therefore\ {}^{n-1}P_r + r \times {}^{n-1}P_{r-1} = {}^nP_r\ .$$

উদাহরণ 1. ${}^nP_6 = 30 \times {}^nP_4$ হইলে n এর মান বাহির কর।

যেহেতু, ${}^nP_6 = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$

এবং ${}^nP_4 = n(n-1)(n-2)(n-3)$;

অতএব, ${}^nP_6 = 30 \times {}^nP_4$ হইতে পাই,

$(n-4)(n-5) = 30,\ (n \geqslant 6)$

বা, $n^2 - 9n - 10 = 0$

বা, $(n-10)(n+1) = 0$

$\therefore\ n = 10,\ -1.$

যেহেতু, n এর মান ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হইবে,

$\therefore\ n = 10.$

উদাহরণ 2. একটি রেলপথে মোট 17টি ষ্টেশন আছে। কতগুলি বিভিন্ন প্রকারের তৃতীয় শ্রেণীর টিকিট মুদ্রিত করিলে এক ষ্টেশন হইতে অন্য ষ্টেশনে যাওয়া যাইবে ?

মোট ষ্টেশনের সংখ্যা 17; যে কোন একটি ষ্টেশন হইতে অন্য ষ্টেশন যাইতে 16 খানা স্বতন্ত্র টিকিটের প্রয়োজন।

স্থতরাং, 17টি ষ্টেশনের জন্য মোট 17×16 খানা অর্থাৎ 272 খানা টিকিটের প্রয়োজন।

অন্য পদ্ধতি :

17টি ষ্টেশনকে 2টি করিয়া যত প্রকারে সাজানো যাইবে তাহার সংখ্যাই নির্ণেয় টিকিটের সংখ্যা হইবে।

∴ নির্ণেয় টিকিটের সংখ্যা

$$= {}^{17}P_2 = 17 \times 16 = 272.$$

উদাহরণ 3. কলিকাতা ও দীঘার মধ্যে 9টি বিলাস-বাস যাতায়াত করে। এক ব্যক্তি কয় প্রকারে একটি বিলাস-বাসে কলিকাতা হইতে দীঘা যাইয়া তথা হইতে অপর একটি বাসে ফিরিতে পারে।

ঐ ব্যক্তি কলিকাতা হইতে 9 প্রকারে দীঘা যাইতে পারে; কারণ সে 9টি বিলাস বাসের যে কোনটিতে যাইতে পারে। এখন, 9টি বাসের যে কোন একটিতে দীঘা যাওয়ার পর বাকী 8টি বাসের যে কোন একটিতে সে ফিরিতে পারে। স্থতরাং, সে মোট 9×8 অর্থাৎ 72 প্রকারে যাতায়াত করিতে পারে।

উদাহরণ 4. কুদঘাট এবং ডালহৌসি এর মধ্যে 12টি 'মিনিবাস' এবং 6টি 'ডিলুক্স' বাস যাতায়াত করে। এক ব্যক্তি কত প্রকারে কুদঘাট হইতে ডিলুক্স বাসে ডালহৌসি যাইয়া তথা হইতে মিনিবাসে কুদঘাটে ফিরিতে পারে ?

ঐ ব্যক্তি কুদঘাট হইতে ডালহৌসি 6 প্রকারে যাইতে পারে; কারণ সে 6 টি ডিলুক্স বাসের যে কোন একটিতে ডালহৌসি যাইতে পারে। যে কোন এক প্রকারে ডালহৌসি যাওয়ায় পর, সে মিনিবাসে 12 প্রকারে কুদঘাটে ফিরিতে পারে; কারণ, সে 12 টি মিনিবাসের যে কোন একটিতে কুদঘাটে ফিরিতে পারে।

স্থতরাং নির্ণেয় উত্তর $= 6 \times 12 = 72$.

উদাহরণ 5. ছয় জন বালক একটি ঘরে প্রবেশ করিয়া দেখিল সেখানে মাত্র চারিটি আসন খালি আছে। এক একটি আসনে কেবলমাত্র একজন বালক বসিলে, কত প্রকারে ঐ চারিটি আসনে বালকেরা বসিবে ?

প্রথম আসনটিতে ছয় জন বালকের যে কোন একজন বসিতে পারে। সুতরাং, প্রথম আসনটি 6 প্রকারে পূর্ণ হইবে ; প্রথম আসনটিতে ঐ ছয় জন বালকের যে কোন একজন বসিলে পর, বাকী 5 জন বালকের যে কোন একজন দ্বিতীয় আসনটিতে বসিতে পারে।

সুতরাং, প্রথম ও দ্বিতীয় আসন দুইটি মোট 6×5 প্রকারে পূর্ণ হইবে। প্রথম এবং দ্বিতীয় দুইটি আসন যে কোন একভাবে পূর্ণ হওয়ার পরে, তৃতীয় আসনটি 4 উপায়ে পূর্ণ হইতে পারে। সুতরাং, প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় আসন তিনটি মোট $6 \times 5 \times 4$ উপায়ে পূর্ণ হইবে। সেইভাবে, চারিটি আসন মোট $6 \times 5 \times 4 \times 3$ অর্থাৎ 360 প্রকারে পূর্ণ হইবে।

আবার, সূত্রের সাহায্যে নির্ণেয় বিন্যাসের সংখ্যা $= {}^6P_4 = 360$.

$\therefore$ নির্ণেয় উত্তর $= 360$.

উদাহরণ 6. 8টি শূন্য আসনের একটিতে যে কোন একজন বসিলে 4 জন ভদ্রলোক কত প্রকারে বসিবে ?

প্রথম ব্যক্তি 8টি আসনের যে কোন একটিতে (মোট 8 প্রকারে) বসিতে পারে। উহাদের যে কোনটিতে প্রথম ব্যক্তি বসিলে, দ্বিতীয় ব্যক্তি বাকী 7টির যে কোনটিতে (7 প্রকারে) বসিতে পারে। সুতরাং, প্রথম ও দ্বিতীয় ব্যক্তি মিলিতভাবে মোট 8×7 প্রকারে বসিতে পারে।

এই 8×7 প্রকারের যে কোন একভাবে প্রথম দুইজন বসার পর তৃতীয় ব্যক্তি বাকী 6টির আসনের যে কোন একটিতে (6 প্রকারে) বসিতে পারে। সুতরাং, প্রথম তিন জন মোট $8 \times 7 \times 6$ প্রকারে বসিতে পারে। উহাদের যে কোন এক প্রকারে প্রথম তিন জন বসিলে, চতুর্থ ব্যক্তি বাকী 5টি আসনের যে কোন একটিতে (5 প্রকারে) বসিতে পারে। সুতরাং, তাহারা মোট $8 \times 7 \times 6 \times 5$, অর্থাৎ, 1680 প্রকারে বসিবে।

সূত্র সাহায্যেও পাই, নির্ণেয় সংখ্যা

$$= {}^8P_4 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680.$$

উদাহরণ 7. Player শব্দটির অক্ষরগুলিকে একসঙ্গে লইয়া কত প্রকারে বিন্যাস করা যাইবে ? উহাদের চারিটি করিয়া লইয়া বিন্যাস করিলে কতগুলি হইবে ?

Player শব্দটির মধ্যে 6টি বিভিন্ন অক্ষর আছে। সুতরাং, নির্ণেয় বিন্যাসের সংখ্যা $= {}^6P_6 = \lfloor 6 = 720$. 4টি করিয়া লইয়া বিন্যাস করিলে নির্ণেয় বিন্যাসের সংখ্যা

$$= {}^6P_4 = 6.5.4.3 = 360.$$

উদাহরণ 8. CAMBRIDGE শব্দটির চারটি করিয়া অক্ষর লইয়া বিন্যাস করিলে(*i*) কতগুলির মধ্যে স্বরবর্ণ (Vowel) থাকিবে না, এবং (*ii*) কতকগুলির মধ্যে স্বরবর্ণ থাকিবে ?

Cambridge শব্দটি 9টি বিভিন্ন অক্ষর দ্বারা গঠিত। তাহাদের মধ্যে কেবলমাত্র তিনটি স্বরবর্ণ এবং বাকী ছয়টি ব্যঞ্জনবর্ণ (Consonant).

(*i*) সুতরাং, নির্ণেয় বিন্যাসের সংখ্যা

$= {}^6P_4 = 6.5.4.3 = 360,$

(*ii*) কোন শর্ত না থাকিলে 9টি অক্ষর হইতে 4টি করিয়া বিন্যাসের সংখ্যা

$= {}^9P_4 = 9.8.7.6 = 3024,$

সুতরাং, নির্ণেয় বিন্যাসের সংখ্যা

$= {}^9P_4 - {}^6P_4 = 3024 - 360 = 2664.$

উদাহরণ 9. স্বরবর্ণগুলিকে একত্র রাখিয়া FAILURE শব্দটির অক্ষরগুলিকে সাজাইলে মোট বিন্যাসের সংখ্যা কত হইবে ? **[Cal. Int. 1940]**

শব্দটিতে চারিটি বিভিন্ন স্বরবর্ণ এবং বাকী তিনটি বিভিন্ন ব্যঞ্জনবর্ণ আছে। স্বরবর্ণ চারিটিকে একটি অক্ষর মনে করিলে উহা এবং f, l, r মিলিয়া মোট 4টি বিভিন্ন অক্ষর হইবে ; উহাদের সবগুলিকে লইয়া সাজাইলে মোট বিন্যাস সংখ্যা হইবে ${}^4P_4$ অর্থাৎ $\lfloor 4$ বা 24.

আবার ঐ চারিটি স্বরবর্ণকে একত্র রাখিয়া নিজেদের মধ্যে সাজাইলে পূর্বোক্ত 24টি বিন্যাসের প্রত্যেকটি হইতে $\lfloor 4$ বিন্যাস হইবে।

∴ নির্ণেয় বিন্যাসের সংখ্যা $= \lfloor 4 \times 24$

$= 24 \times 24 = 576.$

উদাহরণ 10. 10টি পরীক্ষাপত্র কত প্রকারে সাজানো যাইবে যেখানে শ্রেষ্ঠ এবং নিকৃষ্টতম পত্র দুইখানি এক সঙ্গে থাকিবে না।

শ্রেষ্ঠ এবং নিকৃষ্টতম পত্র দুইখানিকে একখানি পরীক্ষাপত্র ধরিয়া সাজাইলে মোট বিন্যাসের সংখ্যা $= \lfloor 9$; কিন্তু ঐ দুইখানি পত্রকে নিজেদের মধ্যে $\lfloor 2$ প্রকারে সাজানো যায়। সুতরাং, যে সমস্ত বিন্যাসে শ্রেষ্ঠ ও নিকৃষ্টতম পত্র দুখানি একসঙ্গে থাকিবে তাহাদের মোট সংখ্যা $= \lfloor 2 \times \lfloor 9$.

কিন্তু কোন শর্ত না থাকিলে বিন্যাসের মোট সংখ্যা হইবে $\lfloor 10$. সুতরাং, যে সমস্ত বিন্যাসে ঐ পরীক্ষাপত্র দুইখানি একসঙ্গে থাকিবে না তাহাদের মোট সংখ্যা

$= \lfloor 10 - \lfloor 2 \times \lfloor 9 = (10-2) \times \lfloor 9 = 8 \times \lfloor 9 = 2903040.$

উদাহরণ 11. 'Narendrapur' শব্দটির সমস্ত অক্ষরগুলি এক সঙ্গে লইয়া কতগুলি বিন্যাস করা সম্ভব হইবে ?

প্রদত্ত শব্দটির মধ্যে 2টি a, 2টি n, 3টি r এবং বাকী চারটি অক্ষর d, e, p, u এর প্রত্যেকটি একটি করিয়া আছে ; সুতরাং শব্দটিতে মোট 11টি অক্ষর আছে।

$$\therefore \text{ নির্ণেয় বিন্যাসের সংখ্যা} = \frac{\underline{|11}}{\underline{|2}\,\underline{|2}\,\underline{|3}}$$
$$= 1663200.$$

উদাহরণ 12. 'Calcutta' শব্দটির অক্ষরগুলি একত্র লইয়া বিন্যাস করিলে উহাদের কতগুলির মধ্যে প্রথম অক্ষর u থাকিবে কিন্তু শেষ অক্ষর l থাকিবে না ?

যে সকল বিন্যাসের প্রথম অক্ষর u এবং শেষ অক্ষর l হইবে তাহাদের মোট সংখ্যা $= \dfrac{\underline{|6}}{\underline{|2}\,\underline{|2}\,\underline{|2}} = 90.$

যে সকল বিন্যাসের প্রথম অক্ষর u তাহাদের মোট সংখ্যা

$$= \frac{\underline{|7}}{\underline{|2}\,\underline{|2}\,\underline{|2}} = 630.$$

সুতরাং, যে সমস্ত বিন্যাসের প্রথম অক্ষর u হইবে কিন্তু শেষ অক্ষর l হইবে না তাহাদের মোট সংখ্যা $= 630 - 90 = 540.$

উদাহরণ 13. 'SUCCESS' শব্দটির অক্ষরগুলিকে একত্র লইয়া সাজাইলে কতগুলির মধ্যে তিনটি 'S' একত্র থাকিবে না ?

শব্দটিতে মোট 7টি অক্ষর আছে ; তাহাদের মধ্যে 2টি C, 3টি S এবং বাকী দুইটি বিভিন্ন।

সুতরাং কোন শর্ত না থাকিলে উহাদের লইয়া বিন্যাস করিলে মোট সংখ্যা হইবে $\dfrac{\underline{|7}}{\underline{|2}\,\underline{|3}}$ অর্থাৎ 420.

এখন, তিনটি 'S' একত্র থাকিবে এইরূপ বিন্যাসের সংখ্যা নির্ণয়ের জন্য এই তিনটি S কে একটি অক্ষর ধরিলে $(S\ S\ S)$, C, C, E, U এই 5টি অক্ষর হইবে যাহাদের ভিতর দুটি C এবং বাকীগুলি বিভিন্ন ; সুতরাং তিনট S একত্র থাকিবে এইরূপ বিন্যাসের সংখ্যা $= \dfrac{\underline{|5}}{\underline{|2}} = 60.$

$$\therefore \text{ নির্ণেয় বিন্যাসের সংখ্যা} = 420 - 60 = 360.$$

উদাহরণ 14. 'Balloon' শব্দটির অক্ষরগুলিকে একত্র লইয়া সাজাইলে কতগুলির মধ্যে স্বরবর্ণ তিনটি একত্র থাকিবে না ?

কোন শর্ত না থাকিলে 7টি অক্ষর একত্র লইয়া সাজাইলে মোট বিন্যাসের সংখ্যা $= \dfrac{\underline{|7}}{\underline{|2}\,\underline{|2}} = 1260.$

স্বরবর্ণ তিনটিকে একত্র লইয়া বিন্যাস করিলে, বিন্যাসের সংখ্যা $= \dfrac{\underline{|5}}{\underline{|2}} = 60.$

যেহেতু, তিনটি স্বরবর্ণের মধ্যে 2টি o, স্বরবর্ণগুলিকে নিজেদের মধ্যে বিন্যাস করিলে, বিন্যাসের সংখ্যা $= \dfrac{\underline{|3}}{\underline{|2}} = 3,$

সুতরাং, যে সকল শব্দে তিনটি স্বরবর্ণ একত্র থাকিবে তাহাদের সংখ্যা

$$= 60 \times 3 = 180.$$

সুতরাং, যে সকল শব্দে তিনটি স্বরবর্ণ একত্র থাকিবে না তাহাদের সংখ্যা

$$= 1260 - 180 = 1080.$$

উদাহরণ 15. 0, 2, 5, 6, 7 অঙ্কগুলি দ্বারা গঠিত পাঁচটি সার্থক অঙ্কযুক্ত সংখ্যার সংখ্যা নির্ণয় কর। (কোন অঙ্ক একাধিকবার ব্যবহার চলিবে না।)

এখানে, অঙ্ক সংখ্যা 5টি ; যেহেতু, পাঁচটি সার্থক অঙ্কযুক্ত সংখ্যা গঠন করিতে হইবে, কোন সংখ্যার প্রথমে 0 (শূন্য) থাকিবে না।

এখন যে সমস্ত সংখ্যা 0 দ্বারা আরম্ভ হইবে, সেই সমস্ত সংখ্যা নির্ণয়ের জন্য 0 কে বাদ রাখিয়া বাকী 4টি অঙ্ক 2, 5, 6, 7 কে নিজেদের মধ্যে সাজাইয়া উহাদের পূর্বে 0 বসাইলেই হইবে। তাহা হইলে 0 দ্বারা আরম্ভ করা সংখ্যাগুলির সংখ্যা

$$= {}^4P_4 = 24.$$

কোন শর্ত না থাকিলে প্রদত্ত পাঁচটি অঙ্ককে মোট যত প্রকারে সাজানো যাইবে তাহার সংখ্যা ${}^5P_5 = \underline{|5} = 120.$

সুতরাং পাঁচটি সার্থক অঙ্কযুক্ত সংখ্যার নির্ণেয় সংখ্যা $= 120 - 24 = 96.$

উদাহরণ 16. 5000 অপেক্ষা বৃহত্তর চার অঙ্কের যে সমস্ত সংখ্যা 3, 2, 0, 5, 8 এই অঙ্কগুলি দ্বারা গঠিত হইবে তাহা নির্ণয় কর। (কোন অঙ্ক একাধিকবার ব্যবহার চলিবে না।)

ইহা পরিষ্কার যে, সহস্র স্থানের অঙ্ক 5 অথবা 8 হইবে। যে সমস্ত সংখ্যার সহস্র স্থানে 5 থাকিবে তাহাদের সংখ্যা নির্ণয়ের জন্য 5 কে বাদ রাখিয়া বাকী 4টি অঙ্ককে

3টি স্থানে সাজাইয়া উহাদের প্রত্যেকের পূর্বে 5 বসাইতে হইবে। সুতরাং যে সমস্ত সংখ্যার সহস্র স্থানে 5 থাকিবে তাহাদের সংখ্যা $= {}^4P_3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$. সেইরূপ, যে সমস্ত সংখ্যার সহস্র স্থানে 8 থাকিবে তাহাদের সংখ্যা $= 24$.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাগুলির সংখ্যা $= 24 + 24 = 48$.

উদাহরণ 17. 1000 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর অথচ 5 দ্বারা বিভাজ্য যে সমস্ত সংখ্যা 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 অঙ্কগুলি দ্বারা গঠিত, (যে কোন অঙ্ক একাধিকবার থাকিবে না) এইরূপ কতগুলি সংখ্যা পাওয়া যাইবে ?

যে সকল সংখ্যার একক স্থানে 0 অথবা 5 থাকিবে তাহারা 5 দ্বারা বিভাজ্য। নির্ণেয় সংখ্যাগুলি 1000 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বলিয়া এক, দুই এবং তিন অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যা হইবে।

(*i*) এক অঙ্কবিশিষ্ট 5 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা পাওয়া যাইবে মাত্র 1টি এবং সেই সংখ্যাটি 5.

(*ii*) দুই অঙ্কবিশিষ্ট যে সমস্ত সংখ্যার শেষে 5 থাকিবে তাহাদের সংখ্যা $= {}^5P_1 = 5$;

এবং 5টি অঙ্কবিশিষ্ট যে সমস্ত সংখ্যার শেষে 0 (শূন্য) থাকিবে তাহাদের সংখ্যা $= {}^6P_1 = 6$.

সুতরাং দুইটি সার্থক অঙ্কযুক্ত যে সমস্ত সংখ্যা 5 দ্বারা বিভাজ্য তাহাদের সংখ্যা $= 5 + 6 = 11$.

(*iii*) তিন অঙ্কবিশিষ্ট যে সমস্ত সংখ্যার শেষে 0 (শূন্য) থাকিবে তাহাদের সংখ্যা

$$= {}^6P_2 = 6 \times 5 = 30.$$

প্রদত্ত সংখ্যাগুলিকে তিনটি করিয়া লইয়া সাজাইলে যাহাদের শেষে 5 থাকিবে তাহাদের সংখ্যা $= {}^6P_2 = 30$; ইহাদের মধ্যে যেগুলির প্রথমে 0 (শূন্য) আছে তাহাদের সংখ্যা $= {}^5P_1 = 5$.

সুতরাং. তিনটি সার্থক অঙ্কযুক্ত যে সমস্ত সংখ্যার শেষে 5 আছে তাহাদের সংখ্যা $= 30 - 5 = 25$. তাহা হইলে, তিনটি সার্থক অঙ্কযুক্ত যে সমস্ত সংখ্যা 5 দ্বারা বিভাজ্য তাহাদের সংখ্যা $= 30 + 25 = 55$.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাগুলির সংখ্যা $= 1 + 11 + 55 = 67$.

উদাহরণ 18. দুইখানা বিভিন্ন পুস্তকের প্রত্যেকটির 3টি করিয়া খণ্ড (volume) এবং অপর তিনটি বিভিন্ন পুস্তকের প্রত্যেকটির দুইটি করিয়া খণ্ড আছে। কত প্রকারে এই খণ্ডগুলি একই তাকে সাজানো যাইবে যেখানে একই পুস্তকের খণ্ডগুলি পাশাপাশি থাকিবে ?

যে কোন পুস্তকের খণ্ডগুলিকে পাশাপাশি রাখিয়া তাহাদিগকে একটি পুস্তক ধরিলে, 5 খানি পুস্তককে $\lfloor 5$ প্রকারে সাজানো যায়। এখন, প্রথম 2টি পুস্তকের প্রত্যেকটির 3টি খণ্ডকে নিজেদের মধ্যে $\lfloor 3$ প্রকারে এবং বাকী 3টি পুস্তকের প্রত্যেকটির 2টি খণ্ডকে $\lfloor 2$ প্রকারে সাজানো যায়। সুতরাং 12টি খণ্ডকে যত প্রকারে সাজানো যায় তাহার সংখ্যা $= \lfloor 5 \times (\lfloor 3 \times \lfloor 3) \times (\lfloor 2 \times \lfloor 2 \times \lfloor 2) = 34560$.

উদাহরণ 19. দুইটি **নির্দিষ্ট** মার্বেল সর্বদা পাশাপাশি থাকিবে এই শর্তে 10টি **বিভিন্ন** মার্বেলের একযোগে 5টি করিয়া লইয়া সাজাইলে মোট বিন্যাসের সংখ্যা কত হইবে?

যে দুইটি নির্দিষ্ট মার্বেল পাশাপাশি থাকিবে তাহাদের পৃথক করিয়া রাখিলে, অবশিষ্ট 8টি মার্বেলের 3টি করিয়া সাজাইলে বিন্যাসের মোট সংখ্যা হইবে ${}^8P_3$; এবং এই বিন্যাসগুলির প্রত্যেকের মাঝে ও দুই প্রান্ত মিলিয়া মোট 4টি স্থান আছে। দুইটি নির্দিষ্ট মার্বেলকে একটি ধরিয়া উহাকে উক্ত বিন্যাসগুলির প্রত্যেকটির 4টি উল্লিখিত স্থানে 4 প্রকারে বসানো যায়। আবার যেহেতু, ঐ নির্দিষ্ট মার্বেল দুইটিকে নিজেদের মধ্যে $\lfloor 2$ প্রকারে বিন্যাস করা যায়, সুতরাং, নির্ণেয় বিন্যাসের সংখ্যা $= {}^8P_3 \times (4 \times 2) = 2688$.

দ্বিতীয় পদ্ধতি ঃ নির্দিষ্ট দুইটি মার্বেলকে একটি বস্তু ধরিলে, নির্ণেয় বিন্যাসের সংখ্যা $= ({}^9P_4 - {}^8P_4) \times \lfloor 2 = 2688$.

উদাহরণ 20. প্রথম বর্ষের 6 জন এবং দ্বিতীয় বর্ষের 4 জন ছাত্র একটি বেঞ্চিতে কত প্রকারে বসিতে পারে, যেখানে যে কোন দুইজন দ্বিতীয় বর্ষের ছাত্র পাশাপাশি বসিবে না?

প্রথম বর্ষের 6 জন ছাত্রকে নিজেদের মধ্যে $\lfloor 6$ অর্থাৎ 720 প্রকারে সাজানো যায়; এবং এই বিন্যাসগুলির প্রত্যেকটির জন্য 6 জন ছাত্রের মাঝে 5টি স্থানে এবং দুইপ্রান্তে 2টি স্থানে মিলিয়া মোট 7টি স্থানে দ্বিতীয় বর্ষের 4 জন ছাত্রকে ${}^7P_4$ অর্থাৎ 840 প্রকারে বসানো যায়। সুতরাং, নির্ণেয় বিন্যাসের সংখ্যা $= 720 \times 840 = 604800$.

উদাহরণ 21. একটি বাসে বসিবার জন্য 6টি স্থান খালি আছে। তাহাদের মধ্যে 3টিতে কেবলমাত্র পুরুষ, 2টিতে কেবলমাত্র স্ত্রীলোক বসিবে এবং বাকী স্থানটিতে যে কেহ বসিতে পারে। 8 জন পুরুষ ও 5 জন স্ত্রীলোক একসঙ্গে ঐ বাসে উঠিলে, ঐ স্থানগুলি কত প্রকারে পূরণ হইবে?

8 জন পুরুষ 3টি স্থানে মোট ${}^8P_3$ প্রকারে বসিতে পারে; 5 জন স্ত্রীলোক 2টি আসনে ${}^5P_2$ প্রকারে বসিতে পারে। সুতরাং ঐ নির্দিষ্ট 5টি স্থান ${}^8P_3 \times {}^5P_2$ প্রকারে পূরণ হইবে। উহাদের যে কোন একপ্রকারে পূরণের পর বাকী একটি আসন অবশিষ্ট

8 জন দ্বারা $^8P_1$ প্রকারে পূরণ হইবে। সুতরাং, আসনগুলি মোট যত প্রকারে পূরণ হইবে তাহাদের সংখ্যা $= {}^8P_3 \times {}^5P_2 \times {}^8P_1 = 336 \times 20 \times 8 = 53760.$

উদাহরণ 22. একবারের বেশী ব্যবহার না করিয়া অযুগ্ম অঙ্কগুলি অযুগ্ম স্থানে থাকিবে এই শর্তে 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 এই সংখ্যাগুলি দ্বারা 7টি বিভিন্ন অঙ্কবিশিষ্ট কয়টি সংখ্যা গঠন করা যাইবে?

এখানে অযুগ্ম অঙ্ক তিনটি যেমন, 1, 3, 5 ; এবং বাকী 4টি যুগ্ম অঙ্ক ; কিন্তু অযুগ্ম স্থান 4টি এবং যুগ্ম স্থান 3টি।

অযুগ্ম অঙ্ক তিনটিকে অযুগ্ম 4টি স্থানে $^4P_3$ উপায়ে বসানো যায়। উহাদের যে কোন এক প্রকারে বসানোর পর বাকী 4টি স্থান খালি থাকবে ; বাকী 4টি স্থানে যুগ্ম অঙ্ক 4টিকে $^4P_4$ উপায়ে বসানো যাইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $= {}^4P_3 \times {}^4P_4 = 24 \times 24 = 576.$

উদাহরণ 23. 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1 অঙ্কগুলি দ্বারা সাত অঙ্কের মোট কয়টি সংখ্যা গঠন করা যাইবে যেখানে অযুগ্ম অঙ্কগুলি অযুগ্ম স্থানে থাকিবে?

এখানে, 1, 3, 3, 1 অঙ্কগুলি অযুগ্ম ; এবং বাকী তিনটি অঙ্ক 2, 4, 2 যুগ্ম।

অযুগ্ম অঙ্ক চারিটি 4টি অযুগ্ম স্থানে থাকিবে ; এবং তাহা $\dfrac{\lfloor 4}{\lfloor 2 \lfloor 2}$ প্রকারে রাখা যাইবে ; এবং যুগ্ম অঙ্ক তিনটিকে তিনটি যুগ্ম স্থানে $\dfrac{\lfloor 3}{\lfloor 2}$ প্রকারে রাখা যাইবে।

এখন, অযুগ্ম অঙ্কগুলির প্রত্যেক প্রকার বিন্যাসের জন্য যেহেতু যুগ্ম অঙ্কগুলির বিন্যাসের সংখ্যা $\dfrac{\lfloor 3}{\lfloor 2}$, সুতরাং, নির্ণেয় সংখ্যার সংখ্যা $= \dfrac{\lfloor 4}{\lfloor 2 \lfloor 2} \times \dfrac{\lfloor 3}{\lfloor 2} = 6 \times 3 = 18.$

প্রশ্নমালা 23

1. মান নির্ণয় কর :—

(i) $^6P_3$; (ii) $^{10}P_5$; (iii) $^{25}P_3$;

(iv) $^{10}P_{10}$; (v) $^{20}P_{19}$; (vi) $^nP_{r-1}$.

2. কোন্‌টি ঠিক আছে বল :

(i) $^{10}P_{10} = {}^{10}P_9$; (ii) $^{15}P_{15} > {}^{15}P_{14}$;

(iii) $^{14}P_{14} < {}^{15}P_{14}$; (iv) $^{20}P_{19} > {}^{19}P_{18}$.

3. r-এর মান বাহির কর যদি :—

(i) $^{10}P_r = 5040$; (ii) $^{15}P_r = 32760$.

4. n-এর মান বাহির কর যদি :—

(i) ${}^nP_4 = 840$; (ii) ${}^nP_5 = 60 \times {}^{n-1}P_3$;

(iii) ${}^nP_5 : {}^nP_3 = 2$; (iv) ${}^{n+1}P_6 : {}^{n-1}P_7 = 5 : 12$.

5. প্রমাণ কর (সূত্রের সাহায্যে) :—

(i) $(n-r+1) \times {}^nP_{r-1} = {}^nP_r$; (ii) $n(n-1)\, {}^{n-2}P_{r-2} = {}^nP_r$;

(iii) ${}^{n-1}P_r + r \times {}^{n-1}P_{r-1} = {}^nPr$.

6. দেখাও যে, ${}^{2n}P_n = 2^n \times \{1.3.5 \ldots\ldots\ldots\ldots (2n-1)\}$.

7. কোন সূত্রের সাহায্য না লইয়া প্রমাণ কর :—

$${}^nP_r - {}^{n-1}P_r = r \times {}^{n-1}P_{r-1}.$$

8. n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর r সংখ্যক লইয়া বিন্যাসের সংখ্যা ${}^nP_r$ হইলে, দেখাও যে, $1 + 1.{}^1P_1 + 2.{}^2P_2 + 3.{}^3P_3 + 4.{}^4P_4 + \cdots + n.{}^nP_n = \underline{|n+1}$.

9. একটি প্রেক্ষাগৃহে 5টি দরজা আছে। এক ব্যক্তি কয়টি বিভিন্ন প্রকারে ঐ গৃহে প্রবেশ করিতে পারে এবং পৃথক্ দরজা দিয়া বাহির হইতে পারে ?

10. দুই ব্যক্তি একটি রেলগাড়ীর কামরায় প্রবেশ করিয়া দেখিল সেখানে 5টি আসন খালি আছে। তাহারা কত বিভিন্ন প্রকারে ঐ আসনে বসিতে পারিবে ?

11. একটি রেলপথে 26টি স্টেশন আছে। কতগুলি বিভিন্ন তৃতীয় শ্রেণীর টিকিট মুদ্রিত করিলে এক স্টেশন হইতে অন্য স্টেশনে যাওয়া যাইবে ? **[H. S. Comp. 1961]**

12. যে শহরে 10টি হাসপাতাল আছে, 3 জন রোগীকে কত প্রকারে সেই হাসপাতগুলিতে পাঠানো যায়, যাহাতে যে কোন দুইজন রোগীকে একই হাসপাতালে না রাখা হয় ?

13. চাঁদপাল ঘাট ও বোটানিক্যাল গার্ডেনের মধ্যে 12টি ফেরি-ষ্টীমার যাতায়াত করে। এক ব্যক্তি কয় প্রকারে একটি ষ্টীমারে চাঁদপাল ঘাট হইতে বোটানিক্যাল গার্ডেনে যাইয়া অপর একটি ষ্টীমারে ফিরিতে পারে ? **[H. S. Com. 1960]**

14. একটি মিনিবাসে 6 জন যাত্রী উঠিয়া দেখিল যে মাত্র 4টি আসন খালি আছে। ঐ 4টি আসন ঐ ছয়জন যাত্রী দ্বারা কত প্রকারে পূরণ হইবে ?

15. চারজন পথিক কোন এক শহরে আসিল, যেখানে পাঁচটি হোটেল আছে। কোন দুইজন একই হোটেলে না থাকিলে, তাহারা কত প্রকারে হোটেলে থাকিতে পারিবে ? **[H. S. Com. 1962]**

16. কোন অঙ্ক একাধিকবার ব্যবহার না করিয়া, 3, 4, 5, 6, 7, 8 অঙ্কগুলির সাহায্যে 4 অঙ্কবিশিষ্ট কয়টি বিভিন্ন সংখ্যা গঠন করা যাইবে ?

17. 'DELHI' শব্দটির অক্ষরগুলিকে একসঙ্গে লইয়া কত প্রকারে বিন্যাস করা যাইবে ?

18. 'Equation' শব্দটির অক্ষরগুলিকে 5টি করিয়া লইয়া বিন্যাস করিলে কতগুলি শব্দ তৈয়ারী হইবে ?

19. 'Logarithm' শব্দের অক্ষরগুলিকে একসঙ্গে লইয়া বিন্যাস করিলে উহাদের কতগুলির প্রথমে 'th' থাকিবে ?

20. 'JUXTAPOSED' শব্দের অক্ষরগুলিকে একত্র লইয়া বিন্যাস করিলে কতগুলির মধ্যে স্বরবর্ণগুলি একসঙ্গে থাকিবে ? [H. S. 1971]

21. দেখাও যে, Calcutta শব্দের অক্ষরগুলির বিন্যাসের সংখ্যা, America শব্দটির অক্ষরগুলির বিন্যাস-সংখ্যার দ্বিগুণ।

22. 'Consonant' শব্দের অক্ষরগুলিকে একসঙ্গে লইয়া কত প্রকারে সাজানো যাইবে ? কতগুলির মধ্যে ব্যঞ্জনবর্ণ একসঙ্গে থাকিবে ?

23. 'College' শব্দটির অক্ষরগুলিকে একত্র লইয়া বিন্যাস করিলে নূতন কতগুলি বিন্যাস পাওয়া যাইবে যাহাদের প্রথমে '*c*' থাকিবে কিন্তু শেষে '*g*' থাকিবে না।

24. 'Accommodation' শব্দটির অক্ষরগুলিকে একত্র লইয়া (*i*) কতগুলি বিভিন্ন শব্দ গঠন করা হইবে ; (*ii*) উহাদের কতগুলির মধ্যে '*o*' তিনটি পাশাপাশি থাকিবে না ?

25. 3, 4, 5, 6, 7 অঙ্কগুলির প্রত্যেকটিকে কেবলমাত্র একবার লইয়া (*i*) কতগুলি চার অঙ্কের যুগ্ম সংখ্যা এবং (*ii*) কতগুলি পাঁচ অঙ্কের অযুগ্ম সংখ্যা গঠিত হইবে ?

26. 3, 2, 7, 4, 0 অঙ্কগুলির কোনটিকে একাধিকবার ব্যবহার না করিয়া পাঁচটি সার্থক অঙ্কযুক্ত কয়টি সংখ্যা গঠিত হইবে ? [H. S. 1967]

27. 5000 অপেক্ষা বৃহত্তর চার অঙ্কের যে সমস্ত সংখ্যা 3, 4, 5, 6, 7 দ্বারা গঠিত হইবে তাহাদের সংখ্যা কত ? (কোন অঙ্ক একাধিকবার ব্যবহৃত হইবে না।) [H. S. 1969]

28. 2, 5, 7, 8, 9 অঙ্কগুলিকে একাধিকবার ব্যবহার না করিয়া 7000 অপেক্ষা বৃহত্তর কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যাইবে ? [H. S. 1973]

29. 400 এবং 700 এর মধ্যবর্তী যে সমস্ত সংখ্যা 2, 4, 0, 6, 8 গঠন করা যাইবে, তাহাদের সংখ্যা কত ?

30. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 অঙ্কগুলির প্রত্যেকটিকে একাধিকবার ব্যবহার না করিয়া 1000 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর অথচ 5 দ্বারা বিভাজ্য কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যাইবে ? [Cal. Int. 1942]

31. যাহাতে সর্বোৎকৃষ্ট এবং সর্বনিকৃষ্ট উত্তরপত্র দুইখানি একসঙ্গে না থাকে, সেইভাবে 7 খানা উত্তর পত্রকে কত প্রকারে সাজানো যাইবে ?

32. দেখাও যে, n সংখ্যক বিভিন্ন পুস্তক একটি তাকে যত প্রকারে সাজানো যাইবে, যেখানে নির্দিষ্ট দুইটি পুস্তক পাশাপাশি থাকিবে না, তাহাদের সংখ্যা $(n-2)\,\underline{|n-1}$. [**Cal. Int, 1947**]

33. দেখাও যে, n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুকে একত্র লইয়া সাজাইলে, যেখানে নির্দিষ্ট r সংখ্যক বস্তু নির্দিষ্ট ক্রমে থাকিবে, তাহাদের মোট সংখ্যা $\underline{|n} \div \underline{|r}$.

34. দুইটি বিভিন্ন রচনাবলীর প্রতিটির 4টি করিয়া খণ্ড এবং অপর তিনটি বিভিন্ন রচনাবলীর প্রতিটির 2টি করিয়া খণ্ড আছে। যাহাতে একই রচনাবলীর খণ্ডগুলি তাহাদের নিজেদের পাশে থাকে এইভাবে রাখিয়া সমস্ত রচনাবলীকে আলমারির একটি তাকে কত প্রকারে রাখা যাইবে?

35. একটি পাঠাগারে কোন এক পুস্তকের 5 কপি, অন্য দুই পুস্তকের 4 কপি, অপর তিন পুস্তকের 6 কপি করিয়া এবং আটটি বিভিন্ন পুস্তকের এক কপি করিয়া আছে। সব পুস্তকগুলিকে কত প্রকারে সাজানো যায়?

36. 5 জন বালক ও 10 জন পুরুষ কত প্রকারে এক সারিতে 15টি আসনে পাশাপাশি বসিতে পারিবে যেখানে যে কোন দুজন বালক এক সঙ্গে থাকিবে না?

37. একটি ঘরে 6 জন পুরুষ ও 6 জন স্ত্রীলোক প্রবেশ করিয়া দেখিল সেখানে বসার আসন মাত্র 8টি আছে। যদি উহাদের 4টিতে কেবলমাত্র পুরুষ, 2টিতে কেবলমাত্র স্ত্রীলোক এবং বাকী 2টিতে যে কেহ বসিতে পারে তবে ঐ আসন 8টি 12 জন দ্বারা কত প্রকারে পূরণ হইবে?

38. 'Daughter' শব্দের অক্ষরগুলিকে একত্র লইয়া কতপ্রকারে সাজানো যাইবে যেখানে স্বরবর্ণগুলি কেবল অযুগ্ম স্থানে থাকিবে?

39. 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 অঙ্কগুলির প্রত্যেকটিকে মাত্র একবার ব্যবহার করিয়া 7টি বিভিন্ন অঙ্কবিশিষ্ট কয়টি সংখ্যা গঠন করা যাইবে যেখানে যুগ্ম সংখ্যাগুলি অযুগ্ম স্থানে থাকিবে।

40. 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, অঙ্কগুলি দ্বারা মোট কয়টি সংখ্যা গঠন করা যাইবে যেখানে যুগ্ম অঙ্কগুলি যুগ্ম স্থানে থাকিবে?

41. 4, 5, 5, 6, 7, 7, 7 অঙ্কগুলি দ্বারা সাত অঙ্কবিশিষ্ট কতগুলি যুগ্ম সংখ্যা গঠন করা যাইবে?

42. (*a*) 47263815 সংখ্যাটির অযুগ্ম স্থানের অঙ্কগুলির ক্রম (order) পরিবর্তন না করিয়া এই অঙ্কগুলি দ্বারা 8 অঙ্কবিশিষ্ট কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যাইবে?

(*b*) প্রদত্ত সংখ্যাটি 47263215 হইলে কি হইবে?

7-6. প্রত্যেক বস্তুকে r সংখ্যক বার পর্যন্ত লওয়া যাইতে পারে এই শর্তে n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর r সংখ্যক একসঙ্গে লইয়া বিন্যাসের সংখ্যা নির্ণয়।

এখানে, n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে যে কোন r-সংখ্যক এক সঙ্গে লইয়া এবং প্রত্যেক বস্তু একবার, দুইবার, তিনবার, ..., r-সংখ্যক বার পর্যন্ত লইয়া r শূন্যস্থান মোট যত প্রকারে পূর্ণ করা যাইবে তাহাই হইবে এইরূপক্ষেত্রে নির্ণেয় মোট বিন্যাসের সংখ্যা।

প্রথম শূন্যস্থানটি n প্রকারে পূর্ণ করা যাইবে, কারণ n-সংখ্যক বস্তুর যে কোন একটি ঐ স্থানে রাখা যাইতে পারে।

প্রথম স্থানটি n প্রকারের যে কোন এক প্রকারে পূর্ণ করিবার পর, দ্বিতীয় স্থানটিকেও n প্রকারে পূর্ণ করা যাইবে, কারণ, শর্তানুসারে একই বস্তু পুনরায় ব্যবহার করা চলিবে। তাহা হইলে, প্রথম ও দ্বিতীয় স্থান দুইটি মোট $n \times n$, অর্থাৎ n^2 প্রকারে পূর্ণ করা যাইবে। অনুরূপভাবে, প্রথম তিনটি স্থান $n^2 \times n$, অর্থাৎ n^3 প্রকারে পূর্ণ করা যাইবে।

এখন দেখা যাইতেছে যে, প্রত্যেক ক্ষেত্রে যতগুলি শূন্যস্থান পূর্ণ করা হইতেছে, n-এর ঘাত বা সূচক ঠিক তত হইতেছে। সুতরাং, এইভাবে অগ্রসর হইলে দেখা যায় r সংখ্যক শূন্যস্থান পূর্ণ হইবে মোট n^r প্রকারে।

$\therefore$ **নির্ণেয় বিন্যাসের সংখ্যা** $= n^r$.

উদাহরণস্বরূপ, 2, 5, 6 অঙ্ক তিনটির যে কোনটিকে একাধিক বার ব্যবহার করিয়া দুই অঙ্কবিশিষ্ট কয়টি সংখ্যা গঠন করা যায় দেখা যাক্।

সূত্র সাহায্যে, নির্ণেয় সংখ্যাগুলির সংখ্যা $= 3^2 = 9$; সাধারণভাবে, সেই সংখ্যাগুলি : 22, 25, 26; 52, 55, 56; 62, 65, 66.

7-7. n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুকে একসঙ্গে লইয়া বৃত্তাকারে বিন্যাসের সংখ্যা নির্ণয়।

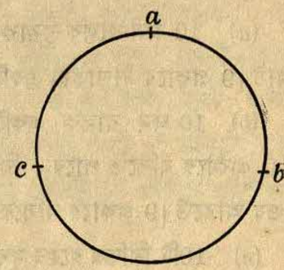
কতিপয় বস্তুকে এক সারিতে (in a row) সাজাইলে যে বিন্যাস হয় তাহাকে **রৈখিক বিন্যাস (Linear Permutation)** বলে; এইরূপ ক্ষেত্রে, বিন্যাসের সংখ্যা নির্ণয় পদ্ধতি পূর্বে কিছু কিছু আলোচিত হইয়াছে।

কতিপয় বস্তুকে বৃত্তাকারে (in a circle, বা, forming a ring) সাজাইলে সেইরূপ বিন্যাসকে **বৃত্তাকার বিন্যাস (Circular Permutation)** বলে।

রৈখিক বিন্যাসের ক্ষেত্রে দুইটি প্রান্ত থাকে; কিন্তু বৃত্তাকার বিন্যাসের ক্ষেত্রে সেইরূপ কোন প্রান্ত থাকে না। সেইজন্য কোন নির্দিষ্ট সংখ্যক বস্তুর রৈখিক বিন্যাস ও বৃত্তাকার বিন্যাসের সংখ্যাদ্বয় পরস্পর সমান হইতে পারে, আবার নাও হইতে পারে।

a, b, c অক্ষর তিনটি একত্র লইয়া রৈখিক বিন্যাস করিলে উহাদের সংখ্যা হইবে $^3P_3 = 1 \times 2 \times 3 = 6$; এবং উহারা হইবে : $abc, acb, bca, bac, cab, cba$.

কিন্তু a, b, c অক্ষর তিনটিকে বৃত্তাকারে সাজাইলে দেখা যাইবে, abc, bca, cab বিন্যাসগুলি অভিন্ন। পার্শ্ববর্তী চিত্রে, a, b, c কে বৃত্তাকার বিন্যাসে সাজানোর একটি অবস্থান।



উহা হইতে দেখা যাইতেছে a, b, c এই ক্রমে (in this order) অর্থাৎ ঘড়ির কাঁটার গতির ক্রমে পড়িয়া গেলে উহাদের একই অবস্থান হইতে এই তিনটি বিন্যাস পাওয়া যায়।

অনুরূপভাবে, acb, cba, bac বিন্যাস তিনটি অভিন্ন।

সুতরাং দেখা যাইতেছে, **বৃত্তাকার বিন্যাসগুলি বস্তুর অথবা স্থানের আপেক্ষিক অবস্থানের উপর নির্ভর করে।**

[1] স্থানের সাপেক্ষে n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর বৃত্তাকার বিন্যাসের সংখ্যা নির্ণয়।

প্রথম স্থানে n-সংখ্যক বস্তুর যে কোন একটি রাখা যাইতে পারে; সুতরাং, প্রথম স্থানটি n বিভিন্ন প্রকারে পূর্ণ করা যাইবে। প্রথম স্থানটি n প্রকারের যে কোন এক প্রকারে পূর্ণ করিবার পর দ্বিতীয় স্থানটি $(n-1)$ প্রকারে পূর্ণ করা যাইবে, কারণ বাকি $(n-1)$ বস্তুর যে কোন একটি দ্বিতীয় স্থানে রাখা যাইতে পরে। সুতরাং প্রথম ও দ্বিতীয় স্থান দুইটি মোট $n(n-1)$ বিভিন্ন প্রকারে পূর্ণ করা যাইবে। এইভাবে অগ্রসর হইলে দেখা যায়, n সংখ্যক স্থানকে মোট $\{n(n-1)\ (n-2)\ldots\ldots 3.2.1\}$ প্রকারে অর্থাৎ $\underline{|n}$ প্রকারে পূর্ণ করা যাইবে।

$\therefore$ **নির্ণেয় বিন্যাসের সংখ্যা $= \underline{|n}$.**

[2] বস্তুর সাপেক্ষে n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর বৃত্তাকার বিন্যাসের সংখ্যা নির্ণয় :

এইরূপ ক্ষেত্রে, বিন্যাসের বস্তুগুলি তাহাদের নিজেদের অবস্থানের উপর নির্ভরশীল। এখানে, উহাদের যে কোন একটিকে একটি নির্দিষ্ট স্থানে স্থির রাখিয়া বাকী $(n-1)$

সংখ্যক বস্তুগুলিকে নিজেদের মধ্যে যত প্রকারের বিভিন্ন উপায়ে সাজানো যাইবে তাহাই উভয় আবর্তের বিন্যাসের সংখ্যা হইবে।

স্থতরাং, (i) বস্তুর সাপেক্ষে উভয় আবর্তনের বিন্যাসসমূহ **বিভিন্ন** হইলে, নির্ণেয় বিন্যাসের সংখ্যা $= \underline{\lfloor n-1}$; কিন্তু, (ii) বস্তুর সাপেক্ষে উভয় আবর্তের বিন্যাস-সমূহ **অভিন্ন** হইল, নির্ণেয় বিন্যাসের সংখ্যা $= \frac{1}{2}\underline{\lfloor n-1}$.

দৃষ্টান্ত :

(a) 10 জন বালক বৃত্তাকারে এক আবর্তে মোট $\frac{1}{2}\underline{\lfloor 9}$ প্রকারে এবং উভয় আবর্তে মোট $\underline{\lfloor 9}$ প্রকারে দাঁড়াইয়া একটি বেড় (a ring) তৈয়ারী করিবে।

(b) 10 জন বালক একটি গোল টেবিলের চারিধারে চেয়ারের সাপেক্ষে বিভিন্ন $\underline{\lfloor 10}$ প্রকারে বসিতে পারে ; কিন্তু নিজেদের সাপেক্ষে এক আবর্তে $\frac{1}{2}\underline{\lfloor 9}$ প্রকারে এবং উভয় আবর্তে $\underline{\lfloor 9}$ প্রকারে বসিবে।

(c) 10টি বিভিন্ন রঙের মুক্তা দ্বারা বিভিন্ন মোট $\frac{1}{2}\underline{\lfloor 9}$-গুলি মালা তৈয়ারী করা যাইবে।

উদাহরণ 1. 4টি কমলালেবু 10 জন বালকের মধ্যে কত প্রকারে দেওয়া যাইতে পারে ?

প্রত্যেক কমলালেবু যে কোন বালককে দেওয়া যাইতে পারে ; স্থতরাং প্রত্যেকটি কমলালেবু 10 প্রকারে দেওয়া যাইতে পারে। এখন একটি কমলালেবু দেওয়ার পর সেইটি যতপ্রকারে দেওয়া সম্ভব তাহার প্রত্যেক প্রকারের জন্য দ্বিতীয় কমলালেবুটিও 10 প্রকারে দেওয়া যাইবে। স্থতরাং, দুইটি কমলালেবু 10×10, অর্থাৎ, 10^2 প্রকারে দেওয়া যাইবে। এইরূপ অগ্রসর হইলে, 4টি কমলালেবু 10 জনের মধ্যে মোট 10^4, অর্থাৎ, 10,000 প্রকারে দেওয়া যাইবে।

উদাহরণ 2. 4 খানা চিঠি পাঁচটি ডাকবাক্সে কত প্রকারে ফেলা যাইবে ?

প্রত্যেক চিঠি যে কোন ডাকবাক্সে ফেলা যাইতে পারে ; অর্থাৎ, প্রত্যেক চিঠি 5 প্রকারে ফেলা যাইতে পারে। স্থতরাং, 4 খানা চিঠি মোট 5^4, অর্থাৎ, 625 প্রকারে ফেলা যাইবে।

উদাহরণ 3. আবৃত্তির জন্য একটি, গানের জন্য একটি এবং ছবি আঁকার জন্য একটি—মোট তিনটি পুরস্কার 20 জন ছাত্রের মধ্যে কত প্রকারে দেওয়া যাইতে পারে ?

প্রতিটি পুরস্কার যে কোন ছাত্র পাইতে পারে। স্থতরাং, প্রত্যেক পুরস্কার 20 প্রকারে দেওয়া যাইবে। প্রথম পুরস্কার 20 প্রকারের যে কোন এক ভাবে দেওয়ার পর

দ্বিতীয় পুরস্কারটিও 20 প্রকারে দেওয়া যাইবে। সুতরাং প্রথম দুইটি পুরস্কার 20×20, বা, 20^2 প্রকারে দেওয়া যাইবে। সেইরূপ তিনটি পুরস্কার মোট 20^3, অর্থাৎ 8000, প্রকারে দেওয়া যাইবে।

উদাহরণ 4. 1, 2, 3, 4 অঙ্কগুলির যে কোনটি একাধিকবার ব্যবহার করিয়া তিন অঙ্কের মোট কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যাইবে?

তিন অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যার একক স্থান চারি প্রকারে পূরণ করা যায়। কারণ, 1, 2, 3, 4 অঙ্কগুলির যে কোন একটিকে একক স্থানে বসানো যইতে পারে। এই চারি প্রকারের যে কোন এক প্রকারে একক স্থান পূরণ করার পর দশক স্থানটিও চারি প্রকারে পূরণ করা যাইবে, কারণ, ঐ স্থানটিতে 1, 2 ,3, 4-এর যে কোন একটি সংখ্যা বসানো যাইতে পারে। সুতরাং, একক ও দশক স্থান দুইটি মোট 4^2 প্রকারে পূরণ করা যাইবে। অনুরূপভাবে, একক, দশক ও শতক স্থান তিনটি 4^3 প্রকারে পূরণ করা যাইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাগুলির সংখ্যা $= 4^3 = 64$.

উদাহরণ 5. কত প্রকারে 5 জন পুরুষ এবং 3 জন স্ত্রীলোক বৃত্তাকারে দাঁড়াইতে পারিবে, যেখানে 3 জন স্ত্রীলোক পাশাপাশি থাকিবে?

পর পর তিনটি স্থানে 3 জন স্ত্রীলোককে $\lfloor 3$, অর্থাৎ, 6 প্রকারে দাঁড় করানো যাইবে। স্ত্রীলোকরা এই ছয় প্রকারের যে কোন এক প্রকারে দাঁড়াইলে, 5 জন পুরুষ 5টি স্থানে $\lfloor 5$, অর্থাৎ, 120 প্রকারে দাঁড়াইবে। সুতরাং, 5 জন পুরুষ ও 3 জন স্ত্রীলোক মিলিতভাবে বৃত্তাকারে উভয় আবর্তে মোট 6×120, অর্থাৎ, 720 প্রকারে দাঁড়াইবে।

উদাহরণ 6. কোন দুইজন বালক পাশাপাশি বসিবে না এই শর্তে 5 জন পুরুষ ও 5 জন বালক একটি গোল টেবিলের চারিধারে উহার আপেক্ষিক অবস্থানে 10টি আসনে কত প্রকারে বসিবে?

একজন পুরুষ একটি নির্দিষ্ট স্থানে বসিলে বাকি 4 জন পুরুষ টেবিলের চারিধারে (বর্তমানে তাহাদের জন্য নির্দিষ্ট 4টি আসনে) $\lfloor 4$, অর্থাৎ, 24 প্রকারে বসিবে। এই পুরুষদের এই জাতীয় বিন্যাসগুলির যে কোন একটি বিন্যাসের 5 জন পুরুষের মাঝে মাঝে 5টি স্থানে 5 জন বালক বসিতে পারে; এবং তাহা সম্ভব হইবে $^5P_5$, অর্থাৎ, 120 প্রকারে। আবার প্রথম পুরুষটি 10টি শূন্য স্থানের যে কোন একটিতে বসিতে পারে। সুতরাং, 5 জন পুরুষ এবং 5 জন বালক মোট $24 \times 120 \times 10$ প্রকারে, অর্থাৎ, 28800 প্রকারে বসিবে।

প্রশ্নমালা 24

1. 5টি লজেঞ্জ (lozenge) 10 জন বালকের মধ্যে কত প্রকারে দেওয়া যাইতে পারে ?

2. 4 খানা চিঠি 4টি খামের মধ্যে কত প্রকারে রাখা যাইবে ?

3. 4টি ডাকবাক্সে কত প্রকারে 6 খানা চিঠি ফেলা যাইবে।

4. একজন ছাত্রের একাধিক পুস্তক পাইতে বাধা না থাকিলে 3 খানা পুস্তক 6 জন ছাত্রের মধ্যে কত প্রকারে দেওয়া যাইবে ?

5. 4 জন রোগীকে 7টি হাসপাতালে কত প্রকারে ভর্তি করা যাইবে ?

6. 10 জন ছাত্র কত প্রকারে 4টি কলেজে ভর্তি হইতে পারে ?

7. নিয়মিত উপস্থিতির জন্য একটি, আবৃত্তির জন্য একটি এবং খেলাধূলার জন্য একটি—এই তিনটি পুরস্কার 25 জন ছাত্রছাত্রীর মধ্যে কত প্রকারে দেওয়া যাইবে ?

8. কোন নির্বাচনে যে কোন ভোটদাতা চারিটি করিয়া ভোট দিবার অধিকারী। ভোট প্রার্থীর সংখ্যা পাঁচ হইলে এবং যে কোন ভোটদাতার যে কোন ভোটপ্রার্থীকে একাধিক ভোট দিতে বাধা না থাকিলে, একজন ভোটদাতা কত প্রকারে ভোট দিতে পারিবে ?

9. এক পূজা উৎসবে একজন ভদ্রলোক তাঁহার 6 জন বন্ধুকে কত প্রকারে নিমন্ত্রণ করিতে পারিবে ?

10. একজন ভদ্রলোকের তিন জন ভৃত্য আছে। ঐ ভদ্রলোক তিনজন ভৃত্যের সাহায্যে কত প্রকারে তাহার ছয়জন বন্ধুর নিকট নিমন্ত্রণ পত্র পাঠাইতে পারিবেন ?

11. 3, 5, 7 অঙ্কগুলির যে কোন একটিকে একাধিকবার ব্যবহার করিয়া তিন অঙ্কবিশিষ্ট কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যাইবে ?

12. 2, 2, 4, 4, 6, 6, অঙ্কগুলি হইতে দুই অঙ্কবিশিষ্ট কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যাইবে ?

13. 5, 5, 5, 7, 7, 7 অঙ্কগুলি হইতে তিন অঙ্কবিশিষ্ট কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যাইবে ?

14. 'But' শব্দটির অক্ষরগুলিকে লইয়া তিনটি অক্ষরযুক্ত কতগুলি শব্দ তৈয়ারী করা যাইতে পারে ?

15. 3, 4, 5, 6 অঙ্কগুলি দ্বারা তিন অঙ্কবিশিষ্ট সর্বাধিক কতগুলি যুগ্ম সংখ্যা গঠন করা যাইবে ?

16. 4, 5, 6 অঙ্কগুলি দ্বারা সর্বাধিক চার অঙ্কবিশিষ্ট মোট কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যাইবে ?

17. 2, 3, 4, 5, 6 অঙ্কগুলির সাহায্যে 10,000 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর সর্বাধিক কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যাইবে ?

18. 0, 3, 6 অঙ্কগুলি দ্বারা (*i*) 4 অঙ্কবিশিষ্ট এবং (*ii*) অনধিক 4 অঙ্কবিশিষ্ট কয়টি সংখ্যা গঠন করা যাইবে ?

19. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 অঙ্কগুলির যে কোনটিকে একাধিকবার ব্যবহার করিয়া 5 অঙ্কবিশিষ্ট কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যাইবে? উহাদের মধ্যে কতগুলি 50,000 অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ?

20. 6 জন বালক তাহাদের নিজেদের আপেক্ষিক অবস্থানে একটি নাগরদোলায় (Merry-go-round) কত প্রকারে বসিতে পারে ?

21. 25টি বিভিন্ন বর্ণের মুক্তা দিয়া কত প্রকারে মালা গাঁথা যাইবে ?

22. ব্রতচারী নৃত্যে 10 জন বালিকা কত প্রকারে বৃত্তাকারে দাঁড়াইতে পারে ?

23. 6 জন নিমন্ত্রিত অতিথিসহ বাড়ীর অতিথি সেবক ও অতিথি সেবিকা একটি গোলটেবিলের চারিধারে নিজেদের সাপেক্ষে কত প্রকারে বসিতে পারে ?

24. একটি গোল টেবিলের চারিধারে আসনের সাপেক্ষে 5 জন অধ্যাপক কত প্রকারে বসিতে পারেন ?

25. 10টি নীল রঙের এবং অপর 10টি পিঙ্ক রঙের, মোট 20টি মুক্তা দিয়া কত প্রকারে মালা গাঁথা যাইবে, যেখানে এক রঙের দুইটি মুক্তা পাশাপাশি থাকিবে না ?

26. 5 জন প্রথম বর্ষের এবং অপর 4 জন দ্বিতীয় বর্ষের ছাত্র বৃত্তাকারে একটি গোলটেবিলের সাপেক্ষে কত ভাবে 9টি আসনে বসিতে পারে, যেখানে দ্বিতীয় বর্ষের দুই জন ছাত্র পাশাপাশি থাকিবে না ?

27. দুই জন বালক পাশাপাশি বসিবে না এই শর্তে 4 জন বালক এবং 6 জন পুরুষ একটি গোল টেবিলের সাপেক্ষে উহার চারিধারে 10টি আসনে কত প্রকারে বসিবে ?

7-8. (*a*) **সমবায়ের সংজ্ঞা :**

কতিপয় বিভিন্ন বস্তুর সমসংখ্যায় কয়েকটি কয়েকটি করিয়া লইয়া, অথবা, সবগুলিকে একসঙ্গে লইয়া বিভিন্ন দল (Group) বা নির্বাচন (Selection) করিলে এক একটি দল বা নির্বাচনকে এক একটি **সমবায় (Combination)** বলা হয়। অবশ্য, প্রদত্ত কতিপয় বস্তুর সবগুলিকে একত্র লইলে কেবলমাত্র একটি সমবায় হইবে।

a, *b*, *c* অক্ষর তিনটির দুইটি করিয়া লইয়া নির্বাচন করিলে *ab*, *bc*; *ca* এই তিনটি কেবলমাত্র সমবায় হইবে।

সমবায় কোন ক্রমের (Order বা Arrangement এর) উপর নির্ভরশীল নহে ; সেই জন্য, *ab* এবং *ba* অভিন্ন সমবায়।

(b) **সমবায় সংক্রান্ত প্রতীক :**

n-সংখ্যক **বিভিন্ন** বস্তুর r-সংখ্যক করিয়া লইয়া মোট সমবায়ের সংখ্যাকে ^nC_r, অথবা $_nC_r$, বা C_r, অথবা $\binom{n}{r}$ দ্বারা সূচিত করা হইয়া থাকে।

সুতরাং, $^3C_1=3$, $^3C_2=3$, $^3C_3=1$.

স্পষ্টতঃই, $^nC_1=n$; এবং $^nC_n=1$.

(c) **বিন্যাস ও সমবায়ের পার্থক্য :**

বিন্যাসে ক্রম (Order, বা, Arrangement) বিবেচ্য ; কিন্তু সমবায়ে কেবলমাত্র নির্বাচন (Selection) বিবেচ্য, ক্রম বিবেচ্য নহে।

i) a, b, c কে দুইটি করিয়া লইয়া সাজাইলে বিন্যাসের মোট সংখ্যা হইবে $^3P_2$, অর্থাৎ, 6, এবং তাহারা ab, ba ; bc, cb ; ca, ac.

(*ii*) a, b, c কে দুইটি করিয়া লইয়া নির্বাচন করিলে সমবায়ের মোট সংখ্যা হইবে $^3C_2$ অর্থাৎ 3 ; এবং, তাহারা, ab, bc, ca.

সুতরাং, $^3P_2>{}^3C_2$.

মন্তব্য : কতিপয় বস্তু হইতে কয়েকটি নির্দিষ্ট সংখ্যক করিয়া হইয়া বিন্যাসের সংখ্যা নির্ণয়ের জন্য প্রথমে উহাদের ঐ নির্দিষ্ট সংখ্যক করিয়া লইয়া সমবায় গঠনের পর উহাদিগকে নিজেদের মধ্যে বিন্যাস করিলেই নির্ণেয় বিন্যাসের সংখ্যা পাওয়া যাইবে।

যেমন, a, b, c এর দুইটি করিয়া লইয়া সমবায়ের সংখ্যা $^3C_2$ এবং উহাদের প্রতিটি সমবায়ের মধ্যে বিভিন্ন দুইটি করিয়া অক্ষর আছে ; এবং যেহেতু, প্রতিটি সমবায়ের অক্ষরগুলিকে $\lfloor 2$ প্রকারে বিন্যাস করা যায়, অতএব, $^3C_2$ সংখ্যক সমবায় হইতে মোট $\lfloor 2\times{}^3C_2$ সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যাইবে। কিন্তু a, b, c এর দুইটি করিয়া লইয়া বিন্যাসের সংখ্যা $^3P_2$.

$$\therefore\quad {}^3C_2\times\lfloor 2={}^3P_2.$$

সাধারণভাবে,

$$^n\mathrm{P}_r>{}^nC_r,\ (r\neq 1).$$

7-9. n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর r-সংখ্যক করিয়া লইয়া বিভিন্ন সমবায়ের মোট সংখ্যা নির্ণয় ($r\leq n$) :

মনে করি, নির্ণেয় সমবায়ের সংখ্যা ^nC_r. এখানে, প্রতিটি সমবায়ে r-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু আছে। এইরূপ প্রতিটি সমবায়ের r-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুকে তাহাদের নিজেদের মধ্যে যতগুলি সম্ভব বিভিন্ন প্রকারে সাজাইলে, প্রত্যেক সমবায় হইতে $\lfloor r$

সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যাইবে। তাহা হইলে ^nC_r সংখ্যক সমবায় হইতে মোট $^nC_r \times \lfloor r$ সংখ্যক বিভিন্ন বিন্যাস পাওয়া যাইবে।

আবার, এই ^nC_r সংখ্যক সমবায়ের প্রত্যেকটির অন্তর্গত বস্তুগুলিকে যত প্রকারে সম্ভব তাহাদের নিজেদের মধ্যে সাজাইলে, মোট যতগুলি বিন্যাস হইবে, তাহা n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর r-সংখ্যক করিয়া লইয়া বিভিন্ন বিন্যাসের মোট সংখ্যার সমান হইবে।

সুতরাং, $^nC_r \times \lfloor r = {}^nP_r$

$$= n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$$

$$\therefore \quad {}^nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r.(r-1)(r-2)\cdots\cdots 3.2.1.}$$

$$\text{বা,} \quad {}^nC_r = \frac{\lfloor n}{\lfloor r \cdot \lfloor n-r}$$

দ্বিতীয় পদ্ধতি :

মনে করি, নির্ণেয় সমবায়ের সংখ্যা $= {}^nC_r$; এবং মনে করি, n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু যেন n-সংখ্যক বিভিন্ন অক্ষর $a, b, c\cdots\cdots$ দ্বারা সূচিত।

এখন a-চিহ্নিত বস্তুটি যে সমস্ত সমবায়ের মধ্যে থাকিবে, তাহাদের সংখ্যা n সংখ্যক বস্তু হইতে উহাকে বাদ রাখিয়া বাকী $(n-1)$ সংখ্যক বস্তুর $(r-1)$ সংখ্যক করিয়া লইলে মোট সমবায়ের সংখ্যার সমান হইবে অর্থাৎ $^{n-1}C_{r-1}$ এর সমান হইবে।

তাহা হইলে, a চিহ্নিত বস্তুটি $^{n-1}C_{r-1}$ সংখ্যক সমবায়ের মধ্যে থাকিবে। অনুরূপভাবে, b চিহ্নিত বস্তুটি $^{n-1}C_{r-1}$ সংখ্যক সমবায়ের মধ্যে থাকিবে ; ইত্যাদি।

সুতরাং, n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে r-সংখ্যক করিয়া লইয়া সমবায় গঠন করিলে প্রত্যেক বস্তু মোট সমবায়ে $^{n-1}C_{r-1}$ বার করিয়া থাকিবে।

সুতরাং, নির্ণেয় সমবায়গুলিতে মোট অক্ষর (বা, বস্তুর) সংখ্যা

$$= n \times {}^{n-1}C_{r-1}.$$

আবার যেহেতু, মোট সমবায়ের সংখ্যা ^nC_r এবং উহাদের প্রত্যেকটির মধ্যে r-সংখ্যক অক্ষর (বা, বস্তু) আছে, তাহা হইলে, নির্ণেয় সমবায়গুলিতে মোট অক্ষর- (বা বস্তু-) সংখ্যা $= r \times {}^nC_r$.

$$\therefore \quad r \times {}^nC_r = n \times {}^{n-1}C_{r-1}.$$

যাহা n এবং r এর সকল মানের জন্য সর্বদা সত্য, যদি $r \leqslant n$ হয়।

$$\therefore \quad {}^{n}C_{r} = \frac{n}{r} \times {}^{n-1}C_{r-1}$$

$$\therefore \quad {}^{n-1}C_{r-1} = \frac{n-1}{r-1} \times {}^{n-2}C_{r-2} \;;$$

$$ {}^{n-2}C_{r-2} = \frac{n-2}{r-2} \times {}^{r-3}C_{r-3} \;;$$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

$$ {}^{n-r+2}C_{2} = \frac{n-r+2}{2} \times {}^{n-r+1}C_{1}.$$

এখন, বাম পার্শ্বের অনুরূপ রাশিগুলিকে গুণ করিয়া এবং ডান পার্শ্বের অনুরূপ রাশিগুলি গুণ করিয়া এবং পরে ঐ দুই গুণফল হইতে সাধারণ উৎপাদকগুলিকে অপনয়ন করিয়া পাই,

$$ {}^{n}C_{r} = \frac{n}{r} \times \frac{n-1}{r-1} \times \frac{n-2}{r-2} \times \ldots\ldots \frac{n-r+2}{2} \times {}^{n-r+1}C_{1}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+3)(n-r+2)(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\ldots\ldots 3.2.1}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)\,\underline{|n-r}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}$$

$$= \frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}.$$

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ

(i) $ {}^{n}C_{n} = \frac{\underline{|n}}{\underline{|n}\,\underline{|0}} = \frac{\underline{|n}}{\underline{|n}} = 1$;

(ii) $ {}^{n}C_{1} = \frac{\underline{|n}}{\underline{|1}\,\underline{|n-1}} = n$;

(iii) $ {}^{n}C_{o} = \frac{\underline{|n}}{\underline{|o}\,\underline{|n}} = \frac{\underline{|n}}{\underline{|n}} = 1$;

অর্থাৎ, $ {}^{n}C_{o} = 1$.

7-10. পূরক সমবায় (Complementary Combinations) ঃ

n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর r-সংখ্যক করিয়া লইলে মোট সমবায়ের সংখ্যা, ঐ n-সংখ্যক বস্তুর $(n-r)$ সংখ্যক করিয়া লইলে মোট সমবায়ের সংখ্যার সমান। কারণ, n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে r-সংখ্যক বস্তুর একটি সমবায় গঠন করিলে, বাকি $(n-r)$ সংখ্যক বস্তু দ্বারা অপর একটি সমবায় গঠিত হয়। সুতরাং, ঐ n-সংখ্যক বস্তু হইতে

r-সংখ্যক করিয়া মোট যতগুলি সমবায় গঠিত হইবে, $(n-r)$ সংখ্যক করিয়া লইলেও ঠিক ততগুলি সমবায় গঠিত হইবে।

$$\therefore\ {}^n\boldsymbol{C}_r = {}^n\boldsymbol{C}_{n-r}\ .$$

দ্বিতীয় পদ্ধতি :

$$\because\ {}^nC_r = \frac{\lfloor n}{\lfloor r\ \lfloor n-r}\ .$$

$$\therefore\ {}^nC_{n-r} = \frac{\lfloor n}{\lfloor n-r\ \lfloor n-(n-r)} = \frac{\lfloor n}{\lfloor r\ \lfloor n-r}$$

$$\therefore\ {}^n\boldsymbol{C}_r = {}^n\boldsymbol{C}_{n-r}\ .$$

দ্রষ্টব্য : যদি ${}^nC_p = {}^nC_q$ হয়, তবে (i) $p=q$, অথবা, (ii) $p+q=n$.

পূরক সমবায়ের সূত্র হইতে,

$${}^nC_p = {}^nC_{n-p}\ .$$

সুতরাং, ${}^nC_p = {}^nC_q$ হইলে, ${}^nC_{n-p} = {}^nC_q$,

$\therefore\ p=q$; অথবা, $n-p=q$, অর্থাৎ, $p+q=n$.

মন্তব্য :

যেহেতু, ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$, অতএব, r অপেক্ষা $(n-r)$ ছোট হইলে, r-এর পরিবর্তে $(n-r)$ লিখিয়া ${}^nC_r$-এর মান নির্ণয় করা সুবিধাজনক। যেমন,

$${}^9C_6 = {}^9C_{9-6} = {}^9C_3 = \frac{9.8.7}{3.2.1} = 84.$$

7-11. শর্তাধীন সমবায় :

[1] n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে r সংখ্যক করিয়া লইয়া গঠিত যে সমস্ত সমবায়ে p সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু সর্বদাই থাকিবে তাহাদের সংখ্যা নির্ণয় $(p<r<n)$:

যে p-সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু সর্বদাই সমবায়ে থাকিবে, তাহাদের পৃথক করিয়া রাখিলে, বাকী $(n-p)$ সংখ্যক বস্তু হইতে $(r-p)$ সংখ্যক বস্তু ${}^{n-p}C_{r-p}$ উপায়ে নির্বাচন করা যাইবে। এখন, এই সমবায়গুলির প্রত্যেকটির সহিত ঐ নির্দিষ্ট p সংখ্যক বস্তু সংযুক্ত করিলে যে সমস্ত সমবায় পাওয়া যাইবে তাহাদের প্রতিটির বস্তু সংখ্যা r এবং প্রত্যেকটিতে ঐ p সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু থাকিবে।

$$\therefore\ \textbf{নির্ণেয় সমবায়ের সংখ্যা} = {}^{n-p}\boldsymbol{C}_{r-p}.$$

[2] n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর r সংখ্যক করিয়া লইয়া গঠিত যে সমস্ত সমবায়ে p সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু থাকিবে না, তাহাদের সংখ্যা নির্ণয় $(r+p \leq n)$:

যে p-সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু সমবায়ে থাকিবে না তাহাদের পৃথক করিয়া রাখিলে, অবশিষ্ট থাকিবে $(n-p)$ সংখ্যক বস্তু ; এখন এই $(n-p)$ সংখ্যক অবশিষ্ট বস্তু হইতে r সংখ্যক করিয়া যত প্রকারে নির্বাচন করা যাইবে তাহাদের মোট সংখ্যা হইবে $^{n-p}C_r$.

$$\therefore \text{ নির্ণেয় সমবায়ের সংখ্যা} = {}^{n-p}C_r.$$

[3] m-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে p সংখ্যক করিয়া এবং অপর n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে q-সংখ্যক করিয়া লইয়া $(m+n)$ সংখ্যক বস্তু হইতে $(p+q)$ সংখ্যক বস্তুর নির্বাচনের সংখ্যা নির্ণয় :

m-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে p-সংখ্যক করিয়া লইলে, মোট নির্বাচনের সংখ্যা $= {}^mC_p$. আবার, n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে q সংখ্যক করিয়া লইলে, মোট নির্বাচনের সংখ্যা $= {}^nC_q$.

এখন প্রথমোক্ত নির্বাচনগুলির প্রত্যেকটির সহিত শেষোক্ত নির্বাচনগুলির প্রত্যেকটিকে মোট ${}^mC_p \times {}^nC_q$ প্রকারে সংযুক্ত করা যায় এবং ইহাদের প্রত্যেকটির ভিতর $(p+q)$ সংখ্যক বস্তু থাকিবে।

$$\therefore \text{ নির্ণেয় নির্বাচনের সংখ্যা} = {}^mC_p \times {}^nC_q.$$

7-12. $1 < r \leq n$ হইলে,

$${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r.$$

প্রথম পদ্ধতি :

যেহেতু, $${}^nC_r = \frac{\lfloor n}{\lfloor r \, \lfloor n-r}$$

$$\therefore \quad {}^nC_r + {}^nC_{r-1} = \frac{\lfloor n}{\lfloor r \, \lfloor n-r} + \frac{\lfloor n}{\lfloor r-1 \, \lfloor n-r+1}$$

$$= \frac{\lfloor n}{\lfloor r-1 \, \lfloor i-r} \cdot \left\{\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r+1}\right\}$$

$$= \frac{\lfloor n}{\lfloor r-1 \, \lfloor n-r} \times \frac{n+1}{r(n-r+1)}$$

$$= \frac{\lfloor n+1}{\lfloor r \, \lfloor n-r+1}$$

$$= {}^{n+1}C_r.$$

দ্বিতীয় পদ্ধতি :

$(n+1)$ সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে r-সংখ্যক করিয়া লইয়া সমবায় গঠন করিলে মোট সমবায়ের সংখ্যা হইবে ${}^{n+1}C_r$; এবং এই সমবায়গুলির ভিতর (i) কতকগুলির মধ্যে একটি নির্দিষ্ট বস্তু থাকিবে না এবং (ii) অপরগুলির মধ্যে ঐ বস্তুটি থাকিবে।

(i) যে সকল সমবায়ে একটি নির্দিষ্ট বস্তু থাকিবে না তাহাদের সংখ্যা হইবে ${}^nC_r$; এবং (ii) যে সকল সমবায়ে ঐ নির্দিষ্ট বস্তুটি থাকিবে তাহাদের সংখ্যা হইবে ${}^nC_{r-1}$. তাহা হইলে, এই দুই শ্রেণীর সমবায়ের সমষ্টি, $(n+1)$ সংখ্যক বস্তু হইতে r সংখ্যক করিয়া হইয়া সমবায়ের সংখ্যার সমান হইবে।

$$\therefore \quad {}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r.$$

উদাহরণ 1. মান নির্ণয় কর :

(i) ${}^{10}C_3$; (ii) ${}^{15}C_5$; (iii) ${}^{30}C_{27}$; (iv) ${}^{50}C_{45}$.

(i) ${}^{10}C_3 = \dfrac{10.9.8}{3.2.1.} = 120$;

(ii) ${}^{15}C_5 = \dfrac{15.14.13.12.11}{5.4.3.2.1} = 3003$;

(iii) ${}^{30}C_{27} = {}^{30}C_3 = \dfrac{30.29.28}{3.2.1} = 4060$;

(iv) ${}^{50}C_{45} = {}^{50}C_5 = \dfrac{50.49.48.47.46}{5.4.3.2.1} = 2118760.$

উদাহরণ 2. ${}^{36}C_r = {}^{36}C_{r+2}$ হইলে, r এর মান কত ?

$\because$ ${}^{36}C_r = {}^{36}C_{r+2}$, $\therefore$ $r = r+2$ বা, $r + (r+2) = 36.$

কিন্তু, $r \neq r+2$; $\therefore$ $r + (r+2) = 36$, $\therefore$ $r = 17.$

উদাহরণ 3. ${}^nC_{16} = {}^nC_9$ হইলে, ${}^nC_{22}$ এর মান বাহির কর।

যেহেতু, ${}^nC_{16} = {}^nC_9$, $\therefore$ $n = 16 + 9 = 25$

$$\therefore \quad {}^nC_{22} = {}^{25}C_{22} = {}^{25}C_3 = \frac{25.24.23.}{\underline{|3}} = 2300.$$

উদাহরণ 4. ${}^{n+1}C_6 = {}^{n-1}C_4$ হইলে ${}^nC_3$ এর মান কত ?

প্রদত্ত শর্ত হইতে,

$$\frac{(n+1)(n)(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{\underline{|6}} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{\underline{|4}}$$

বা, $\dfrac{(n+1)n}{6 \times 5} = 1$; বা, $n^2 + n - 6 \times 5 = 0$;

বা, $(n-5)(n+6)=0$. $\therefore\ n=5, -6$.

এখন, $\because\ n \neq -6,\ \therefore\ n=5$.

সুতরাং, $^nC_3 = {}^5C_3 = \dfrac{5.4.3}{3.2.1} = 10$.

উদাহরণ 5. 10 জন ব্যক্তির মধ্য হইতে যে কোন 7 জনের একটি কমিটি কত প্রকারে গঠন করা যাইতে পারে ?

10 জনের মধ্য হইতে 7 জন করিয়া যত প্রকারে নির্বাচন করা যাইবে তাহাই নির্ণেয় কমিটিগুলির সংখ্যা হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় উত্তর : $^{10}C_7 = {}^{10}C_3 = \dfrac{10.9.8}{3.2.1} = 120$.

উদাহরণ 6. 15 জন ছাত্র হইতে 4 জন ছাত্রের একটি কমিটি গঠন করিতে হইবে। (i) কমিটিতে একজন নির্দ্দিষ্ট ছাত্র সর্বদা থাকিবে ; (ii) তিনজন নির্দিষ্ট ছাত্র কখনও থাকিবে না, এইরূপ কত প্রকারে কমিটি গঠন করা হইবে ?

(i) যে ছাত্রটি সর্বদা থাকিবে তাহাকে প্রথমে নির্বাচন করিয়া বাকী 14 জন ছাত্র হইতে 3 জন করিয়া কত প্রকারে নির্বাচন করা যাইবে তাহাই মোট নির্বাচনের সংখ্যা হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় নির্বাচনের সংখ্যা $= {}^{14}C_3 = \dfrac{14.13.12}{3.2.1} = 364$.

(ii) যে 3 জন নির্দিষ্ট ছাত্র কোন কমিটিতে থাকিবে না তাহাদের বাদ রাখিলে, বাকি থাকে 12 জন ছাত্র ; এই 12 জন ছাত্র হইতে 4 জন যত প্রকারে নির্বাচন করা যাইবে তাহাই মোট নির্বাচনের সংখ্যা হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় নির্বাচনের সংখ্যা $= {}^{12}C_4$

$$= \frac{12.11.10.9}{4.3.2.1} = 495.$$

উদাহরণ 7. 10 জন ভদ্রলোক এবং 5 জন ভদ্রমহিলা হইতে 8 জনের কমিটি মোট কত প্রকারে গঠন করা যাইবে, যেখানে প্রত্যেক কমিটিতে যে কোন 6 জন ভদ্রলোক এবং যে কোন 2 জন ভদ্রমহিলা থাকিবেন ?

10 জন ভদ্রলোক হইতে 6 জন করিয়া যত প্রকারে নির্বাচন করা যাইবে তাহার সংখ্যা $= {}^{10}C_6 = {}^{10}C_4 = \dfrac{10.9.8.7}{4.3.2.1} = 210$.

5 জন মহিলা হইতে 2 জন করিয়া যত প্রকারে নির্বাচন করা যাইবে তাহার সংখ্যা $= {}^5C_2 = \frac{5.4}{2.1} = 10.$

সুতরাং, 10 জন ভদ্রলোকের যে কোন 6 জনের সহিত 5 জন ভদ্রমহিলার যে কোন 2 জনের মিলিত নির্বাচনের মোট সংখ্যা $= {}^{10}C_6 \times {}^5C_2 = 210 \times 10 = 2100.$

$\therefore$ নির্ণেয় উত্তর : 2100.

উদাহরণ 8. 8 জন ভদ্রলোক এবং 4 জন ভদ্রমহিলার মধ্য হইতে 5 জনের একটি কমিটি কত প্রকারে গঠন করা যাইবে যেখানে প্রত্যেক কমিটিতে অন্ততঃ একজন ভদ্রমহিলা থাকিবেন ?

ভদ্রলোক এবং মহিলার মোট সংখ্যা 12 ; এই 12 জনের মধ্য হইতে 5 জন করিয়া নির্বাচন করিলে মোট নির্বাচনের সংখ্যা $= {}^{12}C_5$; এবং ইহাদের যতগুলিতে একজনও মহিলা থাকিবে না তাহাদের সংখ্যা $= {}^8C_5$.

$\therefore$ নির্ণেয় নির্বাচনের সংখ্যা $= {}^{12}C_5 - {}^8C_5.$

$$= \frac{12.11.10.9.8}{5.4.3.2.1} - \frac{8.7.6.5.4}{5.4.3.2.1}.$$

$$= 11 \times 9 \times 8 - 7 \times 4 \times 2 = 736.$$

দ্বিতীয় পদ্ধতি :

কমিটিগুলি নিম্নলিখিতভাবে হইতে পারে :

(*i*) 1 জন মহিলা ও 4 জন ভদ্রলোক ;

(*ii*) 2 জন মহিলা ও 3 জন ভদ্রলোক ;

(*iii*) 3 জন মহিলা ও 2 জন ভদ্রলোক ;

(*iv*) 4 জন মহিলা ও 1 জন ভদ্রলোক।

$\therefore$ নির্ণেয় নির্বাচনের সংখ্যা

$$= {}^4C_1 \times {}^8C_4 + {}^4C_2 \times {}^8C_3 + {}^4C_3 \times {}^8C_2 + {}^4C_4 \times {}^8C_1$$

$$= 4 \times 70 + 6 \times 56 + 4 \times 28 + 1 \times 8$$

$$= 280 + 336 + 112 + 8 = 736.$$

উদাহরণ 9. দুইটি বিভাগের প্রত্যেকটিতে 5টি করিয়া মোট 10টি প্রশ্ন আছে। একজন পরীক্ষার্থী মোট 6টি প্রশ্ন উত্তর করিতে পারে ; কিন্তু কোন বিভাগ হইতে 4টির বেশী প্রশ্নের উত্তর দিতে পারিবে না, এই শর্তে ঐ পরীক্ষার্থী কত প্রকারে 6টি প্রশ্ন নির্বাচন করিতে পারে ?

প্রদত্ত শর্তানুসারে, ঐ পরীক্ষার্থী

(1) প্রথম বিভাগ হইতে 4টি এবং দ্বিতীয় বিভাগ হইতে 2টি ;

(2) প্রথম বিভাগ হইতে 3টি এবং দ্বিতীয় বিভাগ হইতে 3টি ;

(3) প্রথম বিভাগ হইতে 2টি এবং দ্বিতীয় বিভাগ হইতে 4টি প্রশ্ন নির্বাচন করিতে পারে।

সুতরাং, মোট নির্বাচনের সংখ্যা

$$= {}^5C_4 \times {}^5C_2 + {}^5C_3 \times {}^5C_3 + {}^5C_2 \times {}^5C_4$$
$$= 5 \times 10 + 10 \times 10 + 10 \times 5 = 50 + 100 + 50 = 200.$$

উদাহরণ 10. 20টি বাহুবিশিষ্ট কোন বহুভুজের কৌণিক বিন্দুগুলি যোগ করিয়া কতগুলি ত্রিভুজ গঠন করা যাইবে? ঐ বহুভুজের কর্ণগুলির সংখ্যা কত?

বহুভুজের মোট 20টি কৌণিক বিন্দু আছে; যে কোন তিনটি কৌণিক বিন্দু যোগ করিলে একটি ত্রিভুজ গঠিত হইবে। এখন, 20টি কৌণিক বিন্দু হইতে 3টি করিয়া যত প্রকারে নির্বাচন করা যাইবে তাহাই নির্ণেয় ত্রিভুজের সংখ্যা হইবে।

∴ নির্ণেয় ত্রিভুজের সংখ্যা $= {}^{20}C_3$

$$= \frac{20.19.18}{3.2.1} = 1140.$$

কৌণিক বিন্দুগুলির যে কোন দুইটি যোগ করিলে একটি সরলরেখা পাওয়া যাইবে। এখন, 20টি কৌণিক বিন্দুর 2টি করিয়া লওয়া যাইবে, ${}^{20}C_2$ অর্থাৎ $\frac{20 \times 19}{2.1}$ বা, 190 প্রকারে। তাহা হইলে মোট সরলরেখার সংখ্যা = 190.

এই 190টি সরলরেখার মধ্যে বহুভুজের 20টি বাহু ধরা আছে।

∴ নির্ণেয় কর্ণের সংখ্যা $= 190 - 20 = 170$.

উদাহরণ 11. কোন সমতলে 25টি বিন্দু আছে, যাহাদের মধ্যে 5টি বিন্দু একই সরলরেখার উপর অবস্থিত। ঐ বিন্দুগুলি যোগ করিয়া (*i*) কতগুলি সরলরেখা এবং (*ii*) কতগুলি ত্রিভুজ গঠন করা যাইবে?

(*i*) 25টি বিন্দুর যে কোন তিনটি যদি একই সরলরেখায় না থাকিত তবে দুই দুইটি করিয়া 25টি বিন্দু যোগ করিলে উৎপন্ন সরলরেখাগুলির সংখ্যা হইত ${}^{25}C_2$, অর্থাৎ 300.

কিন্তু, 5টি নির্দিষ্ট বিন্দু একই সরলেরখায় থাকায় উহাদের দুই দুইটি করিয়া যোগ করিলে যে ${}^5C_2$ অর্থাৎ 10টি সরলরেখা উৎপন্ন হয় তাহারা ঐ 5টি বিন্দুগামী 1টি সরলরেখা।

∴ নির্ণেয় সরলরেখার সংখ্যা $= 300 - 10 + 1 = 291$.

(*ii*) 25টি বিন্দুর যে কোন তিনটি যদি একই সরলরেখায় না থাকিত, তবে উহাদের দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের সংখ্যা হইত $^{25}C_3$, অর্থাৎ 2300.

এখন, 5টি নির্দিষ্ট বিন্দুর যে কোন তিনটি যদি একই সরলরেখায় না থাকিত, তাহা হইলে উহাদের দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের সংখ্যা হইতে $^{5}C_3$, অর্থাৎ 10, এবং ঐ 5টি বিন্দু একই সরলরেখায় থাকায়, উহাদের দ্বারা কোন ত্রিভুজ হইবে না।

$\therefore$ নির্ণেয় ত্রিভুজের সংখ্যা $= 2300 - 10 = 2290$.

উদাহরণ 12. 1, 2, 4, 6, 7, 9 অঙ্কগুলিকে একাধিক বার ব্যবহার না করিয়া এবং উহাদের 4টি করিয়া লইয়া অঙ্কগুলির মানের অধঃক্রমে সাজানো কতগুলি সংখ্যা পাওয়া যাইবে ?

প্রদত্ত শর্তানুসারে, নির্ণেয় সংখ্যাগুলির প্রত্যেকটিতে অঙ্কগুলি উহাদের মানের অধঃক্রমে থাকিবে। সুতরাং, প্রদত্ত অঙ্কগুলির যে কোন চারিটি দ্বারা কেবলমাত্র একটি সংখ্যা গঠিত হইবে। তাহা হইলে এই 6টি অঙ্ক হইতে 4টি করিয়া যত প্রকারে লওয়া যাইবে তাহাই নির্ণেয় সংখ্যার সংখ্যা হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাগুলির সংখ্যা $= {}^6C_4 = {}^6C_2 = 15$.

উদাহরণ 13. 18টি দশ পয়সা এবং 15টি পাঁচ পয়সা একই সারিতে কত প্রকারে রাখা যাইবে, যেখানে দুইটি পাঁচ পয়সা পাশাপাশি থাকিবে না ?

প্রদত্ত শর্তানুসারে দুইটি দশ পয়সার মধ্যে একটির বেশী পাঁচ পয়সা থাকিতে পারিবে না। 18টি দশ পয়সা একই সারিতে প্রথমে রাখা যাক্ ; এখন উহাদের মাঝখানে 17টি এবং প্রান্তে দুইটি মিলিয়া মোট 19টি স্থান আছে ; এই 19টি স্থানের যে কোন 15টিতে পাঁচ পয়সাগুলি রাখা যাইবে এবং তাহা সম্ভব হইবে $^{19}C_{15}$ প্রকারে।

$\therefore$ নির্ণেয় উত্তর : $^{19}C_{15} = {}^{19}C_4$

$$= \frac{19.18.17.16}{4.3.2.1} = 3876.$$

উদাহরণ 14. 'EXPRESSION' শব্দটির 4টি করিয়া অক্ষর কত প্রকারে নির্বাচন করা যাইতে পারে ?

Expression শব্দটিতে মোট 10টি অক্ষর আছে ; তাহাদের মধ্যে 2টি e, 2টি s এবং বাকি ছয়টি অক্ষর একটি করিয়া আছে। সুতরাং, শব্দটিতে e, x, p, r, s, i, o, n এই 8 প্রকারের অক্ষর আছে। সুতরাং, নির্বাচনগুলি নিম্নলিখিত তিন প্রকারে সম্ভব :

(*i*) দুইটি এক প্রকারের সদৃশ অক্ষর, এবং দুইটি অপর প্রকারের সদৃশ অক্ষর ;

(*ii*) দুইটি সদৃশ অক্ষর এবং দুইটি অপর বিভিন্ন অক্ষর।

(*iii*) চারিটি পরস্পর বিভিন্ন অক্ষর।

(*i*) (e, e) এবং (s, s) এই দুই প্রকারের সদৃশ অক্ষরগুলি একসঙ্গে মোট নির্বাচন করা যাইবে ${}^2C_2$ অর্থাৎ 1 প্রকার।

(*ii*) (e, e) এবং (s, s) জোড়া দুইটি যে কোন একটি ${}^2C_1$ প্রকারে এবং বাকী 7টি অক্ষর s, x, p, r, i, o, n অথবা, e, x, p, r, i, o, n-এর মধ্য হইতে যে কোন দুইটি ${}^7C_2$ প্রকারে নির্বাচন করিলে, চারিটি অক্ষরের মোট নির্বাচন হইবে ${}^2C_1 \times {}^7C_2$ প্রকারে।

(*iii*) e, x, p, r, s, i, o, n এই 8টি অক্ষর হইতে যে কোন 4টি নির্বাচন করা যাইবে ${}^8C_4$ প্রকারে।

$\therefore$ মোট নির্বাচন সংখ্যা $= {}^2C_2 + {}^2C_1 \times {}^7C_2 + {}^8C_4$

$= 1 + 2 \times 21 + 70 = 113.$

প্রশ্নমালা 25

1. মান নির্ণয় কর :

(*i*) ${}^{14}C_4$; (*ii*) ${}^{26}C_6$; (*iii*) ${}^{27}C_{23}$; (*iv*) ${}^{40}C_{35}$.

2. r এর মান বাহির কর যদি :

(*i*) ${}^{20}C_r = {}^{20}C_{r-6}$; (*ii*) ${}^{24}C_{r+1} = {}^{24}C_{r-5}$;

(*iii*) ${}^{30}C_{r+3} = {}^{30}C_{15-r}$; (*iv*) ${}^9C_{2r+3} = {}^9C_{8-3r}$;

(*v*) ${}^{20}C_{2r-3} = {}^{20}C_{r+2}$; (*vi*) ${}^{2n}C_r = {}^{2n}C_{r+2}$.

3. ${}^nC_{12} = {}^nC_{18}$ হইলে, ${}^nC_{27}$ এর মান কত ?

4. ${}^nC_6 = {}^{n-2}C_4$ হইলে, ${}^nC_3$ এর মান কত ?

5. ${}^nC_2 = m$ হইলে, দেখাও যে, ${}^mC_2 = 3 \times {}^{n+1}C_4$.

6. প্রমাণ কর :

(*i*) ${}^nC_r + 2 \times {}^nC_{r-1} + {}^nC_{r-2} = {}^{n+2}C_r$;

(*ii*) ${}^nC_r + 3 \times {}^nC_{r-1} + 3 \times {}^nC_{r-2} + {}^nC_{r-3} = {}^{n+3}C_r$.

7. কোন সূত্রের সাহায্য না লইয়া প্রমাণ কর :

(*i*) ${}^pC_q = {}^pC_{p-q}$; (*ii*) ${}^pC_q + {}^pC_{q-1} = {}^{p+1}C_q$.

[H. S. Comp. 1974]

8. সূত্রের সাহায্য ব্যতিরেকে প্রমাণ কর :

${}^{n-1}C_r + {}^{n-1}C_{r-1} = {}^nC_r$. **[Joint Ent. Ex. 1971]**

9. ${}^{28}C_{2r} : {}^{24}C_{2r-4} = 225 : 11$ হইলে, r এর মান বাহির কর।

10. 16 জনের মধ্য হইতে 12 জনের দল কত প্রকারে গঠন করা যাইবে ?

11. কোন কলেজে প্রথম বর্ষের মোট ছাত্র সংখ্যা 45 ; তাহারা নিজেদের মধ্য হইতে কলেজ ইউনিয়নে 3জন প্রতিনিধি কত উপায়ে পাঠাইতে পারে ? ঐ নির্বাচন কত প্রকারে সম্ভব হইবে যদি একটি নির্দিষ্ট ছাত্র প্রতিনিধি হইতে রাজী না হয় ?

12. 10 জন প্রার্থী হইতে 5 জনকে লইয়া কতভাবে একটি সমিতি গঠন করা যাইবে যাহাতে (*i*) বয়ঃকনিষ্ঠ এবং বয়োজ্যেষ্ঠ অন্তর্ভুক্ত থাকিবে ; (*ii*) বয়োজ্যেষ্ঠ অন্তর্ভুক্ত হইলে, বয়ঃকনিষ্ঠ বাদ থাকিবে ? **[H. S. Comp. 1975]**

13. একটি বাক্সে 10টি বিভিন্ন আকারের আম আছে। ঐগুলি হইতে কত বিভিন্ন ভাবে 3টি আম নির্বাচন করা যাইবে, যাহাতে একটি নির্দিষ্ট আম সর্বদা থাকিবে ? **[Cal. Int. 1941]**

14. $a, b, c, d \cdots\cdots$ প্রভৃতি n সংখ্যক বিভিন্ন অক্ষর হইতে যে কোন 5টি লইয়া নির্বাচন করিলে যাহাদের মধ্যে a, b, c থাকিবে তাহাদের সংখ্যা 21 ; ঐ অক্ষরগুলি হইতে যে কোন 6টি করিয়া লইয়া নির্বাচন করিলে যেইগুলির মধ্যে a, b, c, d সর্বদা থাকিবে তাহাদের সংখ্যা কত ?

15. কোন কোম্পানীর নির্দিষ্ট 15 জনের মধ্য হইতে কত প্রকারে 9 জনকে নির্বাচন করা যাইবে, যেখানে (*i*) প্রতিটি নির্বাচনে নির্দিষ্ট 3 জন সর্বদা বাদ থাকিবে, (*ii*) নির্দিষ্ট 3 জন সর্বদা থাকিবে ? **[P. U. 1973]**

16. একটি বাক্সে একই আকারের 8টি আম এবং 22টি অপর বিভিন্ন ফল আছে। (*i*) ঐগুলি হইতে কত প্রকারে 8টি ফল নির্বাচন করা যাইবে, যাহাতে অন্ততঃ পক্ষে একটি আম থাকিবে ? (*ii*) আমগুলি বিভিন্ন আকারের হইলে কি হইবে ?

17. একটি কাউন্সিলে একজন সভাপতি, দুইজন সহ-সভাপতি এবং অপর 12 জন সাধারণ সদস্য আছেন। সভাপতি, কেবলমাত্র একজন সহ-সভাপতি ও 4 জন সাধারণ সদস্য লইয়া 6 জনের একটি কমিটি কত প্রকারে গঠন করা যাইবে ? **[C. Int. 1914]**

18. 8 জন স্ত্রীলোক এবং 7 জন পুরুষের মধ্য হইতে 3 জন স্ত্রীলোক এবং 4 জন পুরুষের একটি কমিটি কত প্রকারে গঠন করা যাইবে ? Mr. Y কমিটিতে থাকিলে Miss X ঐ কমিটিতে থাকিতে অস্বীকার করিলে সেইরকম কমিটি কত প্রকারে গঠন করা যাইবে ? **[Joint Ent. Ex. 1966]**

19. কোন একটি শ্রেণীতে 16 জন ছাত্রের মধ্যে 7 জন স্কাউট বালক আছে। কত প্রকারে 11 জন ছাত্রকে নির্বাচন করা যাইবে, যেখানে অন্ততঃ 6 জন স্কাউট্ বালক থাকিবে ? **[H. S. 1972]**

20. 15 জন ক্রিকেট খেলোয়াড়দের একটি দলে 5 জন বোলার আছে। উহাদের মধ্য হইতে কত প্রকারে 11 জন খেলোয়াড় নির্বাচন করা যাইবে, যেন অন্ততঃপক্ষে 3 জন বোলার নির্বাচিত হয়?

21. 5 জন ভদ্রলোক এবং 5 জন ভদ্রমহিলা হইতে 4 জনের একটি কমিটি গঠন করিতে হইবে। প্রত্যেক কমিটিতে অন্ততঃ একজন মহিলা থাকিবেন এইরূপ কমিটি কত প্রকারে সম্ভব? [H. S. 1974]

22. 6 জন শিক্ষক এবং 4 জন ছাত্র হইতে 5 জনের একটি কমিটি গঠন করিতে হইবে। কমিটিতে (*i*) ঠিক 2 জন ছাত্র ; (*ii*) অন্ততঃ 2 জন ছাত্র থাকিবে, এইরূপ কমিটি কত প্রকারে হইবে?

23. একটি বিভাগে 6 জন এবং অপর একটি বিভাগে 8 জন খেলোয়াড় আছে। ঐ দুইটি বিভাগ হইতে 11 জন খেলোয়াড় লইয়া একটি ক্রিকেট দল গঠন করিতে হইবে। যদি প্রথম বিভাগ হইতে অন্ততঃ 4 জন খেলোয়াড় নির্বাচন করিতে হয়, তবে ক্রিকেট দল কত প্রকারে গঠন করা যাইবে? [Joint Ent. Ex. 1971]

24. একটি প্রশ্ন পত্রের দুইটি বিভাগের প্রত্যেকটিতে 5টি করিয়া মোট 10টি প্রশ্ন আছে। একজন পরীক্ষার্থী মোট 6টি প্রশ্নের উত্তর করিতে পারে। যদি ঐ পরীক্ষার্থীকে প্রত্যেক বিভাগ হইতে অন্ততঃ 2টি প্রশ্নের উত্তর দিতে হয় তবে ঐ পরীক্ষার্থী কত ভাবে প্রশ্নগুলি নির্বাচন করিতে পারিবে?

[Joint Ent. Ex. 1972]

25. একটি প্রশ্ন পত্রে 12টি প্রশ্ন আছে ; তাহাদের মধ্যে 7টি A বিভাগে এবং 5টি B বিভাগে আছে এবং প্রশ্নগুলি 1 হইতে 12 পর্য্যন্ত এই ক্রমানুসারে সাজানো আছে। একজন পরীক্ষার্থীকে যদি চতুর্থ প্রশ্ন ও A বিভাগ হইতে অপর যে কোন 3টি প্রশ্ন এবং অষ্টম প্রশ্ন ও B বিভাগ হইতে অপর যে কোন 2টি প্রশ্ন উত্তর করিতে নির্দেশ থাকে তবে ঐ পরীক্ষার্থী কত প্রকারে 7টি প্রশ্ন নির্বাচন করিতে পারিবে?

[Joint Ent. Ex. 1974]

26. কোন এক প্রশ্নপত্রে A বিভাগে 5টি, B বিভাগে 4টি এবং C বিভাগে 3টি প্রশ্ন আছে। একজন পরীক্ষার্থী কত প্রকারে প্রশ্ন বাছিয়া লইতে পারিবে, যদি তাহাকে A হইতে 3টি, B হইতে 2টি এবং C হইতে 1টি প্রশ্ন লইতে নির্দেশ থাকে?

27. 19 জন ক্রিকেট খেলোয়াড়দের একটি দলে 12 জন 'batsman' 5 জন 'bowler' এবং 2 জন 'wicket-keeper' আছে। উহাদের মধ্য হইতে কত প্রকারে 11 জন খেয়োয়াড় নির্বাচন করা যাইবে যেখানে (*i*) প্রতিটি নির্বাচনে 7 জন 'batsman' 3 জন 'bowler' এবং 1 জন 'wicket-keeper' থাকিবে?

(*ii*) অন্ততঃ পক্ষে 6 জন 'batsman', 3 জন 'bowler' এবং 1 জন 'wicket-keeper' থাকিবে ?

28. 14টি বস্তুর মধ্যে 10টি সদৃশ এবং বাকী 4টি বিভিন্ন। এই 14টি বস্তু হইতে 10টি করিয়া কত প্রকারে নির্বাচন করা যাইবে ? [**H. S. Comp. 1974**]

29. প্রতিটি নির্বাচনে অন্ততঃ একটি যুগ্ম এবং একটি অযুগ্ম সংখ্যা দ্বারা চিহ্নিত কাউন্টার থাকিবে এই শর্তে 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 সংখ্যাগুলি দ্বারা চিহ্নিত কাউন্টার হইতে 4টি কাউন্টার কত প্রকারে নির্বাচন করা যাইবে ?

30. কোন সমতলে 25টি বিন্দু আছে ; এবং উহাদের কোন তিনটি একরেখীয় নহে। ঐ বিন্দুগুলি যোগ করিয়া কতগুলি সরলরেখা টানা যাইবে ?

31. 22টি বিন্দু বিশিষ্ট একটি সুষম বহুভুজের কৌণিক বিন্দুগুলি যোগ করিয়া কতগুলি ত্রিভুজ গঠন করা যাইবে ? ঐ বহুভুজের কর্ণের সংখ্যা কত ?

32. কোন সমতলে 30টি বিন্দু আছে, তাহাদের মধ্যে 6টি বিন্দু সমরেখীয়। ঐ বিন্দুগুলি যোগ করিয়া (*i*) কতগুলি বিভিন্ন সরলরেখা এবং (*ii*) কতগুলি ত্রিভুজ গঠন করা যাইবে ?

33. কোন সমতলে n সংখ্যক বিন্দু অবস্থিত ; তন্মধ্যে p সংখ্যক নির্দিষ্ট বিন্দু ভিন্ন আর কোন তিনটি একরেখীয় নহে। ঐ বিন্দুগুলি যোগ করিয়া (*i*) কতগুলি বিভিন্ন সরলরেখা, এবং (*ii*) কতগুলি ত্রিভুজ গঠন করা যাইবে ?

34. 1, 2, 3, 4, 5 একক দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট 5টি দণ্ড আছে। উহাদের দ্বারা কতগুলি ত্রিভুজ গঠন সম্ভব হইবে ?

35. একই আকার ও আকৃতি বিশিষ্ট 16টি লাল রঙের মার্বেল এবং 12টি সবুজ রঙের মার্বেল একই সারিতে কত প্রকার রাখা যাইবে, যেখানে সবুজ রঙের যে কোন দুইটি মার্বেল পাশাপাশি থাকিবে না ?

36. 'COMBINATION' শব্দটির 5টি করিয়া অক্ষর কত প্রকারে নির্বাচন করা যাইবে ?

37. 'Companies' শব্দটির অক্ষরগুলির 4টি করিয়া লইয়া কতগুলি শব্দ তৈয়ারী করা যাইবে, যেখানে অক্ষরগুলি প্রতিটি শব্দে বর্ণানুক্রমিক থাকিবে ?

38. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 অঙ্কগুলি দ্বারা একাধিক বার ব্যবহার না করিয়া 6 অঙ্ক বিশিষ্ট কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যাইবে, যেখানে প্রতিটি সংখ্যার অঙ্কগুলি (*i*) মানের উর্ধ্বক্রমে, (*ii*) মানের অধঃক্রমে থাকিবে ?

7-13. n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুকে 1 হইতে n পর্যন্ত যে কোন সংখ্যক লইয়া নির্বাচন করিলে যে সমুদয় সমবায় গঠিত হইবে তাহাদের সমষ্টি নির্ণয়।

মনে করি, n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু n সংখ্যক বিভিন্ন অক্ষর a, b, c, d……দ্বারা যথাক্রমে চিহ্নিত। এই n সংখ্যক বস্তু হইতে এক বা একাধিক বস্তু নির্বাচন করিতে পারি ; আবার উহাদের একটিও না লইতে পারি। সুতরাং, কোন একটি বস্তুকে লওয়া এবং না লওয়া এই দুইটি প্রক্রিয়া (operation) হইতে পারে। কোন বস্তুকে না লওয়া প্রক্রিয়াটি '*' এই চিহ্ন দ্বারা সূচিত করা যাক্।

এখন, কেবলমাত্র a চিহ্নিত বস্তুটি লওয়া এবং না লওয়া মোট প্রক্রিয়া দুইটি এবং তাহারা a, * ; কিন্তু, বস্তুটিকে না লওয়া প্রক্রিয়াটি কোন সমবায় নহে। সুতরাং, a চিহ্নিত একটি বস্তু দ্বারা গঠিত মোট সমবায়ের সংখ্যা $= 2^1 - 1$.

এখন, a এবং b চিহ্নিত বস্তু দুইটি সম্পর্কে প্রক্রিয়াগুলি নির্ণয় করা যাক্। a চিহ্নিত বস্তুটির দুইটি প্রক্রিয়া "a, *" এর যে কোন একটির সহিত b চিহ্নিত বস্তুটির দুইটি প্রক্রিয়া "b, *" সংযুক্ত করিলে, মোট চারিটি প্রক্রিয়া পাওয়া যাইবে এবং তাহারা, a, b, ab, * ; যাহাদের মধ্যে একটিতে কোন বস্তু আদৌ থাকিবে না। সুতরাং, দুইটি বিভিন্ন বস্তু হইতে মোট সমবায়ের সংখ্যা $= 2^2 - 1$.

এখন, a, b, c চিহ্নিত তিনটি বস্তু লওয়া যাক্। a এবং b চিহ্নিত বস্তু দুইটির একটি বা দুইটিকে নির্বাচন করা অথবা কোনটিকে আদৌ না লওয়ার মোট প্রক্রিয়া 2^2 ; এবং c চিহ্নিত বস্তুটি লওয়া এবং না লওয়া মোট প্রক্রিয়া 2টি। সুতরাং, প্রথম দুইটি বস্তুর মোট 2^2 সংখ্যক প্রক্রিয়ার যে কোনটির সহিত তৃতীয় বস্তুটির মোট 2টি প্রক্রিয়া সংযুক্ত (associate) করিলে তিনটি বস্তুর মিলিত প্রক্রিয়া সংখ্যা $2^2 \times 2$ অর্থাৎ 2^3 হইবে ; এবং তাহাদের মধ্যে একটিতে কোন বস্তু আদৌ থাকিবে না। সুতরাং, তিনটি বিভিন্ন বস্তু হইতে মোট সমবায়ের সংখ্যা $= 2^3 - 1$.

অনুরূপভাবে, a, b, c, d, ...চিহ্নিত n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর মোট প্রক্রিয়া $= 2^n$; এবং উহাদের মধ্যে একটিতে আদৌ কোন বস্তু থাকিবে না, যেইটি কোন সমবায় নহে। সুতরাং, এই n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর দ্বারা গঠিত মোট সমবায়ের সংখ্যা $= 2^n - 1$.

$\therefore$ **নির্ণেয় সমবায়ের সংখ্যা** $= 2^n - 1$.

মন্তব্য ঃ n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে একটি করিয়া লইলে মোট সমবায়ের সংখ্যা $= {}^nC_1$; দুইটি করিয়া নির্বাচন করিলে মোট সমবায়ের সংখ্যা $= {}^nC_2$; তিনটি করিয়া নির্বাচন করিলে মোট সমবায়ের সংখ্যা $= {}^nC_3$; ইত্যাদি। সুতরাং, n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে যে কোন সংখ্যক লইয়া নির্বাচন করিলে মোট সমবায়ের সংখ্যা

$$= {}^nC_1 + {}^nC_2 + {}^nC_3 + \ldots\ldots + {}^nC_n.$$

$$\therefore\ \ \boldsymbol{{}^nC_1 + {}^nC_2 + {}^nC_3 + \ldots\ldots + {}^nC_n = 2^n - 1.}$$

7-14. $(p+q+r+\ldots\ldots)$ সংখ্যক বস্তুর মধ্যে এক প্রকারের p সংখ্যক সদৃশ বস্তু, দ্বিতীয় প্রকারের q সংখ্যক সদৃশ বস্তু, তৃতীয় প্রকারের r সংখ্যক সদৃশ বস্তু, ...ইত্যাদি আছে। বস্তুগুলি হইতে যত সংখ্যক ইচ্ছা লইয়া যে সমস্ত সমবায় গঠন করা যাইবে তাহাদের মোট সংখ্যা নির্ণয়।

মনে করি, p সংখ্যক সদৃশ বস্তু $a, a, a, \ldots\ldots$ অক্ষর দ্বারা চিহ্নিত। এই p সংখ্যক সদৃশ বস্তু হইতে এক বা একাধিক বস্তু নির্বাচন করিতে পারি, আবার, উহাদের একটিও না লইতে পারি। সুতরাং, কোন একটি বস্তুকে লওয়া এবং না লওয়া এই দুইটি প্রক্রিয়া হইতে পারে। কোন বস্তুকে না লওয়া প্রক্রিয়াটিকে '*' দ্বারা চিহ্নিত করা যাক্।

এখন, a চিহ্নিত একটি বস্তুর জন্য কেবলমাত্র দুইটি প্রক্রিয়া সম্ভব এবং তাহা a, *. সেইরূপ, p সংখ্যক সদৃশ বস্তুর যে কোন দুইটির জন্য কেবলমাত্র তিনটি প্রক্রিয়া সম্ভব এবং তাহা a, aa, * ; তিনটি বস্তুর জন্য কেবলমাত্র 4টি প্রক্রিয়া সম্ভব এবং তাহা a, aa, aaa, *. এইভাবে, p সংখ্যক সদৃশ বস্তুর জন্য $(p+1)$ সংখ্যক প্রক্রিয়া সম্ভব, যাহাদের মধ্যে একটিতে কোন বস্তু আদৌ থাকিবে না। সুতরাং, p সংখ্যক সদৃশ বস্তু হইতে যে কোন সংখ্যক লইয়া নির্বাচন করিলে মোট সমবায়ের সংখ্যা $=(p+1)-1$.

এখন, p সংখ্যক সদৃশ বস্তুর $(p+1)$ সংখ্যক প্রক্রিয়ার যে কোনটির সহিত q সংখ্যক অপর এক শ্রেণীর সদৃশ বস্তুর মোট $(q+1)$ সংখ্যক প্রক্রিয়া সংযুক্ত হইলে মোট $(p+1)(q+1)$ সংখ্যক প্রক্রিয়া হইবে এবং উহাদের মধ্যে একটিতে আদৌ কোন বস্তু থাকিবে না। সুতরাং, p সংখ্যক এক জাতীয় সদৃশ বস্তু এবং q সংখ্যক অপর এক জাতীয় সদৃশ বস্তু হইতে এক বা একাধিক লইয়া নির্বাচন করিলে মোট নির্বাচনের সংখ্যা $=(p+1)(q+1)-1$.

অনুরূপভাবে, p, q এবং r সংখ্যক তিন জাতীয় (নিজেদের মধ্যে সদৃশ) বস্তুর মোট সমবায়ের সংখ্যা $=(p+1)(q+1)(r+1)-1$.

সুতরাং, $p, q, r, \ldots\ldots$ সংখ্যক বিভিন্ন জাতীয় সদৃশ বস্তুর মোট সমবায়ের সংখ্যা $=(p+1)(q+1)(r+1)\ldots\ldots-1$.

মন্তব্য : $p+q+r+\ldots\ldots=n$ এবং $p=q=r\ldots\ldots=1$ হইলে, এই n সংখ্যক বস্তু হইতে এক বা একাধিক বস্তু লইয়া যত প্রকারে সম্ভব সমবায় গঠন করা যাইবে তাহাদের মোট সংখ্যা

$=(1+1)(1+1)(1+1)\ldots\ldots n$ সংখ্যক উৎপাদক -1

$=(2.2.2.\ldots\ldots n$ সংখ্যক উৎপাদক $)-1$

$=2^n-1$.

7-15. $(m+n)$ সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর m সংখ্যক এক ভাগে এবং n সংখ্যক অপর ভাগে লইয়া যত প্রকারে ভাগ করা যায় তাহাদের মোট সংখ্যা নির্ণয়।

$(m+n)$ সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে যে কোন m সংখ্যক বস্তু এক ভাগে লইলে অপর ভাগে n সংখ্যক বস্তু থাকিবে। সুতরাং, $(m+n)$ সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে যত প্রকারে m সংখ্যক করিয়া নির্বাচন করা সম্ভব হইবে, বস্তুগুলিকে ঠিক তত ভাবে এক ভাগে m সংখ্যক, অপর ভাগে n সংখ্যক, এইরূপ দুই ভাগে ভাগ করা যাইবে। কিন্তু $(m+n)$ সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে যে কোন m সংখ্যক যত প্রকারে নির্বাচন করা যাইবে তাহাদের মোট সংখ্যা $= {}^{m+n}C_m$.

বিশেষভাবে লক্ষ্যণীয় যে, $m \neq n$ হইলে, ${}^{m+n}C_m$ সংখ্যক বিভাগের প্রতিটি বিভিন্ন হইবে ; কিন্তু $m=n$ হইলে, ঐ বিভাগগুলির দুই দুইটি একই হইবে।

সুতরাং, (i) **$m \neq n$ হইলে,**

$$\text{নির্ণেয় বিভাগের সংখ্যা} = {}^{m+n}C_m = \frac{\lfloor m+n}{\lfloor m \lfloor n}$$

এবং (ii) **$m=n$ হইলে,**

$$\text{নির্ণেয় বিভাগের সংখ্যা} = \frac{1}{\lfloor 2} \times {}^{2n}C_n = \frac{\lfloor 2n}{\lfloor 2 (\lfloor n)^2}.$$

উদাহরণস্বরূপ, (a) A, B, C অক্ষর তিনটির এক ভাগে দুইটি এবং অপর ভাগে একটি লইয়া যত প্রকারে ভাগ করা যাইবে তাহা (AB, C) ; (AC, B) ; (BC, A). আবার, ${}^3C_2 = 3$. সুতরাং, এইরূপ ক্ষেত্রে মোট বিভাগের সংখ্যা $= 3$.

(b) A, B, C, D অক্ষর চারিটি হইতে দুই দুইটি করিয়া যত প্রকারে ভাগ করা যায়, তাহা

(i) (AB, CD), (ii) (AC, BD), (iii) (AD, BC)

(iv) (BC, AD), (v) (BD, AC), (vi) (CD, AB),

এই ভাগগুলির মধ্যে, (i) এবং (vi) একই ; (ii) এবং (v) একই ; (iii) এবং (iv) একই ; সুতরাং মোট বিভাগের সংখ্যা $= \frac{1}{\lfloor 2} \times 6 = 3$;

আবার, $\frac{1}{\lfloor 2} \times {}^4C_2 = 3$.

মন্তব্য : দুই জন ব্যক্তির মধ্যে $2n$ সংখ্যক বস্তুকে সমান ভাবে ভাগ করিয়া দিলে মোট ${}^{2n}C_n$ প্রকারে ভাগ করা যাইবে ; কারণ, তখন ব্যক্তিদ্বয় বিভিন্ন বলিয়া দুই দুইটি ভাগ একই ধরা চলিবে না। এইরূপ ক্ষেত্রে,

$$\text{নির্ণেয় ভাগের সংখ্যা} = {}^{2n}C_n = \frac{\lfloor 2n}{(\lfloor n)^2}.$$

7-16. $(m+n+p)$ সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর m সংখ্যক একভাগে, n সংখ্যক অপর একভাগে এবং p সংখ্যক অপর ভাগে রাখিয়া যত প্রকারে ভাগ করা যাইবে তাহাদের মোট সংখ্যা নির্ণয়।

$(m+n+p)$ সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে যে কোন m সংখ্যক বস্তু ${}^{m+n+p}C_m$ প্রকারে নির্বাচন করা যাইবে। এখন, বস্তুগুলি হইতে যে কোন m সংখ্যক বস্তু লইলে বাকী থাকে $(n+p)$ সংখ্যক বস্তু। এই অবশিষ্ট $(n+p)$ সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে যে কোন n সংখ্যক বস্তু নির্বাচন করা যাইবে ${}^{n+p}C_n$ প্রকারে। এই $(n+p)$ সংখ্যক বস্তু হইতে যে কোন n সংখ্যক বস্তু লইলে, অবশিষ্ট p বস্তু এক ভাগে থাকে। সুতরাং, $(m+n+p)$ সংখ্যক বস্তুকে একভাগ m সংখ্যক, অপর ভাগে n সংখ্যক, এবং অপর একভাগে p সংখ্যক করিয়া যত প্রকারে ভাগ করা যাইবে তাহা ${}^{m+n+p}C_m \times {}^{n+p}C_n$ প্রকারে সম্ভব।

কিন্তু $m=n=p$ হইলে, প্রতিটি ভাগে সমান সংখ্যক বস্তু থাকিবে, এবং ছয় ছয়টি বিভাগ একই হইবে।

সুতরাং, (i) $m \neq n$, বা, $n \neq p$, বা, $m \neq p$ হইলে নির্ণেয় বিভাগের সংখ্যা

$$= {}^{m+n+p}C_m \times {}^{n+p}C_n = \frac{\lfloor m+n+p}{\lfloor m \lfloor n \lfloor p}.$$

(ii) $m=n=p$ হইলে, নির্ণেয় বিভাগের সংখ্যা

$$= \frac{1}{\lfloor 3} \times {}^{m+n+p}C_m \times {}^{n+p}C_n$$

$$= \frac{1}{6} \times {}^{3n}C_n \times {}^{2n}C_n = \frac{\lfloor 3n}{\lfloor 3 (\lfloor n)^3}$$

(iii) $m=n \neq p$ হইলে, নির্ণেয় বিভাগের সংখ্যা

$$= \frac{\lfloor 2n+p}{\lfloor 2 (\lfloor n)^2 \lfloor p}.$$

মন্তব্য : তিনজন ব্যক্তির মধ্যে $3n$ সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুকে সমান ভাবে ভাগ করিলে মোট $\frac{\lfloor 3n}{(\lfloor n)^3}$ প্রকারে সম্ভব হইবে ; কারণ, এইরূপক্ষেত্রে, ব্যক্তিত্রয় বিভিন্ন হওয়ায় ছয় ছয়টি বিভাগ একই ধরা যাইবে না।

দ্রষ্টব্য : নির্দিষ্ট সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুকে উপরোক্ত পদ্ধতিতে যে কোন কতকগুলি বিভাগে ভাগ করা যাইবে।

7-17. ^nC_r-এর বৃহত্তম মানের জন্য r-এর মান নির্ণয়।

মনে করি, n যে কোন নির্দিষ্ট ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং $n>1$

$$\because \quad {}^nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+2)(n-r+1)}{r.(r-1)(r-2)\cdots\cdots 3.2.1}$$

$$= \frac{n-r+1}{r} \cdot \frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+2)}{(r-1)(r-2)\ldots\ldots 3.2.1}$$

$$= \frac{n-r+1}{r} \times {}^nC_{r-1}.$$

$\therefore \quad {}^nC_r >, =,$ অথবা, $< {}^nC_{r-1}$ হইবে,

যদি, $\frac{n-r+1}{r} >, =,$ অথবা, <1 হয়;

অর্থাৎ, যদি, $n-r+1 >, =,$ অথবা, $<r$ হয়;

অর্থাৎ, যদি, $n+1 >, =,$ অথবা, $<2r$ হয়;

অর্থাৎ, যদি, $r <, =,$ অথবা, $> \frac{n+1}{2}$ হয়।

(i) মনে করি, n একটি যুগ্ম সংখ্যা এবং $n=2m$.

তাহা হইলে, $\frac{n+1}{2} = m + \frac{1}{2}$.

সুতরাং, এইরূপক্ষেত্রে,

${}^nC_r >, =,$ অথবা, ${}^nC_{r-1}$ হইবে,

যদি যথাক্রমে, $r <, =,$ অথবা, $> m+\frac{1}{2}$ হয়।

যেহেতু, r-এর মান ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হইবে, সুতরাং, $r \neq m+\frac{1}{2}$.

এখন, $r < m+\frac{1}{2}$ হইলে, $r=1, 2, 3, \ldots\ldots m-1, m$ এর জন্য,

${}^nC_r > {}^nC_{r-1}$ হইতে দেখা যায়,

${}^nC_1 < {}^nC_2 < {}^nC_3 < \cdots\cdots {}^nC_{m-1} < {}^nC_m$.

এবং $r > m+\frac{1}{2}$ হইলে,

$r = m+1, m+1, m+2, \ldots\ldots m+m$ এর জন্য,

${}^nC_r < {}^nC_{r-1}$ হইতে দেখা যায়,

${}^nC_m > {}^nC_{m+1} > {}^nC_{m+2} > \ldots\ldots > {}^nC_{2m}$.

সুতরাং, $n=2m$ হইলে, ${}^nC_r$-এর বৃহত্তম মান ${}^nC_m$ অর্থাৎ ${}^nC_r$-এর বৃহত্তম মান হইবে, যখন $r = m = \frac{n}{2}$.

(ii) মনে করি, n একটি অযুগ্ম ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা এবং $n=2m+1$.

তাহা হইলে, $\frac{n+1}{2} = m+1$.

সুতরাং, এইরূপক্ষেত্রে,

$^nC_r >, =,$ অথবা, $< {}^nC_{r-1}$ হইবে

যদি যথাক্রমে, $r <, =,$ অথবা, $> m+1$ হয়।

এখন, $r < m+1$ হইলে,

$r = 1, 2, 3, \ldots\ldots m$ এর জন্য,

$^nC_r > {}^nC_{r-1}$ হইতে দেখা যায়,

$^nC_1 < {}^nC_2 < {}^nC_3 < \cdots\cdots {}^nC_{m-1} < {}^nC_m.$

এবং $r > m+1$ হইলে,

$r = m+2, \ m+3, \cdots\cdots 2m+1$ এর জন্য,

$^nC_r < {}^nC_{r-1}$ হইতে দেখা যায়,

$^nC_{m+1} > {}^nC_{m+2} > {}^nC_{m+3} > \cdots\cdots > {}^nC_{2m+1}.$

আবার, $r = m+1$ এর জন্য, $^nC_r = {}^nC_{m+1}$;

কিন্তু $^nC_{m+1} = {}^{2m+1}C_{m+1} = {}^{2m+1}C_m = {}^nC_m$.

সুতরাং, এইরূপক্ষেত্রে,

^nC_m এবং $^nC_{m+1}$ পরস্পর সমান এবং উহারা অপর যে কোনটি অপেক্ষা বৃহত্তর।

সুতরাং $n = 2m+1$ হইলে, ^nC_r এর বৃহত্তম মান ^nC_m বা, $^nC_{m+1}$; অর্থাৎ, ^nC_r-এর বৃহত্তম মান হইবে, যখন

$$r = \frac{n-1}{2} \text{ অথবা, } r = \frac{n+1}{2}.$$

উদাহরণ 1. এক ব্যক্তি তাহার 6 জন বন্ধুর এক বা একাধিক বন্ধুকে একসঙ্গে কত প্রকারে নিমন্ত্রণ করিতে পারে ?

ঐ ব্যক্তি তাহার 6 জন বন্ধুর 1 জন, বা 2 জন, বা 3 জন, বা 4 জন, বা 5 জন, বা 6 জন করিয়া নিমন্ত্রণ করিতে পারে।

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $= {}^6C_1 + {}^6C_2 + {}^6C_3 + {}^6C_4 + {}^6C_5 + {}^6C_6$

$= 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63.$

দ্বিতীয় প্রণালী :

6 জন বন্ধুর এক বা একাধিক বন্ধুকে মোট যতভাবে নিমন্ত্রণ করা যাইবে তাহার সংখ্যা $= 2^6 - 1 = 63.$

উদাহরণ 2. একটি বাক্সে 4টি পঁচিশ পয়সা, 3টি দশ পয়সা, এবং 1টি পাঁচ পয়সা আছে। এক ব্যক্তি ঐ বাক্স হইতে এক বা একাধিক মুদ্রা একসঙ্গে কত প্রকারে লইতে পারে ?

এখানে, 4টি এক প্রকারের, 3টি অন্য এক প্রকারের এবং 1টি তৃতীয় প্রকারের মুদ্রা বাক্সে আছে।

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $=(4+1)(3+1)(1+1)-1=39.$

উদাহরণ 3. 546 সংখ্যাটির মধ্যে কত প্রকারের বিভিন্ন উৎপাদক আছে ?

যেহেতু, $546=2\times 3\times 7\times 13$, স্থতরাং প্রদত্ত সংখ্যাটির মধ্যে 2, 3, 7, 13—এই চারিটি মৌলিক উৎপাদক আছে, এবং উহাদের প্রত্যেকটি কেবলমাত্র একবার করিয়া আছে।

এই চারিটি মৌলিক উৎপাদক হইতে 1টি, 2টি, 3টি, বা 4টি করিয়া লইয়া গঠিত বিভিন্ন নির্বাচনের সংখ্যা $=2^4-1=15.$

স্থতরাং, মূল সংখ্যাটিকে ধরিয়া মোট উৎপাদকের সংখ্যা $=15$; কিন্তু মূল সংখ্যাটিকে বাদ দিলে মোট উৎপাদকের সংখ্যা $=15-1=14.$

উদাহরণ 4. 113400 সংখ্যাটির মধ্যে সর্বাধিক কতগুলি উৎপাদক থাকিতে পারে ?

এখানে, $113400=2^3\times 3^4\times 5^2\times 7.$

স্থতরাং, প্রদত্ত সংখ্যাটিতে 2, 3, 5, 7—এই চারিটি মৌলিক উৎপাদক আছে ; তাহাদের মধ্যে 2 **তিনবার**, 3 **চারবার**, 5 **দুইবার** এবং 7 **একবার** আছে।

স্থতরাং, মূলসংখ্যাটিকে ধরিয়া মোট উৎপাদকের সংখ্যা

$$=(3+1)(4+1)(2+1)(1+1)-1=119.$$

কিন্তু, এই 119টি উৎপাদকের মধ্যে মূল সংখ্যাটিও আছে। স্থতরাং, মূলসংখ্যাটি বাদে, মোট উৎপাদকের সংখ্যা $=119-1=118.$

উদাহরণ 5. 1টি আপেল, 2টি ন্যাসপাতি, 3টি কমলালেবু ও 4টি পেয়ারা হইতে একই সঙ্গে যে কোন একটি বা একাধিক ফল কতপ্রকারে লওয়া যাইবে, যদি প্রত্যেক প্রকারের ফল সদৃশ হয়।

ফলগুলির মধ্যে 1টি আপেল, 2টি সদৃশ ন্যাসপাতি, 3টি সদৃশ কমলালেবু ও 4টি সদৃশ পেয়ারা আছে।

$\therefore$ নির্ণেয় নির্বাচনের সংখ্যা $=(1+1)(2+1)(3+1)(4+1)-1=119.$

উদাহরণ 6. একটি বাক্সে 2টি কমলালেবু, 3টি ন্যাসপাতি ও 4টি আপেল আছে। এবং উহাদের প্রত্যেক প্রকারের ফলগুলি বিভিন্ন আকারের।

(*i*) এক বা একাধিক ফল একসঙ্গে লইয়া উহাদিগকে কত প্রকারে নির্বাচন করা যাইবে ?

(*ii*) প্রত্যেক প্রকারের ফল অন্ততঃ একটি করিয়া লইয়া কত প্রকারে তাহাদিগকে নির্বাচন করা সম্ভব হইবে ?

(*i*) এখানে মোট 9টি ফল আছে ; এবং এই 9টি ফলই বিভিন্ন।

∴ নির্ণেয় নির্বাচন সংখ্যা $= 2^9 - 1 = 511$.

(*ii*) 2টি কমলালেবু হইতে এক বা একাধিক লইলে, মোট নির্বাচনের সংখ্যা $= 2^2 - 1 = 3$;

3টি ন্যাসপাতি হইতে এক বা একাধিক এক সঙ্গে লইলে, মোট নির্বাচনের সংখ্যা $= 2^3 - 1 = 7$:

4টি আপেল হইতে এক বা একাধিক একসঙ্গে লইলে, মোট নির্বাচনের সংখ্যা $= 2^4 - 1 = 15$.

∴ নির্ণেয় নির্বাচনের সংখ্যা $= 3 \times 7 \times 15 = 315$.

উদাহরণ 7. (*i*) 10টি বিভিন্ন ফল দুই জনের মধ্যে কত প্রকারে ভাগ করিয়া দেওয়া যাইবে ? (*ii*) ঐ ফলগুলিকে দুই জনের মধ্যে কত ভাবে সমান ভাগে ভাগ করিয়া দেওয়া যাইবে ?

(*i*) 10টি ফল হইতে প্রথম ব্যক্তিকে 1টি, 2টি, 3টি,……9টি করিয়া দিলে দ্বিতীয় ব্যক্তি যথাক্রমে, 9টি, 8টি, 7টি,……1টি করিয়া পাইবে ; কিন্তু প্রথম ব্যক্তিকে 10টি ফল দিলে, দ্বিতীয় ব্যক্তি কিছুই পায় না।

সুতরাং, ফলগুলি যতপ্রকারে ভাগ করা যাইবে তাহার সংখ্যা

$$= 2^{10} - 1 = 1024 - 1 = 1023.$$

তাহা হইলে, প্রত্যেক ব্যক্তি অন্ততঃ একটি ফল পাইবে এই শর্তে ভাগ করিলে নির্ণেয় ভাগের সংখ্যা $= 1023 - 1 = 1022$.

(*ii*) 10টি বিভিন্ন ফল 2 জনের মধ্যে সমান ভাবে যত প্রকারে ভাগ করা যাইবে তাহার মোট সংখ্যা $= {}^{10}C_5 = \dfrac{\lfloor 10}{\lfloor 5 \lfloor 5} = 252$.

উদাহরণ 8. 15টি বিভিন্ন পুস্তক কতপ্রকারে

(*i*) 4টি, 5টি ও 6টি করিয়া তিনটি প্যাকেটে ;

(*ii*) প্রত্যেক প্যাকেটে 5টি করিয়া তিনটি প্যাকেটে রাখা যাইবে ;

এবং (*iii*) তিনজনের মধ্যে সমান ভাগে ভাগ করিয়া দেওয়া যাইবে ?

(*i*) নির্ণেয় বিভাগ সংখ্যা $= {}^{15}C_4 \times {}^{11}C_5 \times {}^6C_6$

$$= {}^{15}C_4 \times {}^{11}C_5 = \frac{\lfloor 15}{\lfloor 4 \lfloor 5 \lfloor 6} = 630630.$$

(*ii*) নির্ণেয় বিভাগের সংখ্যা $= \dfrac{\lfloor 15}{\lfloor 3 (\lfloor 5)^3} = 126126$.

(*iii*). নির্ণেয় বিভাগের সংখ্যা $= \dfrac{\lfloor 15}{(\lfloor 5)^3} = 756756$

উদাহরণ 9. 15 জন ছাত্র হইতে প্রত্যেক দলে সমান সংখ্যক করিয়া যত প্রকারে বিভিন্ন দল গঠন করা সম্ভব তাহাদের সর্বাধিক সংখ্যা কত হইবে এবং তখন প্রতিটি দলে কত করিয়া থাকিবে ?

15 জন হইতে r সংখ্যক করিয়া লওয়া যাইবে ${}^{15}C_r$ প্রকারে ; এখন ${}^{15}C_r$ এর মান বৃহত্তম হইবে,

যখন, $r = \dfrac{15-1}{2}$, বা, $\dfrac{15+1}{2}$;

অর্থাৎ, $r = 7$, বা 8.

$\therefore$ নির্ণেয় দলের সংখ্যা $= {}^{15}C_8 = {}^{15}C_7 = 6435$;

এবং তখন প্রতিটি দলে 7 জন অথবা 8 জন করিয়া থাকিবে।

প্রশ্নমালা 26

1. 10টি বিভিন্ন প্রকারের ফল একজন বালককে কত ভাবে দেওয়া যাইবে ?

2. 12 জন রোগীকে কত ভাবে একটি হাসপাতালে পাঠান যাইতে পারে ?

3. এক ব্যক্তি তাহার 25 জন বন্ধুর এক বা একাধিক বন্ধুকে একসঙ্গে মধ্যাহ্ন ভোজনে কত ভাবে নিমন্ত্রণ করিতে পারে ?

4. 12টি বিভিন্ন আকারের কমলালেবু দুইজন বালকের মধ্যে কতভাবে ভাগ করিয়া দেওয়া যাইবে ?

5. এক ব্যক্তির নিকট 2টি 5 টাকার, 5টি 2 টাকার ও 20টি 1 টাকার মুদ্রা আছে। ঐ ব্যক্তি মুদ্রাগুলি হইতে কত প্রকারে দরিদ্র ভাণ্ডারে দান করিতে পারে ?

6. 10টি পাঁচ-পয়সা, 6টি দশ পয়সা এবং 5টি পঁচিশ-পয়সা হইতে কত প্রকারে মুদ্রাগুলি লওয়া যাইতে পারে ?

7. কোন পরীক্ষায় 6টি প্রশ্ন পত্র আছে। ঐ পরীক্ষায় পাশ করিতে হইলে প্রতিটি প্রশ্নপত্রে একটা সর্বনিম্ন নম্বর পাইতে হইবে। ঐ পরীক্ষায় একজন পরীক্ষার্থী কত প্রকারে অনুত্তীর্ণ হইতে পারে ?

8. 3, 5, 7, 13 সংখ্যা চারিটি হইতে কত প্রকারের গুণফল পাওয়া যাইবে ?

9. 1155 সংখ্যাটির মধ্যে কত প্রকারের উৎপাদক থাকিতে পারে ?

10. (*i*) 21600 এবং (*ii*) 118800 এর মধ্যে কত প্রকারের উৎপাদক থাকিতে পারে ?

11. কত প্রকারে 1440 সংখ্যাটিকে দুইটি পূর্ণসংখ্যার গুণফলে প্রকাশ করা সম্ভব হইবে ? সংখ্যাটির কি কি উৎপাদক আছে ?

12. 3 জন বালকের মধ্যে 12টি বিভিন্ন ফল কত প্রকারে ভাগ করিয়া দেওয়া যাইতে পারে যাহাতে প্রত্যেকে অন্ততঃ একটি ফল পায় ?

13. 12টি বিভিন্ন ফল (i) 5টি এবং 7টি (ii) 6টি এবং 6টি করিয়া কতপ্রকারে ভাগ করা যাইবে ?

ঐ 12টি ফল দুই জন বালকের মধ্যে কত প্রকারে সমান ভাবে ভাগ করিয়া দেওয়া যাইতে পারে ?

14. 18টি বিভিন্ন কলম 5টি, 6টি, 7টি করিয়া কত প্রকারে ভাগ করা যাইবে ? ঐ কলমগুলিকে (i) সমান তিন ভাগে কত প্রকারে এবং (ii) তিনজন লোকের মধ্যে কত প্রকারে সমান ভাগে ভাগ করিয়া দেওয়া সম্ভব হইবে ?

15. 5টি আপেল, 4টি কমলালেবু এবং 2টি পেয়ারা হইতে এক সঙ্গে অন্ততঃ একটি ফল কত প্রকারে লওয়া যাইতে পারে, যদি প্রত্যেক প্রকারের ফলগুলি সদৃশ হয় ?

16. একটি প্যাকেটে 5টি পেন্সিল, 6টি ডট্ পেন এবং 3টি ফাউন্টেন পেন আছে এবং প্রত্যেক প্রকারের বস্তুগুলি **বিভিন্ন**। ঐগুলি হইতে (i) একসঙ্গে অন্ততঃ একটি লইয়া কতভাবে নির্বাচন করা যাইবে ?

(ii) প্রত্যেক প্রকারের বস্তু অন্ততঃ একটি করিয়া লইলে তাহাদিগকে কতপ্রকারে নির্বাচন করা যাইবে ?

17. A, B এবং C এর যথাক্রমে 8 খানি, 5 খানি এবং 7 খানি পুস্তক আছে। প্রথমবারে (initially) তাহাদের নিকট যত সংখ্যক করিয়া পুস্তক আছে সেই সংখ্যার পরিবর্তন না করিয়া কত প্রকারে তাহারা নিজেদের মধ্যে পুস্তকগুলি অদল বদল করিতে পারে ?

18. কোন এক প্রশ্নপত্রে মোট 8টি প্রশ্ন আছে এবং উহাদের প্রত্যেকটির জন্য একটি করিয়া বিকল্প প্রশ্ন আছে। একজন পরীক্ষার্থী এক বা একাধিক প্রশ্ন কতপ্রকারে নির্বাচন করিতে পারিবে ?

19. 10 জন বালক এবং 8 জন বালিকা হইতে অন্ততঃ একজন বালক ও একজন বালিকা লইয়া কত প্রকারে নির্বাচন করা যাইবে ?

20. প্রত্যেক দলে সমান সংখ্যক লোক থাকিবে এই শর্তে 16 জন লোক হইতে সর্বাধিক কতগুলি দল গঠন করা যাইবে ? এবং তখন প্রত্যেক দলে কতজন করিয়া লোক থাকিবে ?

21. প্রতিবারে নিমন্ত্রিত অতিথির সংখ্যা একই থাকিবে এই শর্তে একজন ব্রাহ্মণ ও 40জন অতিথিকে সর্বাধিক কত প্রকারে নিমন্ত্রণ করা যাইবে ?

22. 'Table', 'Chair' এবং 'Bench' শব্দ তিনটির প্রত্যেকটি হইতে অন্ততঃ একটি করিয়া অক্ষর লইয়া অক্ষরগুলির কতগুলি বিভিন্ন নির্বাচন করা যাইবে ?

23. $3n$ সংখ্যক বস্তুর মধ্যে $2n$ সংখ্যক সদৃশ এবং বাকিগুলি বিভিন্ন। উহাদের মধ্য হইতে $2n$ সংখ্যক করিয়া একসঙ্গে লইলে, কতগুলি নির্বাচন সম্ভব হইবে ?

24. বিভিন্ন m শ্রেণীর বস্তুর প্রতিটি শ্রেণীতে n সংখ্যক করিয়া বস্তু আছে। প্রমাণ কর যে, ঐ সমুদয় বস্তু হইতে এক বা একাধিক লইয়া যত প্রকারে নির্বাচন করা যাইবে, তাহাদের মোট সংখ্যা $(n+1)^m-1$.

25. $(p+q+r)$ সংখ্যক বস্তুর মধ্যে p সংখ্যক এক শ্রেণীর সদৃশ, q সংখ্যক অপর এক শ্রেণীর সদৃশ এবং বাকি r সংখ্যক বস্তু বিভিন্ন। প্রমাণ কর যে, সমুদয় বস্তু হইতে অন্ততঃ একটি বস্তু লইলে মোট নির্বাচনের সংখ্যা হইবে $(p+1)(q+1).2^r-1$.

7-18. প্রথম বিভাগে m সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু, দ্বিতীয় বিভাগে n সংখ্যক অপর বিভিন্ন বস্তু, তৃতীয় বিভাগে p সংখ্যক অপর বিভিন্ন বস্তু, ইত্যাদি থাকিলে এবং প্রথম বিভাগ হইতে r সংখ্যক বস্তু, দ্বিতীয় বিভাগ হইতে s সংখ্যক বস্তু, তৃতীয় বিভাগ হইতে t সংখ্যক বস্তু ইত্যাদি লইলে, $(r+s+t+\ldots\ldots)$ সংখ্যক বস্তুর মোট বিন্যাসের সংখ্যা নির্ণয়।

প্রথম বিভাগের m সংখ্যক বস্তুর r সংখ্যক বস্তুকে ^mC_r প্রকারে এবং দ্বিতীয় বিভাগের n সংখ্যক বস্তুর s সংখ্যক বস্তুকে ^nC_s প্রকারে নির্বাচন করা যায়। সুতরাং, প্রথম বিভাগের যে কোন r সংখ্যক বস্তু এবং দ্বিতীয় বিভাগের যে কোন s সংখ্যক বস্তু মোট $^mC_r \times {}^nC_s$ প্রকারে নির্বাচন করা যাইবে।

অনুরূপভাবে, প্রথম বিভাগ হইতে r সংখ্যক, দ্বিতীয় বিভাগ হইতে s সংখ্যক, তৃতীয় বিভাগ হইতে t সংখ্যক, ইত্যাদি মিলিতভাবে মোট $^mC_r \times {}^nC_s \times {}^pC_t \times \cdots$ প্রকারে নির্বাচন করা যাইবে এবং প্রতিটি নির্বাচনে $(r+s+t+\cdots)$ সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু থাকিবে; যাহাদিগকে পরস্পরের মধ্যে $\underline{\lfloor r+s+t+\cdots}$ প্রকারে সাজানো যাইবে।

সুতরাং, নির্ণেয় বিন্যাসের সংখ্যা

$$= {}^mC_r \times {}^nC_s \times {}^pC_t \times \ldots\ldots \times \underline{\lfloor r+s+t+\cdots\cdots}.$$

উদাহরণ 1. 'Water' এবং 'Milk' এই দুইটি শব্দের অক্ষরগুলি লইয়া পাঁচ অক্ষর বিশিষ্ট কতগুলি শব্দ তৈয়ারী করা যাইবে, যদি প্রতিটি শব্দে প্রথম শব্দ হইতে 3টি এবং দ্বিতীয় শব্দ হইতে 2টি করিয়া অক্ষর লওয়া হয়?

'Water' শব্দটিতে মোট 5টি বিভিন্ন অক্ষর আছে; উহাদের যে কোন তিনটি মোট $^5C_3$ প্রকারে নির্বাচন করা যাইবে।

'Milk' শব্দটিতে মোট 4টি বিভিন্ন অক্ষর আছে; উহাদের যে কোন দুইটি মোট $^4C_2$ প্রকারে নির্বাচন করা যাইবে।

তাহা হইলে, প্রথম শব্দটি হইতে যে কোন তিনটি এবং দ্বিতীয় শব্দটি হইতে যে কোন দুইটি মিলিতভাবে মোট $^5C_3 \times {}^4C_2$ প্রকারে নির্বাচন করা যাইবে; এবং

এইগুলির প্রতিটি নির্বাচনে 5টি করিয়া বিভিন্ন অক্ষর থাকিবে যাহাদিগকে $\lfloor 5$ প্রকারে সাজানো যাইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় শব্দের সংখ্যা $= {}^5C_3 \times {}^4C_2 \times \lfloor 5$

$= 10 \times 6 \times 120 = 7200.$

উদাহরণ 2. 8 জন অতিথিকে টেবিলের উভয় পার্শ্বে সমান ভাবে বসাইয়া কত প্রকারে সাজানো যাইবে যদি উহাদের নির্দিষ্ট দুই জনকে এক পার্শ্বে এবং নির্দিষ্ট অপর একজনকে অন্য পার্শ্বে বসানো হয়?

যে দুইজন নির্দিষ্ট অতিথি একপার্শ্বে এবং অপর একজন নির্দিষ্ট অতিথি অপর পার্শ্বে বসিবেন তাহাদের আগে বসাইলে বাকী 5 জনকে যে কোন পার্শ্বে বসানো যাইবে। যেহেতু, উভয় পার্শ্বে সমান সংখ্যক অতিথি বসিবে, সুতরাং ঐ 5 জনের যে কোন 2 জনকে একপার্শ্বে এবং বাকী 3 জনকে অপর পার্শ্বে বসাইতে হইবে এবং তাহা সম্ভব হইবে ${}^5C_2$ প্রকারে।

এখন, প্রত্যেক পার্শ্বে 4 জনকে তাহাদের নিজেদের মধ্যে $\lfloor 4$ প্রকারে সাজানো যাইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাসের সংখ্যা $= {}^5C_2 \times \lfloor 4 \times \lfloor 4$

$= 10 \times 24 \times 24 = 5760.$

উদাহরণ 3. 2, 2, 4, 4, 6, 8 অঙ্কগুলি দ্বারা চার অঙ্ক বিশিষ্ট কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যাইবে?

প্রদত্ত অঙ্কগুলি হইতে চারিটি করিয়া লইয়া নির্বাচনের প্রকারকে নিম্নলিখিত তিন শ্রেণীতে বিভক্ত করা যায়ঃ

(1) দুইটি অঙ্ক একই প্রকারের; অপর দুইটি অঙ্ক অপর একই প্রকারের;

(2) দুইটি অঙ্ক একই প্রকারের; অপর দুইটি অঙ্ক বিভিন্ন প্রকারের;

(3) চারটি অঙ্ক বিভিন্ন প্রকারের।

এখন, (1) প্রথম ক্ষেত্রে নির্বাচনের সংখ্যা $= {}^2C_2$; এইরূপ ক্ষেত্রে,

$$\text{সংখ্যাগুলির সংখ্যা} = {}^2C_2 \times \frac{\lfloor 4}{\lfloor 2 \times \lfloor 2} = 1 \times 6 = 6;$$

(2) দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, নির্বাচনের সংখ্যা $= {}^2C_1 \times {}^3C_2$; এইরূপ ক্ষেত্রে,

$$\text{সংখ্যাগুলির সংখ্যা} = {}^2C_1 \times {}^3C_2 \times \frac{\lfloor 4}{\lfloor 2} = 2 \times 3 \times 12 = 72;$$

(3) তৃতীয় ক্ষেত্রে, নির্বাচনের সংখ্যা $= {}^4C_4$; এইরূপ ক্ষেত্রে,

$$\text{সংখ্যাগুলির সংখ্যা} = {}^4C_4 \times \lfloor 4 = 1 \times 24 = 24.$$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাগুলির সংখ্যা $= 6 + 72 + 24 = 102.$

উদাহরণ 4. 'Proportion' শব্দটির অক্ষরগুলি হইতে এক সঙ্গে যে কোন 4টি করিয়া লইয়া যত প্রকারে বিন্যাস করা যাইবে তাহাদের সংখ্যা কত ?

Proportion শব্দটিতে মোট 10টি অক্ষর আছে ; তাহাদের মধ্যে 3টি 'o', 2টি p, 2টি r এবং বাকী 3টি t, i, n. প্রদত্ত শর্তানুসারে 4টি অক্ষর নিম্নলিখিত চারি পর্যায়ের হইবে :

(1) 3টি একই অক্ষর এবং 1টি অপর কোন অক্ষর ;

(2) 2টি একই প্রকারের অক্ষর এবং অপর দুইটি অপর একই প্রকারের অক্ষর ;

(3) 2টি একই প্রকারের অক্ষর এবং অপর দুইটি বিভিন্ন অক্ষর ;

(4) 4টি বিভিন্ন অক্ষর।

এখন, (1) প্রথম ক্ষেত্রে, নির্বাচনের সংখ্যা $= {}^5C_1 = 5$;

এইরূপক্ষেত্রে, বিন্যাসের সংখ্যা $= 5 \times \frac{\lfloor 4}{\lfloor 3} = 20$;

(2) দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, নির্বাচনের সংখ্যা $= {}^3C_2 = 3$;

এইরূপক্ষেত্রে, বিন্যাসের সংখ্যা $= 3 \times \frac{\lfloor 4}{\lfloor 2 \lfloor 2} = 18$,

(3) তৃতীয় ক্ষেত্রে, নির্বাচনের সংখ্যা $= {}^5C_2 + {}^5C_2 + {}^5C_2 = 3 \times {}^5C_2 = 30$;

এইরূপ ক্ষেত্রে, বিন্যাসের সংখ্যা $= 30 \times \frac{\lfloor 4}{\lfloor 2} = 360$;

(4) চতুর্থ ক্ষেত্রে, নির্বাচনের সংখ্যা $= {}^6C_4 = {}^6C_2 = 15$;

এইরূপক্ষেত্রে, বিন্যাসের সংখ্যা $= 15 \times \lfloor 4 = 360$.

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাসের সংখ্যা $= 20 + 18 + 360 + 360 = 758$.

প্রশ্নমালা 27

1. ${}^nP_r = 336$ এবং ${}^nC_r = 56$ হইলে, n এবং r এর মান বাহির কর।

[H. S. 1970]

2. 'Lion' এবং 'Hare' শব্দ দুইটির অক্ষরগুলি হইতে 6 অক্ষরের কতগুলি বিভিন্ন বিন্যাস হইবে যদি প্রতিটি শব্দ হইতে 3টি করিয়া অক্ষর লওয়া হয় ?

3. 'Forecast' এবং 'Milky' এই দুইটি শব্দ হইতে 5টি অক্ষরের কতগুলি বিন্যাস পাওয়া যাইবে যদি প্রতিটি বিন্যাসের জন্য প্রথম শব্দ হইতে 3টি অক্ষর এবং দ্বিতীয় শব্দ হইতে 2টি অক্ষর লওয়া হইয়া থাকে ? **[H. S. 1976]**

4. একটি নৌকায় 8 জন মাঝির মধ্যে নির্দিষ্ট দুইজন কেবলমাত্র 'Stroke-side'-এ এবং নির্দিষ্ট অপর একজন কেবলমাত্র 'Bow side' এ দাঁড় টানিতে পারে। উহাদিগকে দুই পার্শ্বে সমান ভাগে রাখিয়া কত প্রকারে সাজানো যাইবে ?

5. 21টি বিভিন্ন ব্যঞ্জনবর্ণ এবং 5টি বিভিন্ন স্বরবর্ণ হইতে 5 অক্ষরের কতগুলি শব্দ গঠন করা যাইবে, যেখানে প্রতিটি শব্দে 3টি ব্যঞ্জনবর্ণ এবং 2টি স্বরবর্ণ থাকিবে ?

6. একই আকারের 3টি লাল পেন্সিল, একই আকারের 2টি সবুজ ডট্-পেন এবং অপর বিভিন্ন রঙের 3টি ফাউণ্টেন পেন হইতে 4টি করিয়া লইয়া কতগুলি বিভিন্ন বিন্যাস সম্ভব হইবে ?

7. a, a, a, b, b, b, c, d এই অক্ষরগুলি হইতে 5টি করিয়া লইয়া কতগুলি বিভিন্ন বিন্যাস গঠন করা যাইবে ?

8. 4, 4, 4, 6, 6, 8, 8, 3, 5 অঙ্কগুলি হইতে 6টি করিয়া লইয়া কতগুলি বিভিন্ন সংখ্যা পাওয়া যাইবে ?

9. 112340 সংখ্যাটির অঙ্কগুলি দ্বারা 1000 অপেক্ষা বৃহত্তর চার অঙ্কের কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যাইবে ?

10. (*i*) 'Calcutta', (*ii*) 'Mississipi' শব্দের (প্রতিক্ষেত্রে) 5টি করিয়া অক্ষরের মোট কতগুলি বিন্যাস হইবে ?

11. কোন অঙ্ক একাধিকবার ব্যবহার না করিয়া 1, 2, 3, 4, 5 অঙ্কগুলিকে একসঙ্গে লইয়া যত প্রকারের সংখ্যা গঠন সম্ভব তাহাদের সমষ্টি বাহির কর।

12. 330411 সংখ্যাটির অঙ্কগুলি হইতে সার্থক পাঁচ অঙ্কযুক্ত যতগুলি সংখ্যা গঠন করা যাইবে তাহাদের সংখ্যা এবং সমষ্টি বাহির কর।

13. 6 জন বালক এবং 5 জন বালিকা একই সারিতে কত প্রকারে দাঁড়াইতে পারিবে, যেখানে যে কোন দুইজন বালিকা পাশাপাশি থাকিবে না ?

14. এক লটারীতে 8টি পুরস্কার ঘোষণা করা হইল। প্রথম অংশগ্রহণকারী মোট 50 খানা টিকেট-পূর্ণ বাক্স হইতে 5 খানা টিকেট তুলিয়া লইল। কতগুলি বিভিন্ন প্রকারে লোকটি টিকেটগুলি তুলিতে পারে, যাহাতে সে ঠিক 2টি পুরস্কার পাইবে ?

[**Joint Ent.Ex. 1976**]

15. প্রবেশিকা পরীক্ষায় পদার্থবিজ্ঞান, রসায়নশাস্ত্র এবং ইংরেজী ভাষা, ইহাদের প্রত্যেকটির জন্য পূর্ণসংখ্যা 100 নম্বর করিয়া ধার্য্য করা আছে; এবং অঙ্কের জন্য পূর্ণসংখ্যা 200 নম্বর ধার্য্য করা আছে। দেখাও যে, মোট 858601 প্রকারে একজন পরীক্ষার্থী সর্বসাকুল্যে 300 নম্বর পাইতে পারে। [**Joint. Ent. Ex. 1975**]

16. একটি অক্ষরযুক্তাবন্ধকের (Letter-lock) আবেষ্টনীতে 5টি আংটি আছে। প্রতিটি আংটির উপরিভাগে 6টি করিয়া বিভিন্ন অক্ষর মুদ্রিত আছে। মূল শব্দটি জানে না এমন একজন লোক তালাটি খুলিতে কতভাবে ব্যর্থকাম হইতে পারে ?

অষ্টম অধ্যায়

দ্বিপদ উপপাদ্য

(Binomial Theorem)

8-1. উপস্থাপন।

দুইটি পদবিশিষ্ট যে কোন রাশিমালাকে **দ্বিপদ রাশিমালা** (*Binomial Expression*) বলে। যেমন, $1+x$; $a+x$; $a-x$; $2x-3y^2$; ইত্যাদির প্রত্যেকটি দ্বিপদ রাশিমালা।

একটি দ্বিপদ রাশিমালার যে কোন ঘাতের **বিস্তৃতি** (*Expansion*) বীজগণিতীয় সূত্রের সাহায্যে নির্ণয় করা যাইতে পারে। যেমন,

$$(a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2 ;$$

$$(a+x)^3 = (a+x)(a+x)^2$$

$$= (a+x)(a^2 + 2ax + x^2)$$

$$= a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3 \text{ ; ইত্যাদি।}$$

কিন্তু, ঘাতের মান খুব বেশী হইলে, তখন বারবার গুণ করা যেমন সময় সাপেক্ষ, তেমনি দারুণ পরিশ্রমের দরকার হয়। সেইজন্য, কোন দ্বিপদ রাশিমালার কোন ঘাতের বিস্তৃতির একটি সাধারণ **সূত্র** (*Formula*) থাকা প্রয়োজন।

যে কোন দ্বিপদ রাশিমালার যে কোন ঘাতের বিস্তৃতির সাধারণ সূত্রটি **Sir Isaac Newton** প্রথম স্থাপন করেন। এই সূত্রটিকে **দ্বিপদ উপাপদ্য** (*Binomial Theorem*) বলা হয়। নিম্নে তাহা দেওয়া হইল।

8-2. দ্বিপদ উপপাদ্য।

বিবৃতি (*Statement*) :

***n* কোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইলে,**

$$(a+x)^n = a^n + {}^nC_1 a^{n-1}x + {}^nC_2 a^{n-2}x^2 + \dots\dots$$

$$\dots\dots + {}^nC_r a^{n-r}x^r + \dots\dots + x^n .$$

প্রমাণ :

$\because$ $(a+x)^n = (a+x)(a+x)\cdots\cdots n$ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত,

ডান পক্ষের n সংখ্যক উৎপাদকের ক্রমিক গুণফল হইতে $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতির প্রত্যেক পদ নিম্নলিখিত উপায়ে পাওয়া যাইবে।

ডান পক্ষের n সংখ্যক উৎপাদকের ক্রমিক গুণফলের প্রত্যেকটি পদে থাকিবে ঐ n সংখ্যক উৎপাদকের প্রত্যেকটির কেবলমাত্র একটি করিয়া অক্ষর ; সুতরাং, ঐ ক্রমিক গুণফলের প্রত্যেকটি পদে a এবং x থাকিবে যাহাদের ঘাতের সমষ্টি n হইবে।

বিস্তৃতির x-নিরপেক্ষ পদটি পাওয়া যাইবে ঐ n সংখ্যক উৎপাদকের প্রত্যেকটির প্রথম পদ লইয়া গুণ করিলে এবং তাহা হইবে $a \times a \times a \times \cdots\cdots n$ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত। সুতরাং বিস্তৃতির x-নিরপেক্ষ পদটি হইবে a^n : এবং ইহাই বিস্তৃতির প্রথম পদ।

অনুরূপভাবে, a-নিরপেক্ষ পদটি হইবে x^n ; এবং ইহাই বিস্তৃতির শেষ পদ।

এখন, $a^{n-r}x^r$ ধারক পদটি পাওয়া যাইবে n সংখ্যক উৎপাদকের যে কোন r সংখ্যক উৎপাদকের প্রত্যেকটির x লইয়া এবং অবশিষ্ট $(n-r)$ সংখ্যক উৎপাদকের প্রত্যেকটির a লইয়া উহাদিগকে গুণ করিলে। কিন্তু n সংখ্যক উৎপাদক হইতে যে কোন r সংখ্যক উৎপাদক নির্বাচন করা যাইবে ${}^nC_r$ প্রকারে ; এবং বাকী $(n-r)$ সংখ্যক উৎপাদক হইতে $(n-r)$ সংখ্যক a লওয়া যাইবে ${}^{n-r}C_{n-r}$, অর্থাৎ, কেবলমাত্র 1 প্রকারে। সুতরাং, $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতির $a^{n-r}x^r$ ধারক পদটি ${}^nC_r a^{n-r}x^r$ হইবে।

এখন, ${}^nC_r a^{n-r}x^r$-এর মধ্যে $r=1, 2, 3, \cdots\cdots, (n-1)$ বসাইয়া বিস্তৃতির অন্যান্য পদগুলি অতি সহজেই পাওয়া যাইবে।

তাহা হইলে, প্রমাণিত হইল যে,

$$(a+x)^n = a^n + {}^nC_1 a^{n-1}x + {}^nC_2 a^{n-2}x^2 + \cdots \quad \cdots$$
$$\cdots \quad \cdots + {}^nC_r a^{n-r}x^r + \cdots \quad \cdots + x^n .$$

বিকল্প প্রমাণ :

আরোহ পদ্ধতি : (Method of Induction)

সাধারণ গুণন প্রক্রিয়ার সাহায্যে,

$$(a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2$$
$$= a^2 + {}^2C_1 a^{2-1}x + x^2 ;$$
$$(a+x)^3 = (a+x)(a+x)^2 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$$
$$= a^3 + {}^3C_1 a^{3-1}x + {}^3C_2 a^{3-2}x^2 + x^3.$$

সুতরাং, দেখা যাইতেছে, $n=2, 3$ হইলে উপপাদ্যটি সত্য। এইভাবে অগ্রসর হইলে, ধরা যাক্, n এর মান m (ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা) হইলে উপপাদ্যটি সত্য। তাহা হইলে,

$$(a+x)^m = a^m + {}^mC_1 a^{m-1}x + {}^mC_2 a^{m-2}x^2 + \cdots \quad \cdots$$
$$\cdots \quad \cdots + {}^mC_r a^{m-r}x^r + \cdots \quad \cdots + x^m.$$

এখন, ইহার উভয় পক্ষকে $a+x)$ দ্বারা গুণ করিয়া পাই,

$$(a+x)^{m+1}=(a+x)[a^m+{}^mC_1a^{m-1}x+{}^mC_2a^{m-2}x^2+\cdots \quad \cdots$$
$$+{}^mC_{r-1}a^{m-r+1}x^{r-1}+{}^mC_ra^{m-r}x^r+\cdots \quad \cdots+x^m].$$
$$=a^{m+1}+({}^mC_1+{}^{\cdot}\backslash a^mx+({}^mC_2+{}^mC_1)a^{m-1}x^2+\ldots \quad \ldots$$
$$+({}^mC_r+{}^mC_{r-1})a^{m-r+1}x^r+\cdots \quad \cdots+x^{m+1}$$
$$=a^{m+1}+{}^{m+1}C_1a^mx+{}^{m+1}C_2a^{m-1}x^2+\ldots \quad \ldots$$
$$\ldots \quad \ldots+{}^{m+1}C_ra^{m-r+1}x^r+\ldots \quad \ldots+x^{m+1};$$
$$(\because \quad {}^mC_r+{}^mC_{r-1}={}^{m+1}C_r).$$

সুতরাং, দেখা যাইতেছে, n এর মান m এর জন্য উপপাদ্যটি সত্য হইলে, উহা n এর মান $m+1$ এর জন্যও অবশ্যই সত্য হইবে।

সাধারণ গুনন প্রক্রিয়া দ্বারা পূর্বেই দেখানো হইয়াছে, $n=3$ এর জন্য উপপাদ্যটি সত্য ; সুতরাং, উহা $n=3+1$, অর্থাৎ, $n=4$ এর জন্যও সত্য হইবে। অনুরূপভাবে, উপপাদ্যটি $n=5, 6, \cdots$ইত্যাদির জন্যও সত্য হইবে। সুতরাং, n এর যে কোন মান (ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা) হইলে, উপপাদ্যটি সত্য ; এবং তাহা হইতেছে ঃ

$$(a+x)^n=a^n+{}^nC_1a^{n-1}x+{}^nC_2a^{n-2}x^2+\ldots \quad \ldots$$
$$\ldots \quad \ldots+{}^nC_ra^{n-r}n^r+\ldots \quad \ldots+x^n.$$

মন্তব্য ঃ n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হইলে $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতির পদগুলির সংখ্যা $(n+1)$ হইবে।

কতিপয় প্রয়োজনীয় সিদ্ধান্ত ঃ

n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইলে,

(i) $(1+x)^n=1+{}^nC_1x+{}^nC_2x^2+\ldots \quad \ldots+x^n$

$$=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\ldots \quad \ldots+x^n.$$

(ii) $(1-x)^n=1+{}^nC_1(-x)+{}^nC_2(-x)^2+\ldots \quad \ldots+(-x)^n$

$$=1-{}^nC_1x+{}^nC_2x^2-\ldots \quad \ldots+(-1)^nx^n$$
$$=1-nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2-\ldots \quad \ldots+(-1)^nx^n.$$

(iii) $(a-x)^n=a^n+{}^nC_1a^{n-1}(-x)+{}^nC_2a^{n-2}(-x)^2\ldots \quad \ldots+(-x)^n$

$$=a^n-{}^nC_1a^{\ -1}x+{}^nC_2a^{n-2}x^2-\ldots \quad \ldots+(-1)^nx^n.$$

বিশেষ দ্রষ্টব্য :

[1] $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

[2] $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

[3] $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$.

[4] $(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$.

[5] $(a+b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$.

8-3. $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতির সাধারণ পদ নির্ণয়।

আমরা জানি, n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইলে,

$$(a+x)^n = a^n + {}^nC_1a^{n-1}x + {}^nC_2a^{n-2}x^2 + \cdots + {}^nC_ra^{n-r}x^r + \cdots\cdots + x^n.$$

এই বিস্তৃতির r-তম পদ t_r দ্বারা সূচিত হইলে,

t_1 = প্রথম পদ $= a^n$;

t_2 = দ্বিতীয় পদ $= {}^nC_1a^{n-1}x$;

t_3 = তৃতীয় পদ $= {}^nC_2a^{n-2}x^2$;

t_4 = চতুর্থ পদ $= {}^nC_3a^{n-3}x^3$;

... ...

... ...

$t_{r+1} = (r+1)$-তম পদ $= {}^nC_ra^{n-r}x^r$.

$(a+x)^n$ এর বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদকে **সাধারণ পদ** (**general term**) বলা হয়।

8-4. $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতির মধ্যপদ নির্ণয়, যেখানে n যে কোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হইলে, $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতির পদ সংখ্যা $(n+1)$ হইবে। সুতরাং,

[1] n যুগ্ম ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইলে, অর্থাৎ, $n=2m$ হইলে, বিস্তৃতির পদ সংখ্যা হইবে $2m+1$; এইরূপক্ষেত্রে **একটি মাত্র** মধ্যপদ থাকিবে এবং তাহা $(m+1)$-তম পদটি, অর্থাৎ, $\left(\frac{n}{2}+1\right)$-তম পদটি।

$\therefore$ **মধ্যপদটি** $= (m+1)$-তম পদ

$$= {}^nC_ma^{n-m}x^m = {}^nC_ma^mx^m = {}^nC_{\frac{n}{2}}a^{\frac{n}{2}}x^{\frac{n}{2}},$$

[2] n অযুগ্ম ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইলে, অর্থাৎ, $n = 2m + 1$ হইলে, বিস্তৃতির পদ সংখ্যা $2m + 2$ হইবে ; এইরূপক্ষেত্রে, বিস্তৃতির **দুইটি** মধ্যপদ থাকিবে ; এবং তাহারা $(m+1)$-তম পদ এবং $(m+2)$-তম পদ, অর্থাৎ, $\left(\frac{n-1}{2}+1\right)$-তম এবং $\left(\frac{n+1}{2}+1\right)$-তম পদদ্বয় হইবে।

প্রথম মধ্যপদটি $= (m+1)$-তম পদ

$$= {}^nC_m a^{n-m} x^m = {}^nC_m a^{m+1} x^m$$

$$= {}^nC_{\frac{n-1}{2}} \cdot a^{\frac{n+1}{2}} \cdot x^{\frac{n-1}{2}}.$$

দ্বিতীয় মধ্যপদটি $= (m+2)$-তম পদ

$$= {}^nC_{m+1} \cdot a^{n-m-1} \cdot x^{m+1} = {}^nC_{m+1}\, a^m x^{m+1}$$

$$= {}^nC_{\frac{n+1}{2}}\, a^{\frac{n-1}{2}} \cdot x^{\frac{n+1}{2}}.$$

দ্রষ্টব্য : ${}^nC_{\frac{1}{2}(n-1)} = {}^nC_{\frac{1}{2}(n+1)}$ বলিয়া মধ্যপদ দুইটির সাংখ্য সহগের মান সমান।

8-5. $1 + x)^n$-এর বিস্তৃতিতে প্রথম এবং শেষ হইতে সমদূরবর্তী পদ নির্ণয়, যেখানে n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা।

আমরা জানি,

$$(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 x + {}^nC_2 x^2 + \cdots\cdots + {}^nC_r x^r + \ldots\ldots + {}^nC_n x^n.$$

এখানে, ${}^nC_0, {}^nC_1, {}^nC_2, \cdots, {}^nC_n$ গুলিকে $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতির বিভিন্ন পদের **সাংখ্য সহগ** বলা হয়।

$(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদের সাংখ্য সহগ $= {}^nC_r$, অর্থাৎ বিস্তৃতির প্রথম দিক হইতে $(r+1)$-তম পদের সাংখ্য সহগ $= {}^nC_r$. এখন, এই বিস্তৃতির শেষ দিক হইতে $(r+1)$-তম পদ এবং প্রথম দিক হইতে $(n+1) - (r+1) + 1\}$-তম পদ, অর্থাৎ, $\{(n-r)+1\}$-তম পদ একই ; এবং তাহার সাংখ্য-সহগ $= {}^nC_{n-r} = {}^nC_r$.

সুতরাং, $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতির প্রথম দিক হইতে $(r+1)$-তম পদের সাংখ্য সহগ = শেষ দিক হইতে $(r+1)$-তম পদের সাংখ্য সহগ।

উদাহরণ 1. বিস্তৃতি নির্ণয় কর :

(i) $(a+2b)^5$; (ii) $\left(2x-\dfrac{1}{2x}\right)^5$; (iii) $(1+x+x^2)^4$.

(i) $(a+2b)^5$

$$=a^5+{}^5C_1a^4(2b)+{}^5C_2a^3(2b)^2+{}^5C_3a^2(2b)^3+{}^5C_4a(2b)^4+(2b)^5$$
$$=a^5+10a^4b+40a^3b^2+80a^2b^3+80ab^4+32b^5.$$

(ii) $\left(2x-\dfrac{1}{2x}\right)^5=\left\{(2x)+\left(-\dfrac{1}{2x}\right)\right\}^5$

$$=(2x)^5+{}^5C_1(2x)^4\left(-\frac{1}{2x}\right)+{}^5C_2(2x)^3\left(-\frac{1}{2x}\right)^2$$
$$+{}^5C_3(2x)^2\left(-\frac{1}{2x}\right)^3+{}^5C_4(2x)\left(-\frac{1}{2x}\right)^4+\left(-\frac{1}{2x}\right)^5$$
$$=32x^5+5(16x^4)\left(-\frac{1}{2x}\right)+10\times(8x^3)\left(\frac{1}{4x^2}\right)$$
$$+10\times(4x^2)\left(-\frac{1}{8x^3}\right)+5\times(2x)\times\left(\frac{1}{16x^4}\right)+\left(-\frac{1}{32x^5}\right)$$
$$=32x^5-40x^3+20x-\frac{5}{x}+\frac{5}{8x^3}-\frac{1}{32x^5}.$$

(iii) $(1+x+x^2)^4=\{(1+x)+x^2\}^4$

$$=(1+x)^4+{}^4C_1(1+x)^3(x^2)+{}^4C_2(1+x)^2(x^2)^2$$
$$+{}^4C_3(1+x)(x^2)^3+(x^2)^4$$
$$=(1+x)^4+4x^2(1+x)^3+6x^4(1+x)^2+4x^6(1+x)+x^8$$
$$=\{1+4x+6x^2+4x^3+x^4\}+4x^2\{1+3x+3x^2+x^3\}$$
$$+6x^4\{1+2x+x^2\}+4x^6(1+x)+x^8$$
$$=1+4x+10x^2+16x^3+19x^4+16x^5+10x^6+4x^7+x^8.$$

উদাহরণ 2. $\left(2x^2-\dfrac{3}{2x}\right)^{15}$ এর বিস্তৃতির ষষ্ঠ পদটি নির্ণয় কর ,

$\because\ \left(2x^2-\dfrac{3}{2x}\right)^{15}=\left\{(2x^2)+\left(\dfrac{-3}{2x}\right)\right\}^{15}$,

$\therefore\ t_6=$ ষষ্ঠ পদ $={}^{15}C_5(2x^2)^{15-5}\left(\dfrac{-3}{2x}\right)^5$

$$=3003\times(2^{10}x^{20})\times\left(-\frac{3^5}{2^5x^5}\right)$$
$$=-3003\times2^{10}\times3^5\times2^{-5}\times x^{20-5}$$
$$=-3003\times2^5\times3^5\times x^{15}$$
$$=-23{,}351{,}328x^{15}.$$

উদাহরণ 3. $\left(x^3+\frac{3}{x^2}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতির x^{10} এর সহগ নির্ণয় কর।

মনে করি, $(r+1)$-তম পদে x^{10} আছে।

এখন, $(r+1)$-তম পদ $={}^{10}C_r(x^3)^{10-r}.\left(\frac{3}{x^2}\right)^r$

$$={}^{10}C_r\times 3^r\times x^{30-5r}$$

তাহা হইলে, প্রদত্ত শর্তানুসারে, $x^{30-5r}=x^{10}$.

$\therefore\quad 30-5r=10$; অর্থাৎ, $r=4$

সুতরাং, $(4+1)$-তম, অর্থাৎ, পঞ্চম পদে x^{10} আছে।

$\therefore$ নির্ণেয় সহগ $={}^{10}C_4\times 3^4=17010$.

উদাহরণ 4. $\left(2x-\frac{1}{2x^2}\right)^{12}$ এর বিস্তৃতির x-বর্জিত পদটি নির্ণয় কর।

মনে করি, $(r+1)$-তম পদটি x-বর্জিত।

$\because\quad \left(2x-\frac{1}{2x^2}\right)^{12}=\left\{(2x)+\left(\frac{-1}{2x^2}\right)\right\}^{12}$

$\therefore\quad t_{r+1}=(r+1)$-তম পদ $={}^{12}C_r(2x)^{12-r}\left(\frac{-1}{2x^2}\right)^r$

$$={}^{12}C_r\times 2^{12-2r}\times(-1)^r\times x^{12-3r}$$

এই পদটি x-বর্জিত হইবে বলিয়া,

$x^{12-3r}=x^0,\qquad (\because\ x^0=1).$

$\therefore\quad 12-3r=0;\qquad \therefore\quad r=4$

সুতরাং, $(4+1)$-তম পদ, অর্থাৎ, পঞ্চম পদটি x-বর্জিত হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় পদটি $=t_5={}^{12}C_4\times 2^4\times(-1)^4=7920$.

উদাহরণ 5. (i) $\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}\right)^8$; (ii) $\left(2x-\frac{1}{3x^2}\right)^9$ এর বিস্তৃতির মধ্যপদ নির্ণয় কর।

(i) এখানে বিস্তৃতির পদসংখ্যা $=9$; সুতরাং, $(\frac{8}{2}+1)$-তম পদ, অর্থাৎ, পঞ্চম পদটি মধ্যপদ হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যপদ $=t_5={}^8C_4\left(\frac{x^2}{2}\right)^4\left(\frac{1}{x}\right)^4$

$$=70\times\frac{x^8}{16}\times\frac{1}{x^4}=\frac{35}{8}x^4.$$

(*ii*) এখানে বিস্তৃতির পদসংখ্যা = 10 ; সুতরাং, এই ক্ষেত্রে, দুইটি মধ্যপদ থাকিবে এবং তাহারা $\left(\frac{9-1}{2}+1\right)$-তম পদ এবং $\left(\frac{9+1}{2}+1\right)$-তম পদ অর্থাৎ পঞ্চম পদ এবং ষষ্ঠ পদদ্বয়।

প্রথম মধ্যপদ = পঞ্চম পদ = $(4+1)$-তম পদ

$$= {}^9C_4(2x)^5\left(\frac{-1}{3x^2}\right)^4 = \frac{448}{9x^3}.$$

দ্বিতীয় মধ্যপদ = ষষ্ঠ পদ = $(5+1)$-তম পদ

$$= {}^9C_5.(2x)^4\left(\frac{-1}{3x^2}\right)^5$$

$$= 126\times(16x^4)\left(\frac{-1}{3^5x^{10}}\right) = -\frac{224}{27}.\frac{1}{x^6}.$$

উদাহরণ 6. সরল কর :

$$(x-\sqrt{1-x^2})^6+(x+\sqrt{1-x^2})^6.$$

$\sqrt{1-x^2}=b$ ধরিলে,

প্রদত্ত রাশিমালা $=(x-b)^6+(x+b)^6$

$$=[x^6-{}^6C_1x^5b+{}^6C_2x^4b^2-{}^6C_3x^3b^3+{}^6C_4x^2b^4-{}^6C_5xb^5+b^6]+[x^6+{}^6C_1x^5b+{}^6C_2x^4b^2+{}^6C_3x^3b^3+{}^6C_4x^2b^4+{}^6C_5xb^5+b^6]$$

$$=2[x^6+{}^6C_2x^4b^2+{}^6C_4x^2b^4+b^6]$$

$$=2\{x^6+15x^4(1-x^2)+15x^2(1-x^2)^2+(1-x^2)^3\}$$

$$=2+24x^2-24x^4.$$

উদাহরণ 7. $(1-2x^2+3x^4)\left(1-\frac{2}{x}\right)^6$-এর বিস্তৃতির x এর সহগ নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশি $=(1-2x^2+3x^4)\{1-{}^6C_1\left(\frac{2}{x}\right)+{}^6C_2\left(\frac{2}{x}\right)^2-{}^6C_3\left(\frac{2}{x}\right)^3+{}^6C_4\left(\frac{2}{x}\right)^4-{}^6C_5\left(\frac{2}{x}\right)^5+\left(\frac{2}{x}\right)^6\}$

$\therefore$ নির্ণেয় সহগ $=(-2)\times(-{}^6C_1\times2)+3\times(-{}^6C_3\times2^3)$

$$=24-480=-456.$$

উদাহরণ 8. সরল কর :

$$(1+2x)^n + {}^nC_1(1+2x)^{n-1}(1-2x) + {}^nC_2(1+2x)^{n-2}(1-2x)^2 + \ldots \quad \ldots + (1-2x)^n.$$

$1+2x=a$ এবং $1-2x=b$ ধরিলে,

প্রদত্ত রাশিমালা $= a^n + {}^nC_1a^{n-1}b + {}^nC_2a^{n-2}b^2 + \ldots\ldots + b^n$

$= (a+b)^n = \{(1+2x)+(1-2x)\}^n = 2^n.$

উদাহরণ 9. $(1+x)^{2n-1}$-এর বিস্তৃতিতে x^r এবং x^{r+1}-এর সহগ সমান হইলে, r এর মান নির্ণয় কর।

এখানে, x^r এর সহগ $= {}^{2n-1}C_r$;

এবং x^{r+1} এর সহগ $= {}^{2n-1}C_{r+1}$.

প্রদত্ত শর্তানুসারে,

$${}^{2n-1}C_r = {}^{2n-1}C_{r+1}$$

$\therefore \quad r+(r+1) = 2n-1 ; \quad (\because \quad r \neq r+1).$

$\therefore \quad r = n-1.$

উদাহরণ 10. $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতির পর পর তিনটি পদের সাংখ্য সহগ 66, 220, 495 হইলে, n এর মান বাহির কর।

মনে করি, 66, 220, 495 যথাক্রমে $(r+1)$-তম, $(r+2)$-তম এবং $(r+3)$-তম পদের সহগ।

তাহা হইলে, ${}^nC_r = 66$; ${}^nC_{r+1} = 220$; ${}^nC_{r+2} = 495$.

$\therefore \quad \dfrac{{}^nC_r}{{}^nC_{r+1}} = \dfrac{66}{220}$;

বা, $\dfrac{\lfloor n}{\lfloor r \, \lfloor n-r} \times \dfrac{\lfloor r+1 \, \lfloor n-r-1}{\lfloor n} = \dfrac{3}{10}$;

বা, $\dfrac{r+1}{n-r} = \dfrac{3}{10}$;

বা, $3n - 13r - 10 = 0$; ... (1)

এবং, $\dfrac{{}^nC_{r+1}}{{}^nC_{r+2}} = \dfrac{220}{495}$;

বা, $\dfrac{\lfloor n}{\lfloor r+1 \, \lfloor n-r-1} \times \dfrac{\lfloor r+2 \, \lfloor n-r-2}{\lfloor n} = \dfrac{4}{9}$;

বা, $\dfrac{r+2}{n-r-1} = \dfrac{4}{9}$;

বা, $4n - 13r - 22 = 0.$ ... (2)

এখন, (1) এবং (2) হইতে পাই, $n = 12$.

উদাহরণ 11. দ্বিপদ উপপাদ্যের সাহায্যে $(99)^4$ এর মান বাহির কর।

$$(99)^4 = (10^2 - 1)^4 = (1 - 10^2)^4$$
$$= 1 - {}^4C_1 \times 10^2 + {}^4C_2 \times 10^4 - {}^4C_3 \times 10^6 + 10^8$$
$$= 1 - 4 \times 10^2 + 6 \times 10^4 - 4 \times 10^6 + 10^8$$
$$= 1 - 400 + 60000 - 4000,000 + 10^8$$
$$= 100,060,001 - 4,000,400$$
$$= 96,059,601.$$

উদাহরণ 12. দেখাও যে, n এর মান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর যে কোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইলে, $2^{3n} - 7n - 1$ রাশিটি 49 দ্বারা বিভাজ্য।

$$2^{3n} - 7n - 1 = 8^n - 7n - 1$$
$$= (1 + 7)^n - 7n - 1$$
$$= (1 + 7n + {}^nC_2 \times 7^2 + {}^nC_3 \times 7^3 + \cdots\cdots) - 7n - 1$$
$$= 49\{{}^nC_2 + {}^nC_3 \times 7 + {}^nC_4 \times 7^2 + \cdots\}.$$

যাহা সর্বদা 49 দ্বারা বিভাজ্য। সুতরাং, $2^{3n} - 7n - 1$ রাশিটি 49 দ্বারা বিভাজ্য।

প্রশ্নমালা 28

1. বিস্তৃত কর :

   (i) $(1 + 2x)^4$; (ii) $(a - 2b)^6$; (iii) $\left(a + \frac{1}{b}\right)^5$;

   (iv) $\left(x - \frac{2}{x}\right)^7$; (v) $\left(\frac{2x}{3} - \frac{3}{2x}\right)^6$; [H. S. 1961]

   (vi) $(1 - x + x^2)^4$; (vii) $(1 - 2x^2 + 3x^4)^5$.

2. $(3x + \frac{1}{2}y)^9$ এর বিস্তৃতির পঞ্চম পদটি বাহির কর।

3. $\left(\frac{x}{a} - \frac{a}{x}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতির ষষ্ঠ পদটি নির্ণয় কর।

4. $\left(2x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}\right)^{20}$ এর বিস্তৃতির 19-তম পদটি বাহির কর।

5. $(x - 2y)^{13}$ এর বিস্তৃতির x^{10} এর সহগ লিখ।

6. $(a^4 - bx^3)^9$ এর বিস্তৃতির x^{12} এর সহগ বাহির কর।

7. $(ax^4 - bx)^9$ এর বিস্তৃতির x^{12} এর সহগ নির্ণয় কর। [P. U. 1970]

8. $\left(x^4 - \frac{1}{x^3}\right)^{15}$ এর বিস্তৃতির x^{32} এর সহগ বাহির কর। [H. S. 1963]

9. $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতির x^{-1} এর সহগ নির্ণয় কর। [H. S. 1976]

10. $\left(\frac{3}{x^2} - \frac{x^3}{2}\right)^8$ এর বিস্তৃতির $\frac{1}{x}$ এর সহগ বাহির কর। [P. U. 1975]

11. $\left(x^2 - \frac{1}{x^3}\right)^{12}$ এর বিস্তৃতির $\frac{1}{x^{11}}$ এর সহগ নির্ণয় কর। [H. S. 1971]

12. $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{12}$ এর বিস্তৃতির x-বর্জিত পদটি বাহির কর।

[H. S. Comp. 1975]

13. (i) $\left(2x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^{12}$ এর বিস্তৃতির x বর্জিত পদটি বাহির কর। [P. U. 1962]

(ii) $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^{12}$ এর বিস্তৃতির x-বর্জিত পদটি বাহির কর।

14. $\left(2x + \frac{1}{3x^2}\right)^9$ এর বিস্তৃতির x-বর্জিত পদটি নির্ণয় কর।

15. x-বর্জিত পদ পর্যন্ত $\left(3x - \frac{5}{x^3}\right)^8$ এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

[H. S. Sup. 1973]

16. $(1+x)^3 \left(x - \frac{1}{x}\right)^6$ এর বিস্তৃতির x-বর্জিত পদটি নির্ণয় কর।

[H. S. 1975]

17. $(1 - 2x^3 + 3x^5)\left(1 + \frac{1}{x}\right)^8$ এর বিস্তৃতির x-র সহগ নির্ণয় কর।

18. নিম্নলিখিত রাশিমালার বিস্তৃতির মধ্যপদ নির্ণয় কর :

(i) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^8$; [P. U. 1974] (ii) $\left(3x - \frac{1}{2x}\right)^8$;

(iii) $\left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}\right)^{10}$; (iv) $\left(2x - \frac{3}{x^3}\right)^9$; (v) $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^{2n+1}$.

19. সরল কর :

(i) $(x - \sqrt{1-x^2})^4 + (x + \sqrt{1-x^2})^4$;

(ii) $(\sqrt{x^2 - a^2} + x)^5 - (\sqrt{x^2 - a^2} - x)^5$;

(iii) $(3 + 2\sqrt{x})^6 + (3 - 2\sqrt{x})^6$.

20. "n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হইলে, $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতির যে পদগুলির সাংখ্য-সহগ সমান তাহারা প্রথম এবং শেষ হইতে সমদূরবর্তী"—তাহা প্রমাণ কর।

[H. S. 1970]

21. দেখাও যে, $(1+x)^{2n}$ এর বিস্তৃতির মধ্যপদটির সহগ, $(1+x)^{2n-1}$ বিস্তৃতির মধ্যপদদ্বয়ের সহগের সমষ্টির সমান।

22. দেখাও যে, $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতির $(r+1)$ তম পদের সহগ, $(1+x)^{n-1}$এর বিস্তৃতির r-তম এবং $(r+1)$-তম পদদ্বয়ের সহগের সমষ্টির সমান।

23. $(1+x)^{2n+1}$ এর বিস্তৃতির x^r এবং x^{r+1}এর সহগ সমান হইলে, r এর মান বাহির কর।

24. m এবং n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হইলে, দেখাও যে, $(1+x)^{m+n}$ এর বিস্তৃতিতে x^m এবং x^n এর সহগ সমান।

25. n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইলে, দেখাও যে, $(1+x)^{2n}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ, $(1+x)^{2n-1}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগের দ্বিগুণ হইবে।

[**Joint Ent. Ex. 1975**]

26. $(1+x)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে $(2r+1)$-তম পদ এবং $(4r+5)$-তম পদের সহগদ্বয় সমান হইলে, r-এর মান বাহির কর।

27. $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে পর পর তিনটি পদের সহগ যথাক্রমে 120, 210, 252 হইলে, n এর মান বাহির কর।

28. $(1+ax+2x^2)^6$ এর বিস্তৃতিতে যদি x^2 এবং x^{11} এর সহগ যথাক্রমে 27 এবং -192 হয়, তবে দেখাও যে, $a=-1$. [**Joint Ent. Ex. 1966**]

29. $(x+a)^n$ কে x এর ঘাতের অধঃক্রমে বিস্তৃত করিলে যদি তৃতীয়, চতুর্থ এবং পঞ্চম পদের মান যথাক্রমে 84, 280, 560 হয় তবে a, x, n এর মান বাহির কর।

30. n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইলে, এবং $(x+p)^n$ কে x এর ঘাতের উর্দ্ধক্রমে বিস্তৃত করিলে যদি তৃতীয়, চতুর্থ, পঞ্চম এবং ষষ্ঠ পদ যথাক্রমে a, b, c, d হয় তবে দেখাও যে, $\dfrac{b^2-ac}{c^2-bd}=\dfrac{5a}{3c}$. [**Cal. Int. 1956**]

31. $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতির পর পর যে কোন চারিটি পদের সাংখ্য সহগ a_1, a_2, a_3, a_4 হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{a_1}{a_1+a_2}+\frac{a_3}{a_3+a_4}=\frac{2a_2}{a_2+a_3}$$ [**Joint Ent. Ex. 1971**]

32. $n(>1)$ ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হইলে, দেখাও যে,

$$a-n(a-b)+\frac{n(n-1)}{2}(a-2b)-\frac{n(n-1)(n-2)}{1 . 2 . 3}(a-3b)+ \cdots \cdots \cdots +(-1)^n(a-nb)=0.$$

33. $n=10$ এবং $x=-2$ হইলে মান নির্ণয় কর :

$$1+{}^nC_1.\frac{x}{1+x}+{}^nC_2\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+\cdots\quad\cdots+\left(\frac{x}{1+x}\right)^n.$$

34. দ্বিপদ উপপাদ্যের সাহায্যে মান নির্ণয় কর :

(*i*) $(98)^4$; (*ii*) $(999)^3$.

35. দ্বিপদ উপপাদ্যের সাহায্যে পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত মান নির্ণয় কর :

(*i*) $(1\cdot002)^4$; (*ii*) $(\cdot999)^4$; (*iii*) $(1\cdot0005)^6$.

39. দেখাও যে, n এর মান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর যে কোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইলে,

(*i*) $2^{5n}-31n-1$ রাশিটি 961 দ্বারা বিভাজ্য ;

(*ii*) $6^{2n}-35n-1$ রাশিটি 1225 দ্বারা বিভাজ্য।

8-6. *a* এবং *b* যে কোন দুইটি নির্দিষ্ট ধনাত্মক রাশি হইলে এবং *n* এর মান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর যে কোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইলে, $(a+b)^n$ এর বিস্তৃতির বৃহত্তম পদ নির্ণয়।

দ্বিপদ উপপাদ্যের সাহায্যে a-এর অধঃক্রমে $(a+b)^n$ এর বিস্তৃতিতে r-তম পদকে T_r দ্বারা সূচিত করিলে,

$$T_r={}^nC_{r-1}a^{n-r+1}b^{r-1}$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+2)}{(r-1)(r-2)\ldots\ldots3.2.1}\,a^{n-r+1}b^{r-1}\,;$$

এবং, $T_{r+1}={}^nC_r\,.\,a^{n-r}\,.\,b^r$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{r(r-1)\ldots\ldots3.2.1}\,a^{n-r}\,.\,b^r\,.$$

$$\therefore\quad \frac{T_{r+1}}{T_r}=\frac{n-r+1}{r}\cdot\frac{b}{a}$$

$\therefore\quad T_{r+1}>,\ =,$ অথবা, $<T_r,$

যদি $\dfrac{n-r+1}{r}\cdot\dfrac{b}{a}>,\ =,$ বা, <1 হয় ;

অর্থাৎ, যদি, $r<,\ =,$ বা, $>\dfrac{(n+1)b}{a+b}$ হয়।

[1] মনে করি, $\frac{(n+1)b}{a+b}=p=$ একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা। এইরূপক্ষেত্রে,

$$T_{r+1}> \ , =, \text{ অথবা, } < T_r \ , \text{ যদি } r<, \ =, \text{ বা } >p \text{ হয়।}$$

$$\therefore \quad T_1<T_2<T_3<\ldots\ldots<T_{p-1}<T_p \; ; \; T_p=T_{p+1} \; ;$$

$$T_{p+1}>T_{p+2}>T_{p+3}>\ldots\ldots>T_n \, .$$

সুতরাং, এইরূপক্ষেত্রে, T_{p+1} এবং T_p এই দুইটি বৃহত্তম পদ হইবে ;

এবং $T_{p+1}=T_p$.

$\therefore$ **বৃহত্তম পদ** $=T_{p+1}$, যেখানে $\frac{(n+1)b}{a+b}=p.$

[2] মনে করি, $\frac{(n+1)b}{a+b}=p+$ (একটি ধনাত্মক প্রকৃত ভগ্নাংশ),

যেখানে p একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা। এইরূপক্ষেত্রে,

$T_{r+1}>T_r$ যতক্ষণ $r\leq p$ হইবে ;

অর্থাৎ, $T_1<T_2<T_3<\ldots\ldots<T_p<T_{p+1}$;

এবং $T_{r+1}<T_r$, যখন $r>p$;

অর্থাৎ, $T_{p+1}>T_{p+2}>T_{p+3}>\ldots\ldots$

সুতরাং, এইরূপক্ষেত্রে, একটি মাত্র বৃহত্তম পদ থাকিবে, এবং তাহা T_{p+1} হইবে।

$\therefore$ **বৃহত্তম পদ** $=T_{p+1}$, যেখানে $\frac{(n+1)b}{a+b}=p+$ (একটি ধনাত্মক প্রকৃত ভগ্নাংশ)।

মন্তব্য ঃ

[1] $a>0, b>0$; n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

(i) $\frac{(n+1)b}{a+b}<1$ হইলে, অর্থাৎ $b<\frac{a}{n}$ হইলে, $(a+b)^n$ এর বিস্তৃতির প্রথম পদই বৃহত্তম পদ।

(ii) $\frac{(n+1)b}{a+b}>n$ হইলে অর্থাৎ $b>na$ হইলে, $(a+b)^n$ এর বিস্তৃতির শেষ পদই বৃহত্তম পদ হইবে।

(iii) $(a+b)^n$ এবং $(a-b)^n$ এর বিস্তৃতিতে সাংখ্যমানে বৃহত্তম পদ একই হইবে।

[2] n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইলে, $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতির বৃহত্তম সহগ $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতির বৃহত্তম পদের সমান হইবে, যেখানে $x=1$.

$(1+x)^n$ এর বিস্তৃতির সহগগুলি ${}^nC_0, {}^nC_1, {}^nC_2, \cdots\cdots, {}^nC_n$.

n যুগ্ম সংখ্যা হইলে, ${}^nC_r$ বৃহত্তম হইবে, যখন $r=n/2$;

কিন্তু, n অযুগ্ম সংখ্যা হইলে, ${}^nC_r$ বৃহত্তম হইবে, যখন

$r=\frac{1}{2}(n-1)$, বা, $\frac{1}{2}(n+1)$.

[3] $a>0$, $b>0$ এবং n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইলে, এবং $(a+bx)^n$ কে দ্বিপদ উপপাদ্যের সাহায্যে x এর ঘাতের উর্ধ্বক্রমে বিস্তৃত করিলে, বৃহত্তম সহগ যাহা হইবে তাহা $(a+b)^n$ এর বিস্তৃতির বৃহত্তম পদের সমান হইবে।

অনুরূপভাবে, $(a-bx)^n$ এর বিস্তৃতিতে সাংখ্যমানে বৃহত্তম সহগ $(a+b)^n$ এর বিস্তৃতির বৃহত্তম পদের সমান হইবে।

8·7. দ্বিপদ সহগসমূহের ধর্ম (*Properties of Binominal Co-efficients*) :

n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইলে,

$$(1+x)^n={}^nC_0+{}^nC_1x+{}^nC_2x^2+\cdots\cdots+{}^nC_nx^n. \quad \cdots \quad (A).$$

এখানে, ${}^nC_0, {}^nC_1, {}^nC_2, \cdots\cdots, {}^nC_n$ কে দ্বিপদ সহগ বলা হয় এবং সংক্ষেপে ইহাদিগকে যথাক্রমে $C_0, C_1, C_2, \ldots\ldots, C_n$ লেখা হইয়া থাকে।

(A)-তে $x=1$ বসাইয়া পাই,

$$C_0+C_1+C_2+\cdots\cdots+C_n=2^n$$

$$\therefore\ C_1+C_2+C_3+\cdots\cdots+C_n=2^n-1.$$

আবার, (A)-তে $x=-1$ বসাইয়া পাই,

$$C_0-C_1+C_2-C_3+C_4-C_5+\cdots\cdots+(-1)^nC_n=0.$$

$$\therefore\ C_0+C_2+C_4+\cdots\cdots=C_1+C_3+C_5+\cdots\cdots=2^{n-1}.$$

অপিচ, (A) হইতে পাই,

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}x^3+\cdots+x^n.$$

উদাহরণ 1. $x=\frac{1}{2}$ হইলে, (i) $(1+2x)^9$ এবং (ii) $(2-3x)^{13}$ এর বিস্তৃতিতে সাংখ্যমানে বৃহত্তম পদ বাহির কর।

(i) r-তম পদটি T_r দ্বারা সূচিত হইলে,

$$T_r={}^9C_{r-1}(2x)^{r-1}={}^9C_{r-1}\ ; \quad \because\ x=\tfrac{1}{2}\ ;$$

এবং $T_{r+1}={}^9C_r(2x)^r={}^9C_r$; $(\because\ x=\frac{1}{2})$.

$$\therefore\ \frac{T_{r+1}}{T_r}=\frac{{}^9C_r}{{}^9C_{r-1}}=\frac{10-r}{r}.$$

$\therefore\ T_{r+1}>, =,$ বা, $<T_r,$

যদি, $\frac{10-r}{r}>, =,$ বা, <1 হয়; অর্থাৎ, যদি $r<, =,$ বা, >5 হয়।

সুতরাং, এইরূপক্ষেত্রে,

$$T_1<T_2<T_3<T_4<T_5;\ T_5=T_6;$$
$$T_6>T_7>T_8>T_9>T_{10}.$$

সুতরাং, পঞ্চম পদ এবং ষষ্ঠ পদ দুইটি সমান এবং ঐ দুইটিই বৃহত্তম পদ।

$\therefore$ বৃহত্তম পদ = পঞ্চম পদ

$$={}^9C_4=126.$$

(ii) $x=\frac{1}{2}$ হইলে, $(2-3x)^{13}$ এর বিস্তৃতিতে সাংখ্যমানে বৃহত্তম পদ, $(2+3x)^{13}$ এর বিস্তৃতির বৃহত্তম পদের সমান। ধরি, $(2+3x)^{13}$ এর বিস্তৃতিতে r-তম পদ T_r. তাহা হইলে,

$$T_r={}^{13}C_{r-1}\times 2^{14-r}\times(3x)^{r-1};$$
$$T_{r+1}={}^{13}C_r\times 2^{13-r}\times(3x)^r.$$

$$\therefore\ \frac{T_{r+1}}{T_r}=\frac{{}^{13}C_r}{{}^{13}C_{r-1}}\times\frac{3x}{2}=\frac{14-r}{r}\times\frac{3x}{2}.$$

$\therefore\ x=\frac{1}{2}$ হইলে,

$$\frac{T_{r+1}}{T_r}=\frac{14-r}{r}\times\frac{3}{4}=\frac{42-3r}{4r}.$$

$\therefore\ T_{r+1}>, =,$ বা, $<T_r,$

যদি, $\frac{42-3r}{4r}>, =,$ বা, <1 হয়;

অর্থাৎ, যদি $r<, =,$ বা, $r>6$ হয়;

সুতরাং, ষষ্ঠ এবং সপ্তম পদ দুইটি সমান এবং তাহারাই বৃহত্তম পদ। সাংখ্যমানে বৃহত্তম পদটির মান :

$$={}^{13}C_5\times 2^8\times(3\times\tfrac{1}{2})^5$$
$$=2501928.$$

উদাহরণ 2. (*i*) $(3-5x)^8$ এবং (*ii*) $(3x+5y)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে সাংখ্যমানে বৃহত্তম সহগের মান বাহির কর।

(*i*) $(3-5x)^8$ এর বিস্তৃতিতে সাংখ্যমানে বৃহত্তম সহগ, $(3+5)^8$ এর বিস্তৃতির বৃহত্তম পদের সমান।

$(3+5)^8$ এর বিস্তৃতির r-তম পদ T_r হইলে,

$$T_r = {}^8C_{r-1} \times 3^{9-r} \times 5^{r-1};$$

$$T_{r+1} = {}^8C_r \times 3^{8-r} \times 5^r.$$

$$\therefore \quad \frac{T_{r+1}}{T_r} = \frac{8-r+1}{r} \times \frac{5}{3} = \frac{45-5r}{3r}.$$

$$\therefore \quad T_{r+1} >, \ =, \text{ বা, } < T_r,$$

যদি, $\dfrac{45-5r}{3r} >, \ =, \text{ বা, } < 1$ হয়;

অর্থাৎ, যদি, $r <, \ =, \text{ বা, } > 5\frac{5}{8}$ হয়।

$$\therefore \quad T_1 < T_2 < T_3 < T_4 < T_5 < T_6$$

এবং, $T_6 > T_7 > T_8 > T_9$.

সুতরাং, $(3+5)^8$ এর বিস্তৃতির ষষ্ঠ পদ বৃহত্তম পদ।

$\therefore$ নির্ণেয় বৃহত্তম সহগ $= {}^8C_5 \times 3^3 \times 5^5 = 4725000.$

(*ii*) $(3x+5y)^{10}$ এর বিস্তৃতির বৃহত্তম সহগ, $(3+5)^{10}$ এর বিস্তৃতির বৃহত্তম পদের সমান।

এখানে, $\dfrac{T_{r+1}}{T_r} = \dfrac{10-r+1}{r} \times \dfrac{5}{3} = \dfrac{55-5r}{3r}.$

$$\therefore \quad T_{r+1} >, \ =, \text{ বা, } < T_r,$$

যদি, $\dfrac{55-5r}{3r} >, \ =, \text{ বা, } < 1$ হয়; অর্থাৎ, যদি $r <, \ =, \text{ বা, } > 6\frac{7}{8}$ হয়।

সুতরাং, $(3+5)^{10}$ এর বিস্তৃতি সপ্তমপদ বৃহত্তম পদ।

$\therefore$ নির্ণেয় বৃহত্তম সহগ $= {}^{10}C_6 \times 3^4 \times 5^6 = 265,781,250.$

উদাহরণ 3. $(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots \cdots + C_nx^n$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$C_1 + 2C_2 + 3C_3 + \cdots \cdots + nC_n = n.2^{n-1}.$$ [H. S. 1970]

এখানে, $C_1 + 2C_2 + 3C_3 + \cdots \cdots + n.C_n$

$$= n + 2.\frac{n(n-1)}{\lfloor 2} + 3.\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3} + \cdots \cdots + n$$

$$= n\left[1 + (n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{\lfloor 2} + \cdots \cdots + 1\right]$$

$$= n\{1+1\}^{n-1} = n.2^{n-1},$$

উদাহরণ 4. $(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_nx^n$ হইলে, দেখাও যে,

$$\frac{C_0}{1} + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{3} + \cdots \cdots + \frac{C_n}{n+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

[Joint Ent. Ex. 1969 ; P. U. 1971]

এখানে, $\frac{C_0}{1} + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{3} + \cdots \cdots + \frac{C_n}{n+1}$

$$= \left\{\frac{1}{1} + \frac{n}{2} + \frac{n(n-1)}{3\lfloor 2} + \cdots \cdots + \frac{1}{n+1}\right\}$$

$$= \frac{1}{n+1}\left\{(n+1) + \frac{(n+1)n}{\lfloor 2} + \cdots \cdots + 1\right\}$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[\left\{1 + (n+1) + \frac{(n+1)n}{\lfloor 2} + \cdots \cdots + 1\right\} - 1\right]$$

$$= \frac{1}{n+1}[(1+1]^{n+1} - 1] = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

উদাহরণ 5. $(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots\cdots + C_nx^n$ হইলে, দেখাও যে,

$$C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + \cdots + C_n^2 = \frac{\lfloor(2n)}{(\lfloor n)^2}.$$ [P. U. 1966]

এখানে, $(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots \cdots + C_nx^n$

এবং $(x+1)^n = C_0x^n + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \cdots \cdots + C_n.$

গুণ করিয়া পাই,

$$(1+x)^{2n} = (C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_nx^n)$$
$$\times (C_0x^n + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \cdots\cdots + C_n).$$

ইহা একটি অভেদ বলিয়া উভয় পার্শ্বের x^nএর সহগ সমান হইবে।

এখন, বামপক্ষের x^n এর সহগ

$$= {}^{2n}C_n = \frac{\lfloor(2n)}{(\lfloor n)^2};$$

এবং ডানপক্ষের x^n এর সহগ

$$= C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + \cdots + C_n^2.$$

$$\therefore \quad C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + \cdots \cdots + C_n^2 = \frac{\lfloor(2n)}{(\lfloor n)^2}.$$

প্রশ্নমালা 29

1. নিম্নলিখিত রাশিসমূহের বিস্তৃতিতে সাংখ্যমানে বৃহত্তম পদ নির্ণয় কর :

(i) $(2+3)^{14}$; (ii) $(3+4)^{15}$;

(iii) $(1+\frac{3}{4})^{10}$; (iv) $(2-\frac{1}{2})^{10}$;

(v) $(2+3x)^8$, যখন $x=\frac{1}{2}$; (vi) $(1+2x)^9$, যখন $x=\frac{1}{3}$;

(vii) $(24+2x)^8$, যখন $x=3/2$; (viii) $(5+x)^9$, যখন $x=\frac{2}{5}$;

(ix) $(\frac{1}{10}+\frac{2}{5}x)^{10}$, যখন $x=3/2$; (x) $(\frac{1}{10}+x)^9$, যখন $x=1$;

(xi) $(3-\frac{2}{5}x)^{18}$, যখন $x=\frac{1}{3}$;

(xii) $(x+2y)^{13}$, যখন $x=5, y=\frac{1}{2}$;

(xiii) $(5a-3x)^9$, যখন $a=2/3$; $x=3/2$.

2. নিম্নলিখিত রাশিসমূহের বিস্তৃতিতে সাংখ্যমানে বৃহত্তম সাংখ্য-সহগ বাহির কর :

(i) $(2+3x)^6$; (ii) $(1+\frac{2}{5}x)^7$;

(iii) $(\frac{5}{2}-3x)^{10}$; (iv) $(2x+3y)^{11}$;

(v) $(ax-by)^8$; (vi) $\left(3ax-\frac{2b^3}{x}\right)^{14}$

3. $\left(2+\frac{5x}{2}\right)^{12}$ এর বিস্তৃতিতে যে পদের সাংখ্য সহগ বৃহত্তম সেই পদের x-এর ঘাত নির্ণয় কর এবং উহার সহগের মান বাহির কর। [Joint Ent. Ex. 1976]

4. x এর মানের সীমা নির্ণয় কর, যাহার জন্য $(1+x)^{30}$ এর বিস্তৃতিতে বৃহত্তম পদে বৃহত্তম সহগ থাকিবে।

5. দেখাও যে, x এর মান $\frac{n}{n+1}$ এবং $\frac{n+1}{n}$ এর মধ্যে থাকিলে $(1+x)^{2n}$ এর বিস্তৃতিতে বৃহত্তম পদে বৃহত্তম সহগ থাকিবে।

6. দেখাও যে, x এর মান $\frac{n}{n+2}$ এবং $\frac{n+2}{n}$ এর মধ্যে থাকিলে, $(1+x)^{2n+1}$ এর বিস্তৃতিতে বৃহত্তম পদে বৃহত্তম সহগ থাকিবে।

7. $(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots \quad \dots + C_nx^n$ হইলে, প্রমাণ কর :

(i) $C_0 + C_2 + C_4 + C_6 + \dots \quad \dots = 2^{n-1}$;

(ii) $C_0 + 2C_1 + 3C_2 + \cdots \quad \dots + (n+1)C_n = (n+2)2^{n-1}$;

[H. S. 1966]

(iii) $C_0 + 3C_1 + 5C_2 + \dots \quad \dots + (2n+1)C_n = (n+1)2^n$;

(iv) $C_1 - 2C_2 + 3C_3 - \dots \quad \dots + (-1)^{n-1}n.C_n = 0$;

[H. S. 1972]

(v) $C_0 - \frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{3}C_2 - \dots \quad \dots + (-1)^n \frac{1}{n+1} C_n = \frac{1}{n+1}$;

(vi) $\frac{C_0}{1} + \frac{C_2}{3} + \frac{C_4}{5} + \dots \quad \dots + \frac{C_n}{n+1} = \frac{2^n}{n+1}$,

যেখানে n = যুগ্ম সংখ্যা ;

(vii) $\frac{C_1}{C_0} + 2.\frac{C_2}{C_1} + 3.\frac{C_3}{C_2} + \dots \quad \cdots + n.\frac{C_n}{C_{n-1}} = \frac{n(n+1)}{2}$;

(viii) $(C_0 + C_1)(C_1 + C_2)\dots \quad \dots(C_{n-1} + C_n)$

$$= \frac{(n+1)^n}{\lfloor n} C_1C_2C_3\dots\dots C_n ;$$

(ix) $C_0C_n + C_1C_{n-1} + \dots \quad \cdots + C_nC_0 = \frac{\lfloor 2n}{(\lfloor n)^2}$;

(x) $C_0C_1 + C_1C_2 + C_2C_3 + \dots \quad .. + C_{n-1}C_n = \frac{\lfloor 2n}{\lfloor n+1 \lfloor n-1}$;

(xi) $C_0C_2 + C_1C_3 + C_2C_4 + \dots \quad \cdots + C_{n-2}C_n = \frac{\lfloor 2n}{\lfloor n+2 \lfloor n-2}$;

(xii) $C_0C_m + C_1C_{m+1} + C_2C_{m+2} + \dots + C_{n-m}C_n = \frac{\lfloor 2n}{\lfloor n+m \lfloor n-m}$;

(xiii) $C_0{}^2 - C_1{}^2 + C_2{}^2 - \cdots \quad \dots + (-1)^n C_n{}^2 = 0$, যেখানে n অযুগ্ম সংখ্যা ;

(xiv) $C_1{}^2 + 2C_2{}^2 + 3C_3{}^2 + \dots \quad \dots + nC_n{}^2 = \frac{\lfloor 2n-1}{(\lfloor n-1)^2}$;

xv) $C_0{}^2 + \frac{1}{2}C_1{}^2 + \frac{1}{3}C_2{}^2 + \dots \quad \dots + \frac{1}{n+1}C_n{}^2 = \frac{\lfloor(2n+1)}{(\lfloor n+1)^2}$;

(xvi) $C_0{}^2 - C_1{}^2 + C_2{}^2 - \dots \quad \dots + (-1)^n C_n{}^2 = (-1)^{\frac{1}{2}n}({}^nC_{n/2})$,

যেখানে n যুগ্ম সংখ্যা।

8. n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইলে, এবং $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতির সহগসমূহের গুণফল P_n দ্বারা সূচিত হইলে, প্রমাণ কর :

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{(n+1)^n}{\lfloor n}.$$ **[Joint Ent. Ex. 1970]**

9. n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং $a_0, a_1, a_2 \dots \quad \dots a_n$ যথাক্রমে $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতির সহগ হইলে, দেখাও যে,

$$(a_0 - a_2 + a_4 - \cdots)^2 + (a_1 - a_3 + a_5 - \cdots)^2 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

10. n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে অযুগ্ম পদসমূহের সমষ্টি A এবং যুগ্ম পদসমূহের সমষ্টি B হইলে, দেখাও যে,

(i) $A^2 - B^2 = (a^2 - x^2)^n$; (ii) $4AB = (a+x)^{2n} - (a-x)^{2n}$.

11. $(1+x+x^2)^n = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_{2n} x^{2n}$ হইলে, প্রমাণ কর :

(i) $p_0 + p_1 + p_2 + \cdots + p_{2n} = 3^n$;

(ii) $p_0 + p_3 + p_6 + \cdots \quad = p_1 + p_4 + p_7 + \dots$

$= p_2 + p_5 + p_8 + \dots\dots = 3^{n-1}$.

12. $(1 - 3x + 2x^2)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{2n} x^{2n}$ হইলে, দেখাও যে,

(i) $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n} = 0$;

(ii) $a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + a_{2n} = 6^n$.

13. $(1+x)^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots \quad \cdots + C_n x^n$ হইলে, মান বাহির কর :

(i) $1^2.C_1{}^2 + 2^2.C_2{}^2 + 3^2.C_3{}^2 + \cdots \quad \cdots + n^2.C_n{}^2$;

(ii) $1^3.C_1{}^2 + 2^3.C_2{}^2 + 3^3.C_3{}^2 + \cdots \quad \cdots + n^3.C_n{}^2$;

(iii) $(\frac{1}{2}C_1)^2 + (\frac{1}{3}C_2)^2 + (\frac{1}{4}C_3)^2 + \cdots \quad \cdots + \left(\frac{C_n}{n+1}\right)^2$.

নবম অধ্যায়

অসীম শ্রেণী

(Infinite Series)

9-1. উপস্থাপন।

[1] কতকগুলি নির্দিষ্ট রাশি,

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots \quad \dots$$

যদি এইরূপ হয় যে, কোন নির্দিষ্ট নিয়মে, একটির পর একটি উহাদের যে কোন রাশি জানা যায়, তাহা হইলে, ঐ রাশিগুলি ঐ নির্দিষ্ট নিয়মে একটি **শ্রেণী** (*Series*) গঠন করিয়াছে বলা হয় এবং এই শ্রেণীটিকে

$$a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots \quad \cdots+a_n+\cdots \quad \cdots$$

এইভাবে লেখা হয়। এখানে, a_1, a_2, a_3, a_4,......, ইত্যাদি, ঐ শ্রেণীর এক একটি **পদ** (*Term*) ; $a_n = n$-তম পদ।

উদাহরণস্বরূপ,

$$(i) \quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots \quad \dots;$$

$$(ii) \quad 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\dots \quad \dots;$$

$$(iii) \quad 1+2+3+4+\dots \quad \dots;$$

$$(iv) \quad 1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+ \dots \quad \dots;$$

$$(v) \quad \cdot 5+\cdot 05+\cdot 005+\dots \quad \dots;$$

এর প্রত্যেকটি এক একটি শ্রেণী।

[2] কোন একটি শ্রেণীর পদ সংখ্যা নির্দিষ্ট, অর্থাৎ সসীম (*Finite*), অথবা, অসংখ্য অর্থাৎ অসীম (*Infinite*) হইতে পারে। যে শ্রেণীর পদ সংখ্যা নির্দিষ্ট, তাহাকে **সসীম শ্রেণী** (*Finite Series*) এবং যে শ্রেণীর পদ সংখ্যা অসংখ্য, তাহাকে **অসীম শ্রেণী** (*Infinite Series*) বলা হয়।

সসীম শ্রেণীর পদ সংখ্যা নির্দিষ্ট বলিয়া, উহার পদগুলিকে প্রথম হইতে পরপর যোগ করিয়া গেলেই ঐ শ্রেণীর যোগফল অতি সহজেই পাওয়া যাইবে। কিন্তু, অসীম শ্রেণীর পদ সংখ্যা অসংখ্য বলিয়া, প্রথম হইতে পরপর যোগ করিয়া গেলে ঐ যোগ

প্রক্রিয়া কখনই শেষ হইবে না ; সেইজন্য, সাধারণ যোগ প্রক্রিয়ার মাধ্যমে অসীম শ্রেণীর যোগফল বাহির করা যাইবে না।

দ্রষ্টব্য : $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ ...শ্রেণীটির পদ সংখ্যা অসংখ্য হইলে, উহাকে "$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$ ...অসীম পদ পর্য্যন্ত" লেখা হইয়া থাকে।

(*i*) $1+2+3+4+5+6+7$ শ্রেণীটির পদ সংখ্যা 7 ; সুতরাং উহা একটি সসীম শ্রেণী।

উহার যোগফল S হইলে,

$$S = 1+2+3+4+5+6+7$$
$$= 3+3+4+5+6+7$$
$$= 6+4+5+6+7 = 10+5+6+7$$
$$= 15+6+7 = 21+7 = 28.$$

এইভাবে যে কোন সসীম শ্রেণীর যোগফল নির্ণয় করা যাইতে পারে। তাহা ছাড়া কোন সসীম শ্রেণী একটি সমান্তরীয় শ্রেণী অথবা গুণোত্তরীয় সসীম শ্রেণী হইলে, পূর্বে আলোচিত পদ্ধতি দ্বারা উহার যোগফল বাহির করা যাইতে পারে।

(*ii*) "$1+2+3+4+\cdots$ ...অসীম পদ পর্য্যন্ত" এই অসীম শ্রেণীর যোগফল পূর্ব পদ্ধতি অনুসারে নির্ণয় করা যাইবে না।

এইরূপ ক্ষেত্রে, প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টিকে S_n দ্বারা সূচিত করিলে,

$$S_n = 1+2+3\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

তাহা হইলে, $S_1 = 1$; $S_2 = 3$; $S_3 = 6$; $S_4 = 10$; ইত্যাদি। এখানে, n এর মান যতই বাড়িতে থাকিবে, S_n এর মান ততই বাড়িতে থাকিবে। সুতরাং এই অসীম শ্রেণীর যোগফল যে কোন বৃহৎ সংখ্যার চেয়ে বৃহত্তর হইতে থাকিবে।

আবার,

$$\text{“}1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots \quad \ldots\text{অসীম পদ পর্যন্ত”}$$

এই অসীম শ্রেণীর জন্য প্রথম হইতে পরপর যোগ করিয়া অগ্রসর হইলে উহার যোগফল নির্ণয় করা যাইবে না।

দ্রষ্টব্য : এখানে, $S_n \equiv n$-তম পদ পর্যন্ত যোগফল $= \dfrac{1\{1-(\frac{1}{2})^n\}}{1-(\frac{1}{2})}$; শ্রেণীটি গুণোত্তরীয় বলিয়া। $\therefore \quad S_n = 2\{1 - 1/2^n\} \to 2$, যেখানে $n \to \infty$.

9-2. অসীম শ্রেণীর যোগফল নির্ণয় পদ্ধতি।

যদি কোন রাশি 'n',

"1, 2, 3, 4,··· ···অসীম পদ পর্যন্ত", সংখ্যাগুলির যে কোনটিকে সূচিত করে, এবং প্রথম হইতে উহাদের একটির পর একটি মান লইয়া ক্রমশঃ অগ্রসর হইতে থাকে, তাহা হইলে, n **অনন্তের দিকে** (*Towards infinity*) অগ্রসর হইতেছে বুঝা যায় ; এবং তখন ইহাকে সংক্ষেপে $n \to \infty$ এইরূপে প্রকাশ করা হইয়া থাকে।

মনে করি.

$$\text{“}a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \quad \ldots \text{অসীম পদ পর্যন্ত”},$$

এই অসীম শ্রেণীর প্রথম n সংখ্যক পদের যোগফল S_n দ্বারা সূচিত। তাহা হইলে,

$$S_1 = a_1\ ;\ S_2 = (a_1 + a_2)\ ;\ S_3 = (a_1 + a_2 + a_3)\ ;\ \text{ইত্যাদি।}$$

$$S_n = (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \quad \cdots + a_n).$$

এখন, n এর মান অনন্তের দিকে অগ্রসর হইতে থাকিলে, অর্থাৎ $n \to \infty$ হইলে, S_n এর মান যদি একটি নির্দিষ্ট সসীম রাশি S এর দিকে অগ্রসর হয়, তাহা হইলে, S কে S_n এর **সীমাস্থ মান** (*Limiting value*) বলা হয় ; এবং ইহাকে সংক্ষেপে $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$ লেখা হয়। তাহা হইলে, তখন

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \quad \ldots \text{অসীম পদ পর্যন্ত} = S\ ;$$

এইরূপক্ষেত্রে,

$$\text{“}a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \quad \ldots \text{অসীম পদ পর্য্যন্ত”},$$

এই অসীম শ্রেণীর যোগফল S বলা হয়।

মন্তব্য ঃ

অভিসারী শ্রেণী এবং **অপসারী শ্রেণী ঃ**

$$\text{“}a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \quad \ldots \text{ অসীম পদ পর্য্যন্ত”},$$

একটি অসীম শ্রেণী, এবং

$$S_n = (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \quad \cdots + a_n).$$

যদি $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$ হয়, যেখানে S একটি নির্দিষ্ট সসীম রাশি, তাহা হইলে, ঐ শ্রেণীটিকে **অভিসারী শ্রেণী** (*Convergent series*) বলা হইবে।

কিন্তু, যদি S_n এর মান ক্রমশঃ বাড়িতে থাকে এবং যে কোন বৃহৎ ধনাত্মক রাশির চেয়ে বৃহত্তর হইতে থাকে ; অথবা ক্রমশঃ কমিতে থাকে এবং যে কোন ঋণাত্মক সাংখ্যমানে বৃহৎ রাশির চেয়ে ক্ষুদ্রতর হইতে থাকে, তখন, ঐ শ্রেণীটিকে **অপসারী** (*Divergent*) শ্রেণী বলা হয়।

কোন অসীম শ্রেণী অভিসারী অথবা অপসারী না হইলে তাহাকে **দোলায়মান শ্রেণী** (*Oscillatory series*) বলা হয়।

উদাহরণস্বরূপ :

$$(i)\quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\quad\cdots \text{ অসীম পদ পর্য্যন্ত।}$$

এখানে, $S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\quad\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$

যাহা একটি গুণোত্তরীয় শ্রেণী।

$$\therefore\quad S_n = \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

যখন $n\to\infty$, $2^n\to\infty$; সুতরাং, $\frac{1}{2^n}\to 0$;

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty} S_n = 2(1-0) = 2.$

তাহা হইলে শ্রেণীটি **অভিসারী** এবং ইহার যোগফল $=2$.

$(i)\quad 1+2+3+4+\cdots\quad\cdots$ অসীম পদ পর্য্যন্ত।

এখানে, $S_n = 1+2+3+\cdots\quad\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$.

তাহা হইলে, শ্রেণীটি **অপসারী**।

$(iii)\quad 1-1+1-1+1-1+\cdots\quad\cdots$ অসীম পদ পর্য্যন্ত।

শ্রেণীটি **দোলায় মান** ; কারণ, $S_{2m+1} = +1$; $S_{2m+2} = 0$, যেখানে, $m=0$ (শূন্য), অথবা, ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

মন্তব্য :

[1] $a>1$ হইলে, n যখন 1, 2, 3, 4,$\cdots\quad\cdots$ইত্যাদি সংখ্যাগুলি মান হিসাবে লইয়া ক্রমশঃ অগ্রসর হইতে থাকিবে, $a^n\to\infty$ হইবে ; অর্থাৎ $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$; $(a>1)$.

[2] $-1<a<1$ হইলে, a^n এর মান ক্রমশঃ 0 (শূন্য) এর দিকে অগ্রসর হইতে থাকিবে ; এবং যখন $n\to\infty$ হইবে, তখন $a^n\to 0$;

অর্থাৎ, $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$; $(-1<a<1)$.

[3] $a < -1$ হইলে,

(i) $\lim_{m\to\infty,} a^{2m} \to \infty$; (ii) $\lim_{m\to\infty,} a^{2m+1} \to -\infty$,

যেখানে m = ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

উদাহরণস্বরূপ,

(i) $\lim_{n\to\infty,} 2^n = \infty$; (ii) $\lim_{n\to\infty,} (\frac{5}{4})^n = \infty$;

(iii) $\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{2})^n = 0$; (iv) $\lim_{n\to\infty} (\frac{4}{5})^n = 0$;

(v) $\lim_{n\to\infty} (-\frac{1}{3})^n = 0$; (vi) $\lim_{n\to\infty} (-\frac{3}{7})^n = 0$.

উদাহরণ 1. যোগফল নির্ণয় কর :

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots \quad \dots \text{অসীম পদ পর্য্যন্ত।}$$

এখানে,

$$S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots \quad \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots\dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}\,.$$

যেহেতু, $(n+1) \to \infty$, যখন $n \to \infty$,

$\therefore \quad \frac{1}{n+1} \to 0$, যখন $n \to \infty$.

$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} S_n = 1$.

সুতরাং, নির্ণেয় যোগফল = 1.

9-3. অসীম গুণোত্তর শ্রেণীর যোগফল নির্ণয়।

মনে করি, কোন একটি অসীম গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদ a (>0) এবং সাধারণ অনুপাত r. তাহা হইলে, ঐ শ্রেণীটি :

$$a + ar + ar^2 + \dots\dots + ar^{n-1} + \dots\dots \text{অসীম পদ পর্য্যন্ত।}$$

মনে করি, $S_n = a + ar + ar^2 + \dots\dots + ar^{n-1}$.

$$\therefore \quad S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, \text{ যদি } r \neq 1.$$

(i) যদি, $-1<r<1$ হয়, তাহা হইলে, r^n এর মান শূন্যের দিকে যাইবে, যখন n এর মান অনন্তের দিকে অগ্রসর হইবে; অর্থাৎ, $r^n \to 0$, যখন $n \to \infty$.

সুতরাং, $-1<r<1$ হইলে,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a(1-0)}{1-r} = \frac{a}{1-r}.$$

তাহা হইলে, $-1<r<1$ হইলে,

$$\boldsymbol{a+ar+ar^2+\ldots \quad \ldots \text{অসীম পদ পর্য্যন্ত} = \frac{a}{1-r}}.$$

(ii) $r=1$ হইলে,

$S_n = a+a+a+\ldots \quad \ldots n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত $= a \times n$.

এইরূপক্ষেত্রে, $S_n \to \infty$, যখন $n \to \infty$; $\quad (\because \ a>0)$.

সুতরাং, $r=1$, $a>0$ হইলে,

$a+ar+ar^2+\cdots \quad \cdots$অসীমপদ পর্য্যন্ত$\to +\infty$.

(iii) $r>1$ হইলে,

$S_n = a+ar+ar^2+\ldots \quad .. +ar^{n-1}$

$>a+a+a+\cdots \quad \cdots n$ সংখ্যক পদ পর্য্যন্ত;

অর্থাৎ, $S_n > na$; $a>0$.

$\therefore \ S_n \to \infty$, যখন $n \to \infty$.

সুতরাং, $a>0, r>1$ হইলে,

$a+ar+ar^2+\ldots \quad \ldots$অসীমপদ পর্য্যন্ত$\to +\infty$.

(iv) $r=-1$ হইলে,

$a+ar+ar^2+\ldots \quad \ldots$ অসীম পদ পর্য্যন্ত

$=a-a+a-a+\ldots\ldots\ldots$

$=0$, অথবা, a; যখন পদসংখ্যা যুগ্ম, অথবা, অযুগ্ম।

এইরূপক্ষেত্রে, শ্রেণীটি সসীমভাবে দোলায়মান।

(v) $r<-1$ হইলে, $S_n \to \pm\infty$, যখন $n \to \infty$ হইবে।

এইরূপক্ষেত্রে শ্রেণীটি **অসীমভাবে দোলায়মান** (*Infinitely Oscillatory*).

সুতরাং, দেখা যাইতেছে যে, কেবলমাত্র $-1<r<1$ হইলে,

"$a+ar+ar^2+\ldots \quad \ldots$অসীমপদ পর্য্যন্ত",

এই অসীম গুণোত্তর শ্রেণীর মান একটি নির্দিষ্ট সসীম রাশি হইবে, এবং তাহার মান $\frac{a}{1-r}$. অর্থাৎ,

$$a+ar+ar^2+\cdots\quad\cdots\text{to }\infty=\frac{a}{1-r}\;;\quad(-1<r<1).$$

উদাহরণ 1. যোগফল নির্ণয় কর :

(i) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots\quad\ldots\text{to }\infty.$

(ii) $\frac{2}{5}+\frac{3}{5^2}+\frac{2}{5^3}+\frac{3}{5^4}+\ldots\quad\ldots\text{to }\infty.$

(i) ইহা একটি গুণোত্তর শ্রেণী ;

এখানে, $a=1$; $r=\frac{1}{3}$.

$\therefore$ নির্ণেয় যোগফল $=\frac{a}{1-r}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$.

(ii) প্রদত্ত শ্রেণী

$$=\left(\frac{2}{5}+\frac{2}{5^3}+\frac{2}{5^5}+\ldots\ \ldots\text{to }\infty\right)+\left(\frac{3}{5^2}+\frac{3}{5^4}+\frac{3}{5^6}+\ldots\ \ldots\text{to }\infty\right)$$

$$=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{5^2}}+\frac{\frac{3}{5^2}}{1-\frac{1}{5^2}}=\frac{2}{5}\times\frac{25}{24}+\frac{3}{25}\times\frac{25}{24}$$

$$=\frac{5}{12}+\frac{1}{8}=\frac{13}{24}.$$

উদাহরণ 2. আবৃত্ত দশমিক $\cdot4\dot{7}$ কে একটি অসীম গুণোত্তর শ্রেণীতে প্রকাশ করিয়া ইহার মান বাহির কর।

$$\cdot4\dot{7}=\cdot47777\ \ldots\ \ldots\qquad\text{to }\infty$$

$$=\cdot4+\cdot07+\cdot007+\cdot0007+\ldots\quad\ldots\text{ to }\infty$$

$$=\frac{4}{10}+\frac{7}{100}+\frac{7}{1000}+\frac{7}{10000}+\ldots\quad\ldots\text{to }\infty$$

$$=\frac{4}{10}+\frac{7}{100}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\ldots\quad\ldots\text{to }\infty\right)$$

$$=\frac{4}{10}+\frac{7}{100}\times\frac{1}{1-\frac{1}{10}}$$

$$=\frac{4}{10}+\frac{7}{90}=\frac{43}{90}.$$

দ্রষ্টব্য : এখানে, $0\cdot4\dot{7}=\frac{43}{90}=\frac{47-4}{90}$.

প্রশ্নমালা 30

1. নিম্নলিখিত শ্রেণীসমূহের অসীম পদ পর্যন্ত যোগফল বাহির কর :

(i) $1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\cdots \quad \cdots$

(ii) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\ldots \quad \ldots$

(iii) $3-1\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{3}{8}+\ldots \quad \ldots$

(iv) $\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{2}}+\ldots \quad \ldots$

(v) $\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{9\sqrt{3}}-\ \cdots \quad \cdots$

(vi) $3-2+\frac{4}{3}-\frac{8}{9}+\ldots \quad \ldots$

(vii) $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{64}+\cdots \quad \cdots$

(viii) $\cdot 5+\cdot 05+\cdot 005+\cdot 0005+\ \cdots \quad \cdots$

(ix) $\cdot 3-\cdot 03+\cdot 003-\cdot 0003+\ldots \quad \ldots$

(x) $\cdot 6-\cdot 12+\cdot 024-\cdot 0048+\ldots \quad \ldots$

(xi) $48-36+27-20\frac{1}{4}+\ldots \quad \ldots$

(xii) $(\sqrt{2}+1)+1+(\sqrt{2}-1)+(3-2\sqrt{2})+\ldots \quad \ldots$

(xiii) $(2+\sqrt{3})+1+(2-\sqrt{3})+(7-4\sqrt{3})+\ldots \quad \ldots$

(xiv) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{8}-\frac{1}{27}+\ldots \quad \ldots$

(xv) $1-\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}-\frac{2}{3^3}+\frac{2^2}{3^4}-\frac{2}{3^5}+\frac{2^3}{3^6}-\ldots \quad \ldots$

(xvi) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}-1+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}-\frac{4-2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}+\ldots \quad \ldots$

(xvii) $a-ar+ar^2-ar^3+\ldots \ \ldots\ ;\ (0<r<1)$

(xviii) $1+2x+4x^2+8x^3+\ldots \ \ldots\ ;\ (0<x<\frac{1}{2})$

(xix) $(a-x)+(a^2-x^2)+(a^3-x^3)+(a^4-x^4)+\ldots \ \ldots\ (0<a,\ x<1)$

(xx) $(a^2-b^2)+(a-b)+\frac{a-b}{a+b}+\ldots \ \ldots\ (a+b>1)$

(xxi) $8{\cdot}8 - {\cdot}88 + {\cdot}088 - {\cdot}0088 + - \cdots \quad \cdots$

$(xxii)$ $6{\cdot}3 - {\cdot}315 + {\cdot}01575 - {\cdot}0007875 + \cdots \quad \cdots$

$(xxiii)$ $\sqrt{2} - (2 - \sqrt{2}) + (3\sqrt{2} - 4) - (10 - 7\sqrt{2}) + (17\sqrt{2} - 24) - \cdots$

2. আবৃত্ত দশমিক $0{\cdot}\dot{9}$ কে একটি অসীম গুণোত্তর শ্রেণীরূপে দেখাও এবং ইহার যোগফলকে ব্যবহার করিয়া $0{\cdot}\dot{9}$ এর মূল মান নির্ণয় কর।

[**Joint Ent. Ex. 1973 ; H. S. 1973**]

3. দেখাও যে, $0{\cdot}1\dot{6}$ দশমিকটি একটি অসীম গুণোত্তর শ্রেণীর সমান। এই গুণোত্তর শ্রেণীর যোগফল থেকে দশমিক রাশিটির মান বাহির কর।

4. নিম্নলিখিত আবৃত্ত দশমিকগুলিকে অসীম গুণোত্তর শ্রেণীতে প্রকাশ করিয়া উহাদের মান বাহির কর :

(i) ${\cdot}2\dot{7}$; (ii) ${\cdot}\dot{2}\dot{7}$; (iii) ${\cdot}52\dot{7}$; (iv) ${\cdot}\dot{2}9\dot{6}$; (v) ${\cdot}1\dot{3}\dot{6}$.

5. দেখাও যে,

$a^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{1}{4}}.a^{\frac{1}{8}}$......অসীম সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত $= a$.

6. অসীম গুণোত্তর শ্রেণীর যোগফল নির্ণয় পদ্ধতি দ্বারা দেখাও যে,

$$\sqrt{0{\cdot}\dot{4}} = 0{\cdot}\dot{6}.$$

7. অসীম সংখ্যক পদ পর্যন্ত যোগফল নির্ণয় কর :

$$(i) \quad 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{4}{3^3} + \frac{5}{3^4} + \frac{2}{3^4} + \cdots \qquad \cdots$$

$$(ii) \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{4^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{5}{4^4} - \frac{3}{2^9} + \cdots \qquad \cdots$$

$$(iii) \quad \frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.8} + \frac{1}{8.11} + \frac{1}{11.14} + \cdots \qquad \cdots$$

$$(iv) \quad \frac{1}{2.5.8} + \frac{2}{5.8.11} + \frac{3}{8.11.14} + \frac{4}{11.14.17} + \cdots \qquad \cdots$$

$$(v) \quad 1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{2^2} - \frac{7}{2^3} + \frac{9}{2^4} - \cdots \qquad \cdots$$

9-4. ভগ্নাংশ ও ঋণাত্মক সূচক বিশিষ্ট দ্বিপদ উপপাদ্য।

বিবৃতি (Statement) :

n এর মান ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা অথবা যে কোন ভগ্নাংশ হইলে $(1+x)^n$ কে x এর ঘাতের ঊর্ধ্বক্রমে একটি শ্রেণীতে বিস্তৃত করা যাইবে এবং ইহার পদ সংখ্যা অসীম হইবে, যদি $-1<x<1$ হয়, এবং তাহা :

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}x^3+\dots\quad\dots$$
$$\dots\quad\dots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}x^r+\cdots\text{to}\propto.$$

এই বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদ, অর্থাৎ, সাধারণ পদ t_{r+1} দ্বারা সূচিত হইলে,

$$t_{r+1}=\{(r+1)\text{-তম পদ}\}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}x^r.$$

[প্রমাণটি পাঠ্যসূচীর বহির্ভূত বলিয়া এখানে উহা দেওয়া সম্ভব হইল না।]

মন্তব্য : বিপরীতক্রমে বলা যাইতে পারে, $-1<x<1$ হইলে, n এর যে কোন মানের জন্য, ($n\neq$ ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা) :

$$1+nx+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}x^3+\cdots\text{to}\propto=(1+x)^n.$$

9-5. কতিপয় প্রয়োজনীয় সিদ্ধান্ত :

যদি $-1<x<1$ হয়, তাহা হইলে,

(a) ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা ভিন্ন n এর অপর যে কোন মানের জন্য,

(1) $(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}x^3+\dots\text{to}\propto$

(2) $(1-x)^n=1-nx+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}x^3+\dots\text{to}\propto.$

(b) ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা ভিন্ন nএর অপর যে কোন মানের জন্য,

(1) $(1+x)^{-n}=1-nx+\frac{n(n+1)}{\lfloor 2}x^2-\frac{n(n+1)(n+2)}{\lfloor 2}x^3+\dots\text{to}\propto.$

(2) $(1-x)^{-n}=1+nx+\frac{n(n+1)}{\lfloor 2}x^2+\frac{n(n+1)(n+2)}{\lfloor 3}x^3+\cdots\text{to}\propto$

মন্তব্য : $|x|<1$ হইলে, ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা ভিন্ন n এর অপর যে কোন মানের জন্য $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতির বৃহত্তম পদ নির্ণয় পদ্ধতি m এর মান ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হইলে $(1+x)^m$ এর বৃহত্তম পদ নির্ণয় পদ্ধতির অনুরূপ।

বিশেষ দ্রষ্টব্য :

$-1<x<1$ হইলে,

(1) $(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+\ldots \quad \ldots \quad \text{to } \infty$

(2) $(1-x)^{-1}=1+x+x^2+x^3+\ldots \quad \ldots \quad \text{to } \infty$

(3) $(1+x)^{-2}=1-2x+3x^2-4x^3+\ldots \quad \ldots \text{ to } \infty$

(4) $(1-x)^{-2}=1+2x+3x^3+4x^3+\ldots \quad \ldots \text{ to } \infty$

(5) $(1+x)^{-3}=1-3x+6x^2-10x^3+\ldots \quad \ldots\text{to } \infty$

(6) $(1-x)^{-3}=1+3x+6x^2+10x^3+\ldots \quad \ldots\text{to } \infty$

(7) $(1-x^2)^{-1/2}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^6+\ldots\text{to } \infty$

মন্তব্য : ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা ভিন্ন n এর অপর যে কোন মানের জন্য,

(*i*) যদি $a^2>x^2$ হয়, তাহা হইলে,

$$(a+x)^n=\left\{a\left(1+\frac{x}{a}\right)\right\}^n=a^n\left(1+\frac{x}{a}\right)^n$$

$$=a^n\left[1+n.\frac{x}{a}+\frac{n(n-1)}{\lfloor\underline{2}}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\ldots \quad \ldots\text{to } \infty\right]$$

$$=a^n+na^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{\lfloor\underline{2}}a^{n-2}x^2+\ldots \quad \ldots\text{to } \infty$$

(*ii*) যদি $a^2<x^2$ হয়, তাহা হইলে,

$$(a+x)^n=\left\{x\left(1+\frac{a}{x}\right)\right\}^n=x^n\left(1+\frac{a}{x}\right)^n$$

$$=x^n\left[1+n.\frac{a}{x}+\frac{n(n-1)}{\lfloor\underline{2}}.\left(\frac{a}{x}\right)^2+\ldots \quad \ldots\text{to } \infty\right]$$

$$=x^n+nx^{n-1}a+\frac{n(n-1)}{\lfloor\underline{2}}x^{n-2}a^2+\ldots \quad \ldots\text{to } \infty$$

সুতরাং, $x^2>1$ হইলে,

$$(1+x)^n=\left\{x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right\}^n=x^n\left(1+\frac{1}{x}\right)^n$$

$$=x^n\left[1+n\cdot\frac{1}{x}+\frac{n(n-1)}{\lfloor\underline{2}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^2+\ldots \quad \ldots\text{to } \infty\right]$$

$$=x^n+nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{\lfloor\underline{2}}x^{n-2}+\ldots \quad \ldots\text{to } \infty.$$

উদাহরণ 1. চতুর্থ পদ পর্যন্ত বিস্তৃত কর :

(i) $(1+x)^{\frac{1}{2}}$; (ii) $\sqrt[3]{1-x^2}$; (iii) $\left(1-\frac{2x}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}$, যেখানে, $-1<x<1$.

(i) $$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\tfrac{1}{2}.x+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{\lfloor 2}x^2+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{\lfloor 3}x^3+\cdots \text{ to } \infty$$

$$=1+\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{8}x^2+\tfrac{1}{16}x^3-\cdots\text{to } \infty.$$

(ii) $$\sqrt[3]{1-x^2}=(1-x^2)^{\frac{1}{3}}$$

$$=1-\tfrac{1}{3}x^2+\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{\lfloor 2}x^4-\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)}{\lfloor 3}x^6+\cdots \quad \cdots\text{to } \infty$$

$$=1-\tfrac{1}{3}x^2-\tfrac{1}{9}x^4-\tfrac{5}{81}x^6-\cdots \quad \cdots\text{to } \infty$$

(iii) $$\left(1-\frac{2x}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$=1+\frac{3}{2}\cdot\frac{2x}{3}+\frac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}+1)}{\lfloor 2}\cdot\left(\frac{2x}{3}\right)^2+\frac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}+1)(\frac{3}{2}+2)}{\lfloor 3}\left(\frac{2x}{3}\right)^3+\cdots \quad \cdots\text{to } \infty$$

$$=1+x+\tfrac{5}{6}x^2+\tfrac{35}{54}x^3+\ldots\text{to } \infty.$$

উদাহরণ 2. $-1<x<1$ হইলে, $\left(1-\frac{x}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদটি বাহির কর।

নির্ণেয় $(r+1)$-তম পদ

$$=\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)\ldots(-\frac{1}{2}-r+1)}{\lfloor r}\left(-\frac{x}{3}\right)^r$$

$$=(-1)^r\cdot\frac{1.3.5\ldots(2r-1)}{2^r\lfloor r}\cdot(-1)^r\cdot\frac{x^r}{3^r}$$

$$=\frac{1.3.5\cdots(2r-1)}{2^r.3^r\lfloor r}x^r.$$

উদাহরণ 3. $(1+x)(1-x)^{-3}$ এর বিস্তৃতির x^{10} এর সহগ নির্ণয় কর, যদি $0<x<1$ হয়।

$$(1+x)(1-x)^{-3}$$

$$=(1+x)(1+3x+6x^2+10x^3+\ldots+55x^9+66x^{10}+\ldots\text{to } \infty)$$

$\therefore$ x^{10} এর সহগ $=55+66=121.$

উদাহরণ 4. $|x|<1$ হইলে,

$(1+3x+6x^2+10x^3+\dots\text{to }\infty)^{\frac{4}{3}}$ এর বিস্তৃতির x^r সহগ নির্ণয় কর।

এখানে, $(1+3x+6x^2+10x^3+\dots\text{to }\infty)^{\frac{4}{3}}$

$$=\{(1-x)^{-3}\}^{\frac{4}{3}}=(1-x)^{-4}$$

$$=1+4x+10x^2+\cdots\quad\cdots\text{to }\infty$$

∴ নির্ণেয় সহগ

$$=\frac{-4(-4-1)(-4-2)\dots(-4-r+1)}{\lfloor r}(-1)^r$$

$$=(-1)^r.\frac{4.5.6.7.\dots(r+3)}{\lfloor r}(-1)^r$$

$$=(-1)^{2r}.\frac{4.5.6.7.\dots r(r+1)(r+2)(r+3)}{1.2.3.4.\;(r-1)r.}$$

$$=\frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{1.2.3.}.$$

উদাহরণ 5. $|x|<|a|$ হইলে,

$\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{1}{2}}$ কে x এর ঘাতের উর্ধ্বক্রমে বিস্তৃত কর।

$$\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{a\left(1+\frac{x}{a}\right)}{a\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\left(1+\frac{x}{a}\right)\left\{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{a^2}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^4}{a^4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^6}{a^6}+\cdots\text{to }\infty\right\}$$

$$=1+\frac{x}{a}+\frac{1}{2}\;\frac{x^2}{a^2}+\frac{1}{2}\frac{x^3}{a^3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^4}{a^4}+\cdots\text{to }\infty$$

উদাহরণ 6. $0<x<1$ হইলে, $(1+x)^{\frac{10}{3}}$ এর বিস্তৃতির প্রথম ঋণাত্মক পদটি বাহির কর।

এখন, $(1+x)^{\frac{10}{3}}$ বিস্তৃতির r-তম পদটি T_r দ্বারা সূচিত হইলে,

$$\frac{T_{r+1}}{T_r}=\frac{n-r+1}{r}\times x=\frac{\frac{10}{3}-r+1}{r}.x=\frac{(\frac{13}{3}-r)x}{r}$$

সুতরাং, T_{r+1} পদটি প্রথম ঋণাত্মক পদ হইবে যদি $\frac{13}{3}<r$ হয়, অর্থাৎ, যদি $r>4\frac{1}{3}$ হয় ; অর্থাৎ, $r=5$ হইলে।

সুতরাং, ষষ্ঠ পদটি প্রথম ঋণাত্মক পদ।

$$\therefore \text{ ষষ্ঠ পদ} = \frac{\frac{10}{3}(\frac{10}{3}-1)(\frac{10}{3}-2)(\frac{10}{3}-3)(\frac{10}{3}-4)}{\lfloor 5}x^5$$

$$= -\frac{14x^5}{729}.$$

উদাহরণ 7. $x=\frac{3}{4}$ হইল $(1-x)^{-3}$ এর বিস্তৃতির বৃহত্তম পদটি নির্ণয় কর।

এখন, $(1-x)^{-3}$ এর বিস্তৃতির r-তম পদটি T_r দ্বারা সূচিত হইলে,

$$\frac{T_{r+1}}{T_r} = \frac{n-r+1}{r}(-x)$$

$$= \frac{-3-r+1}{r}\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3r+6}{4r}$$

$\therefore \; T_{r+1} >, \; =, \text{ বা}, \; < T_r,$

যদি, $\frac{3r+6}{4r} >, \; =, \text{ বা}, \; < 1$ হয় ;

অর্থাৎ, যদি $r <, \; =, \text{ বা}, \; > 6$ হয়।

সুতরাং, ষষ্ঠ এবং সপ্তম পদ দুইটি সমান এবং তাহারা বৃহত্তম পদ।

$$\text{ষষ্ঠ পদ} = \frac{(-3)(-3-1)(-3-2)(-3-3)(-3-4)}{\lfloor 5} \times \left(-\frac{3}{4}\right)^5$$

$$= \frac{5103}{1024}.$$

উদাহরণ 8. দ্বিপদ উপপাদ্যের সাহায্যে $\sqrt{2}$ এর মান আসন্ন চার দশমিক স্থান পর্যন্ত বাহির কর।

$$\sqrt{2} = \sqrt{\left(\frac{49}{25} \times \frac{50}{49}\right)} = \frac{7}{5}\left(1-\frac{1}{50}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{7}{5}\left[1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{50} + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1.2}\left(\frac{1}{50}\right)^2 + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{1.2.3}\left(\frac{1}{50}\right)^3 + \dots\dots\right]$$

$$= \frac{7}{5}\left[1 + \frac{1}{100} + \frac{3}{20000} + \frac{1}{400000} + \dots\dots\right]$$

$$= 1{\cdot}4 \times [1 + {\cdot}01 + {\cdot}00015 + {\cdot}0000025 + \dots\dots]$$

$$= 1{\cdot}4 \times 1{\cdot}0101525\dots\dots$$

$$= 1{\cdot}41421350\dots$$

$= 1{\cdot}4142$ (আসন্ন চার দশমিক স্থান পর্যন্ত).

উদাহরণ 9. দ্বিপদ উপপাদ্যের সাহায্যে $\frac{1}{(\cdot998)^8}$ এর মান আসন্ন পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

$$\frac{1}{(\cdot998)^8}=(\cdot998)^{-8}=(1-\cdot002)^{-8}$$

$$=1+8(\cdot002)+\frac{8.9}{1.2}(\cdot002)^2+\frac{8.9.10}{1.2.3}(\cdot002)^3+\cdots$$

$$=1+8\times(\cdot002)+36\times(\cdot000004)+120\times(\cdot000000008)+\ldots$$

$$=1+\cdot016+\cdot000144+\cdot00000096+\ldots$$

$$=1\cdot016,144,96\ldots$$

$=1\cdot01614$ (আসন্ন পাঁচ দশমিক স্থান পর্য্যন্ত)

উদাহরণ 10. দেখাও যে,

$$\sqrt{8}=1+\frac{3}{4}+\frac{3.5}{4.8}+\frac{3.5.7}{4.8.12}+\ldots\text{ to }\infty$$

$$\sqrt{8}=(2^3)^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{2}}=(1-\tfrac{1}{2})^{-\frac{3}{2}}$$

$$=1+\frac{3}{2}.\frac{1}{2}+\frac{\frac{3}{2}.(\frac{3}{2}+1)}{\underline{|2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$+\frac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}+1)(\frac{3}{2}+2)}{\underline{|3}}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots\ldots$$

$$=1+\frac{3}{4}+\frac{3.5}{4.8}+\frac{3.5.7}{4.8.12}+\cdots\cdots\text{to }\infty.$$

উদাহরণ 11. সরল কর :—

$$1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{2^2}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{1}{2^4}-\cdots\text{to }\infty.$$

প্রদত্ত শ্রেণী

$$=1-\frac{1}{2}\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}}{\underline{|2}}\cdot\frac{1}{2^2}-\frac{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}}{\underline{|3}}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}.\frac{7}{2}}{\underline{|4}}\cdot\frac{1}{2^4}-\ldots\ldots$$

$$=(1+\tfrac{1}{2})^{-\frac{1}{2}}=(\tfrac{3}{2})^{-\frac{1}{2}}=(\tfrac{2}{3})^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

উদাহরণ 12. দেখাও যে,

$$\frac{1}{4}+\frac{1.3}{4.6}+\frac{1.3.5}{4.6.8}+\cdots\cdots \text{to } \infty=1$$

বামপক্ষের শ্রেণীর যোগফল S হইলে,

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ S=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1.3}{4.6}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1.3.5}{4.6.8}-\cdots\cdots$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}.(\frac{1}{2}-1)}{1.2}-\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{1.2.3}$$

$$+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)}{1.2.3.4}-\cdots\cdots$$

$$=(1-1)^{\frac{1}{2}}=0.$$

$$\therefore\ \tfrac{1}{2}S=\tfrac{1}{2}\qquad \therefore\ S=1.$$

উদাহরণ 13. দেখাও যে,

$$(1-x)^{-\frac{p}{q}}=1+\frac{p}{q}.\,x+\frac{p(p+q)}{p.2q}\cdot x^2+\frac{p(p+q)(p+2q)}{q.2q.3q}.x^3+\cdots \text{to } \infty,$$

যেখানে $x^2<1$. ইহা ব্যবহার করিয়া নিম্নলিখিত অসীম শ্রেণীটির মান বাহির কর :

$$1+\frac{14}{24}+\frac{14.35}{24.48}+\frac{14.35.56}{24.48.72}+\cdots\cdots \text{to } \infty.$$

$$(1-x)^{-\frac{p}{q}}=1+\left(-\frac{p}{q}\right)(-x)+\frac{(-p/q)(-p/q-1)}{1.2}(-x)^2$$

$$+\frac{(-p/q)(-p/q-1)(-p/q-2)}{1.2.3}\cdot(-x)^3+\cdots\cdots \text{to } \infty$$

$$=1+\frac{p}{q}\cdot x+\frac{p(p+q)}{q.2q}.x^2+\frac{p(p+q)(p+2q)}{q.2q.3q}.x^3+\cdots\cdots$$

এখানে, $\frac{p}{q}x=\frac{14}{24}$ ... (1) ;

$$\frac{p(p+q)}{q.2q}.x^2=\frac{14\times 35}{24\times 48}\qquad \cdots\qquad (2).$$

(2) কে (1) দিয়া ভাগ করিয়া,

$$\frac{p+q}{2q}.x=\frac{35}{48}.\qquad \cdots\qquad (3)$$

এখন, (3) কে (1) দিয়া ভাগ করিয়া,

$$\frac{p+q}{2p}=\frac{35}{48}\times\frac{24}{14}=\frac{5}{4}$$

$\therefore\ 5p=2p+2q. \quad \therefore\ 3p=2q. \quad \therefore\ p/q=\frac{2}{3} \quad \cdots \quad (4)$

তখন, (1) এবং (4) হইতে,

$\frac{2}{3}x=\frac{14}{24} \qquad \therefore\ x=7/8 \quad \cdots \quad \cdots \quad (5).$

$\therefore$ প্রদত্ত অসীম শ্রেণীটির মান $=(1-x)^{-p/q}$

$$=(1-\tfrac{7}{8})^{-\frac{2}{3}}=(2^{-3})^{-\frac{2}{3}}=2^2=4$$ উত্তর।

প্রশ্নমালা 31

1. x এর যে যে মানের জন্য x এর ঘাতের উর্ধ্বক্রমে বিস্তৃতি সম্ভব তাহা উল্লেখ পূর্বক চতুর্থ পদ পর্যন্ত বিস্তৃত কর :

(i) $(1+x)^{\frac{3}{2}}$; (ii) $(1+2x)^{-4}$; (iii) $(1+3x)^{-\frac{2}{3}}$;

(iv) $\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$; (v) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; (vi) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-4x}}$.

2. x এর যে যে মানের জন্য x এর ঘাতের উর্ধ্বক্রমে বিস্তৃতি সম্ভব তাহা উল্লেখ করিয়া পঞ্চম পদ পর্যন্ত বিস্তৃত কর :

(i) $(1+2x)^{-3}$; [H. S. 1962] (ii) $(2+x)^{\frac{1}{3}}$;

(iii) $(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}$; (iv) $(2-x^2)^{-\frac{3}{2}}$,

3. প্রথম চারিটি পদ পর্য্যন্ত বিস্তৃত কর :

(i) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $(x^2>1)$; [H. S. Comp. 1975]

(ii) $(1-x)^{-2}$, $(x^2>1)$; (iii) $\dfrac{a-x}{a+x}$, $(a^2>x^2)$;

(iv) $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$; $(-1<x<1)$; (v) $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$, $(-1<x<1)$.

4. x এর যে যে মানের জন্য x এর ঘাতের উর্ধ্বক্রমে বিস্তৃতি সম্ভব তাহা উল্লেখ করিয়া $(r+1)$-তম পদটি লিখ :

(i) $(1-2x)^{-4}$, [H. S.Comp. 1974] ; (ii) $(1-2x)^{-\frac{1}{2}}$;

(iii) $(1-2x)^{-\frac{3}{2}}$, [H. S. 1965] ; (iv) $(3+2x)^{\frac{7}{3}}$.

5. $|x|<0.5$ হইলে, $(1+2x)^{2.5}$ এর বিস্তৃতিতে x^6 এর সহগ বাহির কর।

6. $0<x<\frac{1}{3}$ হইলে, $(1+3x)^{\frac{10}{3}}$ এর বিস্তৃতির প্রথম ঋণাত্মক পদটির সহগ কত ?

7. $-0.5<x<0$ হইলে, $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ এর বিস্তৃতির x^8 এর সহগ বাহির কর।

8. $|x|<1$ হইলে, $\frac{1+x}{(1-x)^3}$ এর বিস্তৃতির x^{11} এর সহগ বাহির কর।

9. $|x|<1$ হইলে, $\frac{(1+x)^2}{(1-x)^3}$ এর বিস্তৃতির x^n এর সহগ নির্ণয় কর।

10. $|x|<1$ হইলে, x এর ঘাতের উর্ধ্বক্রমে x^5 পর্যন্ত বিস্তৃত কর :

(i) $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$; (ii) $\frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}$.

11. $|x|<1$ হইলে, $(1-2x+3x^2-4x^3+\cdots\text{to } \infty)^{-\frac{5}{2}}$ এর বিস্তৃতির x^5 এবং x^6 এর সহগ বাহির কর।

12. $|x|<1$ হইলে, $(1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\text{to } \infty)^{\frac{3}{4}}$ এর বিস্তৃতিতে x^2 এর সহগ বাহির কর।

13. $0<(a, x)<1$ হইলে, দেখাও যে,

$$\frac{1}{(1-x)(1-ax)}$$
$$=1+(1+a)x+(1+a+a^2)x^2+(1+a+a^2+a^3)x^3+\ldots$$

14. $(1-\frac{3}{5})^{-3}$ এর বিস্তৃতিতে সাংখ্যমানে বৃহত্তম পদটি নির্ণয় কর।

15. (i) $x=\frac{2}{5}$ হইলে, $(2+3x)^{-\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতিতে সাংখ্যমানে বৃহত্তম পদটি বাহির কর।

(ii) $x=\frac{3}{8}$ হইলে, $(2+3x)^{-\frac{3}{2}}$ এর জন্য কি হইবে ?

16. দেখাও যে,

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n=1+n\left(\frac{2x}{1+x}\right)+\frac{n(n+1)}{\underline{|2}}\left(\frac{2x}{1+x}\right)^2+\cdots;$$

এবং x এর সীমা নির্দ্দেশ কর।

17. বিস্তৃতির সম্ভাব্যতার উল্লেখ পূর্বক x-এর ঘাতের উর্ধ্বক্রমে প্রথম তিনটি পদ পর্য্যন্ত বিস্তৃত কর :

$$\frac{1+x}{(1-x)^3}+\frac{1-x}{(1+x)^3},$$ [P. U. 1976]

18. যদি x এর মান এইরূপ ক্ষুদ্র রাশি হয় যে $x^2, x^3, x^4 \cdots$ইত্যাদি উপেক্ষা করা যায়, তাহা হইলে, দেখাও যে,

$$\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{(1+x)^2}}{1+x+\sqrt{1+x}}=1-\tfrac{1}{6}x, \text{ (প্রায়)।}$$

[**Joint Ent. Ex. 1973**]

19. যদি c এইরূপ একটি রাশি হয় যে, l^4 এর তুলনায় c^4 কে উপেক্ষা করা যায়, তাহা হইলে, দেখাও যে,

$$\sqrt{\left(\frac{l}{l+c}\right)}+\sqrt{\left(\frac{l}{l-c}\right)}=2+\frac{3}{4}\frac{c^2}{l^2}.$$

[**Joint Ent. Ex. 1974**]

20. (*i*) a এর মান যদি এমন ক্ষুদ্র রাশি হয় যেখানে $a^2, a^3, a^4, \cdots$ইত্যাদিকে উপেক্ষা করা যাইবে, তাহা হইলে, দেখাও যে,

$$\frac{(1+a)^{\frac{1}{2}}}{(1-2a)^{\frac{1}{4}}}=1+a.$$

(*ii*) যদি $a^3, a^4, a^5 \ldots$ ইত্যাদি উপেক্ষা করা যায়, তবে উক্ত রাশিমালার আসন্ন মান কি হইবে ?

21. যদি p এর মান q এর মানের খুব কাছাকাছি হয়, তাহা হইলে, দেখাও যে,

$$\sqrt[3]{\left(\frac{p}{q}\right)}=\frac{2p+q}{p+2q}, \text{ (প্রায়)।}$$

22. দ্বিপদ উপপাদ্যের সাহায্যে আসন্ন চার দশমিক স্থান পর্য্যন্ত মান বাহির কর :

(*i*) $(1{\cdot}02)^5$; (*ii*) $({\cdot}999)^3$; [**H. S. 1960**]

(*iii*) $({\cdot}999)^{-5}$; (*iv*) $\sqrt{3}$; (*v*) $\sqrt{5}$;

(*vi*) $\sqrt{1{\cdot}1}$; [**H. S. 1972**] (*vii*) $\sqrt[4]{623}$;

(*viii*) $\dfrac{1}{({\cdot}998)^5}$; (*ix*) $\dfrac{235}{10002}$; (*x*) $\dfrac{(1{\cdot}0005)^3}{({\cdot}9994)^4}$.

23. দেখাও যে,

(*i*) $\sqrt{2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1.3}{4.8}+\frac{1.3.5}{4.8.12}+ \quad \cdots \quad \text{to } \infty$;

(*ii*) $\sqrt{3}=1+\frac{1}{3}+\frac{1.3}{3.6}+\frac{1.3.5}{3.6.9}+ \quad \cdots \quad \text{to } \infty$;

(*iii*) $8=1+\frac{9}{8}+\frac{9.15}{8.16}+\frac{9.15.21}{8.16.24}+ \quad \cdots \quad \text{to } \infty$;

(iv) $\sqrt{\frac{2}{3}}=1-\frac{1}{4}+\frac{1.3}{4.8}-\frac{1.3.5}{4.8.12}+\quad\cdots\quad$ to ∞ ;

(v) $3\sqrt{3}=2+\frac{5}{3\lfloor 2}+\frac{5.7}{3^2\lfloor 3}+\frac{5.7.9}{3^3\lfloor 4}+\quad\cdots\quad$ to ∞ ;

24. নিম্নলিখিত অসীম শ্রেণী-সমূহের যোগফল নির্ণয় কর :

(i) $1+\frac{1}{4}+\frac{1.3}{4.8}+\frac{1.3.5}{4.8.12}+\quad\cdots$ [H. S. 1967]

(ii) $1+\frac{1}{2}.\left(\frac{2}{3}\right)+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{2}{3}\right)^3+\quad\cdots$

[Joint Ent. Ex. 1966]

(iii) $1+\frac{3}{3}+\frac{3.5}{3.6}+\frac{3.5.7}{3.6.9}+\quad\cdots\quad\cdots$

(iv) $1-\frac{1}{6}+\frac{1.3}{6.12}-\frac{1.3.5}{6.12.18}+\quad\cdots\quad\cdots$

(v) $1-\frac{3}{4}+\frac{3.5}{4.8}-\frac{3.5.7}{4.8.12}+\quad\cdots\quad\cdots$

(vi) $1+\frac{1}{4}-\frac{1.1}{4.8}+\frac{1.1.3}{4.8.12}-\frac{1.1.3.5}{4.8.12.16}+\cdots\quad\cdots$

(vii) $1+\frac{1}{6}+\frac{1.3}{1.2}.\frac{1}{6^2}+\frac{1.3.5}{1.2.3}.\frac{1}{6^3}+\cdots\quad\cdots$

(viii) $\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}.\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{1}{4}\right)^2+\quad\cdots\quad\cdots$

[Joint Ent. Ex. 1968]

9-5. সূচক শ্রেণী (Exponential Series) :

[1] e এর অর্থ :

$$1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\cdots \quad \cdots\text{অসীম পদ পর্যন্ত}$$

শ্রেণীটিকে e প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হইয়া থাকে ;

অর্থাৎ, $\quad e=1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\cdots\quad$ **অসাম পদ পর্যন্ত।**

[2] দেখানো যাইবে, $2<e<3$.

$$e=1+1+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}+\quad\cdots$$

$$=2+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}+\quad\cdots$$

$$>2.$$

সুতরাং, $e>2$.

এখন, $\lfloor 3 = 1.2.3 > 2^2$; বা, $\frac{1}{\lfloor 3} < \frac{1}{2^2}$;

$\lfloor 4 = 1.2.3.4 > 2^3$; বা, $\frac{1}{\lfloor 4} < \frac{1}{2^3}$.

সেইরূপ, $\frac{1}{\lfloor 5} < \frac{1}{2^4}$; $\frac{1}{\lfloor 6} < \frac{1}{2^5}$; ইত্যাদি।

$$\therefore \quad e = 1 + 1 + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3} + \frac{1}{\lfloor 4} + \quad \cdots$$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots$$

$$\to 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3.$$

$\therefore \quad e < 3.$ সুতরাং, $2 < e < 3$.

[3] e একটি অমেয় রাশি।

যদি সম্ভবপর হয়, ধরা যাক্ e একটি মূলদ রাশি, এবং $e = \frac{p}{q}$, যেখানে p এবং q ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং $q \neq 1$. তাহা হইলে,

$$\frac{p}{q} = 1 + 1 + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3} + \cdots + \frac{1}{\lfloor q} + \frac{1}{\lfloor q+1} + \quad \cdots$$

উভয় পক্ষকে $\lfloor q$ দ্বারা গুণ করিয়া পাই,

$$p\lfloor q-1 = 2\lfloor q + \frac{\lfloor q}{\lfloor 2} + \frac{\lfloor q}{\lfloor 3} + \quad \cdots \quad \cdots + 1$$

$$+ \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots = a + k,$$

যেখানে, $a = 2\lfloor q + \frac{\lfloor q}{\lfloor 2} + \frac{\lfloor q}{\lfloor 3} + \cdots + 1 =$ একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা,

এবং, $$k = \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \quad \cdots \quad \cdots$$

$$< \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \quad \cdots \quad \cdots \text{ to } \infty$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{q+1}\right)}{1 - \left(\frac{1}{q+1}\right)} = \frac{1}{q}.$$

আবার, স্পষ্টতঃই, $k>\frac{1}{q+1}$.

$$\therefore \quad \frac{1}{q+1}<k<\frac{1}{q}.$$

সুতরাং, k একটি ধনাত্মক প্রকৃত দশমিক (proper decimal).

কিন্তু $p\lfloor q-1$ একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। তাহা হইলে, দেখা যাইতেছে, একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা = একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা + একটি ধনাত্মক প্রকৃত দশমিক ;— যাহা অসম্ভব। সুতরাং e একটি অমেয় রাশি।

[4] $e=2{\cdot}7182818$ (আসন্ন সাত দশমিক স্থান পর্যন্ত)

আমরা জানি, $e=2+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}+\quad\cdots\quad\cdots$

$\frac{1}{\lfloor 2}=0{\cdot}5$; $\frac{1}{\lfloor 3}=\left(\frac{1}{\lfloor 2}\right)\div 3=0{\cdot}166{,}666{,}67$;

$\frac{1}{\lfloor 4}=\left(\frac{1}{\lfloor 3}\right)\div 4={\cdot}041{,}666{,}67$; $\frac{1}{\lfloor 5}=\left(\frac{1}{\lfloor 4}\right)\div 5={\cdot}008{,}333{,}33$;

$\frac{1}{\lfloor 6}=\left(\frac{1}{\lfloor 5}\right)\div 6={\cdot}001{,}388{,}89$; $\frac{1}{\lfloor 7}=\left(\frac{1}{\lfloor 6}\right)\div 7={\cdot}000{,}198{,}41$;

$\frac{1}{\lfloor 8}=\left(\frac{1}{\lfloor 7}\right)\div 8={\cdot}000{,}024{,}80$; $\frac{1}{\lfloor 9}=\left(\frac{1}{\lfloor 8}\right)\div 9={\cdot}000{,}002{,}76$;

$\frac{1}{\lfloor 10}=\left(\frac{1}{\lfloor 9}\right)\div 10={\cdot}000{,}000{,}28$; $\frac{1}{\lfloor 11}=\left(\frac{1}{\lfloor 10}\right)\div 11={\cdot}000{,}000{,}03$.

$$\therefore \; e=2+{\cdot}5+{\cdot}166{,}666{,}67+{\cdot}041{,}666{,}67+{\cdot}008{,}333{,}33+{\cdot}001{,}388{,}89$$
$$+{\cdot}000{,}198{,}41+{\cdot}000{,}024{,}80+{\cdot}000{,}002{,}76+{\cdot}000{,}000{,}28$$
$$+{\cdot}000{,}000{,}03+\ldots=2{\cdot}71828184\cdots=2{\cdot}718{,}281{,}8$$ (প্রায়)।

দ্রষ্টব্য : $1/e=0{\cdot}36787944$ **(প্রায়)।**

9-6. সূচক উপপাদ্য।

বিবৃতি (*Statement*) :

x এর যে কোন বাস্তব মানের জন্য

$$e^x=1+\frac{x}{\lfloor 1}+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}+\cdots+\frac{x^n}{\lfloor n}+\cdots\cdots\text{to } \infty \quad \cdots \quad (A).$$

ইহার প্রমাণ পাঠ্যসূচীর বহির্ভূত বলিয়া, এখানে দেওয়া হইল না।

দ্রষ্টব্য : (1) (A)-তে x এর স্থলে $-x$ বসাইলে,

$$e^{-x}=1-\frac{x}{\lfloor 1}+\frac{x^2}{\lfloor 2}-\frac{x^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots\text{to } \infty.$$

$$\therefore\quad e^x+e^{-x}=2\left[1+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^4}{\lfloor 4}+\cdots\cdots\right]; \qquad \ldots \qquad (B)$$

$$\text{এবং, } e^x-e^{-x}=2\left[x+\frac{x^3}{\lfloor 3}+\frac{x^5}{\lfloor 5}+\cdots\cdots\right]. \qquad \ldots \qquad (C).$$

(2) আবার, $e^{ax}=1+\frac{ax}{\lfloor 1}+\frac{(ax)^2}{\lfloor 2}+\frac{(ax)^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots$. to ∞.

(3) $a^x=e^{x\log_e a}$, $(a>0)$

$$=1+\frac{x\log a}{\lfloor 1}+\frac{x^2(\log a)^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3(\log a)^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots \text{ to } \infty.$$

উদাহরণ .1 x এর ঘাতের উর্ধ্বক্রমে $\frac{e^{3x}+e^{-x}}{e^x}$ কে বিস্তৃত কর।

$$\text{প্রদত্ত রাশি}=\frac{e^{3x}}{e^x}+\frac{e^{-x}}{e^x}=e^{2x}+e^{-2x}$$

$$=\left\{1+(2x)+\frac{(2x)^2}{\lfloor 2}+\ldots\ldots\right\}+\left\{1-(2x)+\frac{(2x)^2}{\lfloor 2}-\ldots\cdots\right\}$$

$$=2\left(1+2x^2+\frac{2}{3}x^4+\cdots\ldots\right).$$

উদাহরণ 2. $\frac{1+x+x^2}{e^x}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ বাহির কর।

$$\text{এখন,}\quad \frac{(1+x+x^2)}{e^x}=(1+x+x^2)e^{-x}.$$

$$=(1+x+x^2)\left\{1-x+\frac{x^2}{\lfloor 2}-\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{\lfloor n}+\ldots\right\}.$$

$\therefore$ x^n এর সহগ

$$=(-1)^n\frac{1}{\lfloor n}+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{\lfloor n-1}+(-1)^{n-2}\cdot\frac{1}{\lfloor n-2}$$

$$=(-1)^n\left[\frac{1}{\lfloor n}-\frac{n}{\lfloor n}+\frac{n(n-1)}{\lfloor n}\right]$$

$$=(-1)^n\frac{1}{\lfloor n}(n-1)^2.$$

উদাহরণ 3. দেখাও যে,

$$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}+\cdots\cdots=\frac{1}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right)$$

x-এর যে কোন মানের জন্য,

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots \quad \text{to } \infty$$

সুতরাং, $x=1$ এবং $x=-1$ হইলে,

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots \;\cdots$$

$$e^{-1}=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots \;\cdots$$

$$\therefore \quad e+\frac{1}{e}=2\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}+\cdots \;\cdots\right)$$

$$\therefore \quad 1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}+\cdots \;\cdots=\frac{1}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right).$$

উদাহরণ 4. দেখাও যে,

(i) $\frac{2}{3!}+\frac{4}{5!}+\frac{6}{7!}+\cdots \quad \cdots \quad \text{to } \infty=\frac{1}{e}$;

(ii) $\frac{1}{2!}+\frac{1+2}{3!}+\frac{1+2+3}{4!}+\cdots \quad \cdots \quad \text{to } \infty=\frac{1}{2}e$;

(iii) $\frac{1^2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{3^2}{3!}+\frac{4^2}{4!}+\cdots \quad \cdots \quad \text{to} \infty=2e.$

(i) মনে করি, n-তম পদ $=t_n$;

$$\therefore \quad t_n=\frac{2n}{(2n+1)!}=\frac{(2n+1)-1}{(2n+1)!}$$

$$=\frac{1}{(2n)!}-\frac{1}{(2n+1)!}$$

$$\therefore \quad t_1=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!} ;$$

$$t_2=\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!} ; \text{ etc.}$$

$\therefore$ প্রদত্ত শ্রেণী

$$=\frac{1}{\lfloor 2}-\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}-\frac{1}{\lfloor 5}+\cdots\ \cdots$$

$$=1-\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}-\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}-\frac{1}{\lfloor 5}+\cdots\ \cdots$$

$$=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

(*ii*) মনে করি, n-তম পদ $=t_n$;

$$\therefore\quad t_n=\frac{1+2+3+\cdots+n}{\lfloor n+1}$$

$$=\frac{1}{\lfloor n+1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\lfloor n-1}$$

$$t_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\lfloor 0}=\frac{1}{2};\quad t_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\lfloor 1};$$

$$t_3=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\lfloor 2}\ ;\ t_4=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\lfloor 3}$$; ইত্যাদি

$\therefore$ প্রদত্ত শ্রেণী

$$=\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\cdots\cdots\right]$$

$$=\tfrac{1}{2}e.$$

(*iii*) মনে করি, n-তম পদ $=t_n$;

$$\therefore\quad t_n=\frac{n^2}{\lfloor n}=\frac{n}{\lfloor n-1}=\frac{(n-1)+1}{\lfloor n-1}=\frac{1}{\lfloor n-2}+\frac{1}{\lfloor n-1}$$

আমরা জানি,

$$\lfloor n=n\lfloor n-1\ ;\ \lfloor 0=1.$$

$$\therefore\quad \frac{1}{\lfloor n-1}=\frac{n}{\lfloor n},\quad \therefore\quad \frac{1}{\lfloor -1}=0$$ (ধরা যায়) ;

$$\therefore\quad t_1=\frac{1}{\lfloor -1}+\frac{1}{\lfloor 0}=0+1\ ;$$

$$t_2=\frac{1}{\lfloor 0}+\frac{1}{\lfloor 1}=1+\frac{1}{\lfloor 1}\ ;$$

$$t_3=\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}$$; ইত্যাদি।

∴ প্রদত্ত শ্রেণী

$$=(0+1)+\left(1+\frac{1}{\lfloor 1}\right)+\left(\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}\right)+\left(\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}\right)+\cdots$$

$$=2\left\{1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\cdots\right\}=2e.$$

উদাহরণ 5. (*i*) $e^{\frac{1}{10}}$ এবং (*ii*) $\frac{1}{\sqrt[5]{e}}$ এর মান আসন্ন পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত বাহির কর।

(*i*) $e^{\frac{1}{10}}=1+\frac{1}{10}+\frac{1}{\lfloor 2}\cdot\frac{1}{10^2}+\frac{1}{\lfloor 3}\cdot\frac{1}{10^3}+\cdots \quad \cdots$

$\rightarrow 1+\dot{}1+\dot{}005+\dot{}000{,}167+\dot{}000{,}004+\cdots \quad \cdots$

$=1\dot{}105171\cdots=1\dot{}10517$ (প্রায়)।

(*ii*) $\frac{1}{\sqrt[5]{e}}=e^{-\frac{1}{5}}$

$=1-\frac{1}{5}+\frac{1}{\lfloor 2}\cdot\frac{1}{5^2}-\frac{1}{\lfloor 3}\cdot\frac{1}{5^3}+\cdots \quad \cdots$

$=1-\frac{2}{10}+\frac{2}{100}-\frac{4}{3\times 1000}+\frac{2}{3\times 10^4}-\frac{4}{15\times 10^5}+\cdots \quad \cdots$

$\rightarrow 1-\dot{}2+\dot{}02-\dot{}001{,}333+\dot{}000{,}067-\dot{}000{,}003+\cdots$

$=0\dot{}818731\cdots=\dot{}81873$, (প্রায়)।

প্রশ্নমালা 32

1. নিম্নলিখিত অসীম শ্রেণীগুলির যোগফল e এতে প্রকাশ কর :

(*i*) $1+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 4}+\frac{1}{\lfloor 6}+\cdots \quad \cdots$

(*ii*) $1+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 5}+\frac{1}{\lfloor 7}+\cdots \quad \cdots$

(*iii*) $\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{2}{\lfloor 5}+\frac{3}{\lfloor 7}+\cdots \quad \cdots$

(*iv*) $\frac{2}{\lfloor 1}+\frac{4}{\lfloor 3}+\frac{6}{\lfloor 5}+\cdots \quad \cdots$

(*v*) $1+\frac{1.2}{\lfloor 3}+\frac{1.2.4.5}{\lfloor 6}+\frac{1.2.4.5.7.8}{\lfloor 9}+\cdots \quad \cdots$

(*vi*) $1+\frac{3}{\lfloor 1}+\frac{5}{\lfloor 2}+\frac{7}{\lfloor 3}+\frac{9}{\lfloor 4}+\cdots \quad \cdots$

(vii) $\frac{1.2}{\lfloor 1} + \frac{2.3}{\lfloor 2} + \frac{3.4}{\lfloor 3} + \ldots \quad \ldots$

(viii) $\frac{1^3}{\lfloor 1} + \frac{2^3}{\lfloor 2} + \frac{3^3}{\lfloor 3} + \frac{4^3}{\lfloor 4} + \cdots \quad \cdots$ [H. S. 1966]

2. দেখাও যে,

(i) $\frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1+2}{\lfloor 3} + \frac{1+2+3}{\lfloor 4} + \cdots \quad \cdots = \frac{e}{2}$.

(ii) $\frac{1}{\lfloor 2} - \frac{1}{\lfloor 3} + \frac{1}{\lfloor 4} - \frac{1}{\lfloor 5} + \cdots \quad \cdots = \frac{1}{e}$

(iii) $1 + \frac{1+2}{\lfloor 2} + \frac{1+2+2^2}{\lfloor 3} + \frac{1+2+2^2+2^3}{\lfloor 4} + \ldots \quad \ldots = e^2 - e$.

(iv) $1 + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 4} + \frac{1}{\lfloor 6} + \cdots \quad \cdots = \frac{1+e^2}{2e}$

(v) $1 + \frac{1+3}{2\,!} + \frac{1+3+3^2}{3\,!} + \cdots \quad \cdots = \frac{1}{2}e(e^2-1)$

(vi) $1 + \frac{1+x}{\lfloor 2} + \frac{1+x+x^2}{\lfloor 3} + \ldots \quad \ldots = \frac{e-e^x}{1-x}$.

3. $\frac{1-x+x^2}{e^x}$ এর বিস্তৃতিতে x^2 এর সহগ নির্ণয় কর।

4. $\frac{a+bx+cx^2}{e^x}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ বাহির কর।

5. $\frac{x}{e^x-1}$ কে x-এর ঘাতের ঊর্ধ্বক্রমে প্রথম পাঁচটি পদ পর্যন্ত বিস্তৃত কর।

6. (i) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; (ii) $\sqrt[3]{e}$ এর মান আসন্ন চার দশমিক স্থান পর্যন্ত বাহির কর।

7. দেখাও যে,

(i) $1 + \frac{(\log_e n)^2}{2\,!} + \frac{(\log_e n)^4}{4\,!} + \cdots \quad \cdots = \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{n}\right)$

(ii) $2\left\{1 + \frac{1}{2\,!}(\log_e 5)^2 + \frac{1}{4\,!}(\log_e 5)^4 + \cdots \quad \cdots\right\} = 5\frac{1}{5}$

9-7. লগারিদম্ শ্রেণী (*Logarithmic Series*).

বিবৃতি (*Statement*) ঃ

যদি $-1<x\leq 1$ হয়, তাহা হইলে,

$$\log_e (1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \quad \cdots \text{to} \infty.$$

ইহার প্রমাণ পাঠ্যসূচীর বহির্ভূত বলিয়া এখানে দেওয়া হইল না।

দ্রষ্টব্য ঃ

(*i*) $-1\leq x<1$ হইলে,

$$\log_e (1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots \quad \cdots$$

(*ii*) $-1<x<1$ হইলে,

$$\log_e (1+x) - \log_e (1-x)$$

$$= \left\{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots \quad \cdots\right\}$$

$$- \left\{-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots \quad \cdots\right\}$$

$$\therefore \quad \log_e \left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots \quad \cdots\right\}$$

9-8. যে কোন সংখ্যার লগারিদ্‌মের মান নির্ণয় পদ্ধতি।

$-1<x<1$ হইলে,

$$\log_e (1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \quad \cdots \quad (1);$$

$$\log_e (1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots \quad \cdots \quad (2).$$

$$\therefore \quad \log_e \left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \log_e (1+x) - \log_e (1-x)$$

$$= 2\left\{x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots \quad \cdots\right\} \quad (3)$$

(*a*) মনে করি, n যে কোন ধনাত্মক বাস্তব রাশি, এবং $n>1$; তাহা হইলে, $x = \frac{1}{n}$ ধরিয়া, (1) এবং (2) হইতে পাই,

$$\log_e \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} + \cdots \quad \cdots$$

বা, $\log_e (n+1) - \log_e n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} + \dots\dots$ (A) ;

এবং, $\log_e \left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} - \dots\dots$

বা, $\log_e n - \log_e (n-1) = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{4n^4} + \dots\dots$ (B).

(A) এবং (B) যোগ করিয়া পাই,

$$\mathbf{\log_e (n+1) - \log_e (n-1) = 2\left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{5n^5} + \dots\dots\right\}}.$$

(*b*) মনে করি, n যে কোন ধনাত্মক রাশি এবং

$\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+1}{n}$, অর্থাৎ, $x = \frac{1}{2n+1}$.

তাহা হইলে, (3) হইতে প.ই,

$$\log_e \left(\frac{n+1}{n}\right) = 2\left\{\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(2n+1)^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(2n+1)^5} + \cdots\right\};$$

অর্থাৎ, $\mathbf{\log_e (n+1) - \log_e n}$

$$= 2\left\{\mathbf{\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(2n+1)^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(2n+1)^5}} + \cdots \quad \cdots\right\}.$$

মন্তব্য ঃ এই সূত্রটির সাহায্যে যে কোন ধনাত্মক বাস্তব রাশির লগারিদ্‌মের মান নির্ণয় করা বিশেষ সুবিধা হইবে ; কারণ, এইরূপক্ষেত্রে, ডানপক্ষের প্রথম হইতে কয়েকটি মাত্র পদ লইলেই অতি সহজেই কতিপয় স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান পাওয়া যাইবে।

(*c*) মনে করি, $m > n > 0$ এবং $\frac{1+x}{1-x} = \frac{m}{n}$, অর্থাৎ, $x = \frac{m-n}{m+n}$.

তাহা হইলে, (3) হইতে পাই,

$$\log_e \left(\frac{m}{n}\right) = 2\left[\left(\frac{m-n}{m+n}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5 + \cdots \quad \cdots\right]$$

এখানে $n = 1$ হইলে,

$$\log_e m = 2\left[\frac{m-1}{m+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^5 + \cdots \quad \cdots\right]$$

এবং $m = n+1$ হইলে, অর্থাৎ, $\frac{m-n}{m+n} = \frac{1}{2n+1}$ হইলে,

$$\log_e (n+1) - \log_e n = 2\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(2n+1)^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(2n+1)^5} + \cdots\right]$$

9-9. যে কোন রাশির নেপিরিয়ান্ লগারিদম্ এবং সাধারণ লগারিদম্ এর মান নির্ণয় পদ্ধতি।

N যে কোন ধনাত্মক বাস্তব রাশি হইলে,

$$\log_e N = \log_{10} N \times \log_e 10.$$

$$\therefore \quad \log_{10} N = \frac{1}{\log_e 10} \times \log_e N.$$

এই সূত্রের সাহায্যে যে কোন ধনাত্মক রাশির নিধান 10-এর সাপেক্ষে লগারিদমের মান বাহির করা যাইবে।

$$\log_e(n+1) - \log_e n = 2\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n+1)^5} + \dots \dots\right]$$

সূত্রে $n=1$ বসাইয়া পাই,

$$\log_e 2 = 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5} + \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7} + \dots \dots\right]$$

$$= 2[\cdot333{,}333{,}333\cdots + \tfrac{1}{3} \times \cdot037{,}037{,}037\cdots$$

$$+ \tfrac{1}{5} \times \cdot004{,}115{,}226\cdots + \dots \dots]$$

$$= 0\cdot693147178\cdots$$

$= 0\cdot693{,}147{,}18$ (আসন্ন আট দশমিক পর্যন্ত)।

এবং $n=2$ বসাইয়া

$$\log_e 3 - \log_e 2 = 2\left[\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5} + \dots \dots\right]$$

$$= 2[\cdot2 + \tfrac{1}{3} \times \cdot008 + \tfrac{1}{5} \times \cdot00032$$

$$+ \tfrac{1}{7} \times \cdot000{,}012{,}8 + \tfrac{1}{9} \times \cdot000{,}000{,}512 + \dots \dots]$$

$$\rightarrow \cdot4 + \cdot005{,}333{,}333\cdots + \cdot000{,}128{,}000\cdots$$

$$+ \cdot000{,}003{,}657\cdots + \cdot000{,}000{,}114\dots$$

$$+ \cdot000{,}000{,}004\cdots + \dots \dots$$

$= 0\cdot405{,}465{,}108 = 0\cdot405{,}465{,}11$ (আসন্ন আট দশমিক পর্যন্ত)

$$\therefore \quad \log_e 3 = \log_e 2 + \cdot0\cdot405{,}465{,}11,$$

$$= 1\cdot098{,}612{,}29$$

এবং, $n=9$ বসাইয়া পাই,

$$\log_e 10 - \log_e 9 = 2\left[\frac{1}{19} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{19^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{19^5} + \dots \dots\right]$$

$$= \tfrac{2}{19}[1 + \tfrac{1}{3} \times \cdot002{,}770{,}083\cdots + \tfrac{1}{5} \times \cdot000{,}007{,}673\dots$$

$+\frac{1}{7}\times \cdot 000{,}000{,}021\cdots+\cdots \quad \cdots]$

$=\frac{2}{19}[1+\cdot 000{,}923{,}361+\cdot 000{,}001{,}535\ldots+\cdot 000{,}000{,}003\cdots+\cdots \ \cdots]$

$=\frac{2}{19}\times 1\cdot 000{,}924{,}899\cdots$

$=0\cdot 105{,}360{,}516\ldots$

$\therefore \quad \log_e 10=2\log_e 3+0\cdot 105{,}360{,}516\ldots$

$\rightarrow 2\cdot 302{,}585{,}09$

$\therefore \quad \log_{10} e=\dfrac{1}{\log_e 10}=0\cdot 434{,}294{,}48.$

$\therefore \quad \mathbf{\log_{10} N=\mu\times\log_e N},$

যেখানে, $\mu=\mathbf{0\cdot 434{,}294{,}48}$, (আসন্ন আট দশমিক স্থান পর্যন্ত)।

উদাহরণ 1. (*i*) $\log_{10}2$, (*ii*) $\log_{10}3$, (*iii*) $\log_{10}5$, (*iv*) $\log_{10}6$ এর মান বাহির কর।

(*i*) $\log_{10}2=0\cdot 434{,}294{,}48\times\log_e 2$

$=\cdot 434{,}294{,}48\times\cdot 693{,}147{,}18$

$=\cdot 301{,}030{,}0$ (প্রায়)।

(*ii*) $\log_{10}3=0\cdot 434{,}294{,}48\times\log_e 3$

$=\cdot 434{,}294{,}48\times 1\cdot 098{,}612{,}29$

$=\cdot 477{,}121{,}3$ (প্রায়)।

(*iii*) $\log_{10}5=\log_{10}10-\log_{10}2$

$=1-\cdot 3010300=\cdot 698{,}970{,}0$ (প্রায়)।

(*iv*) $\log_{10}6=\log_{10}2+\log_{10}3=\cdot 778{,}151{,}3$ (প্রায়)।

উদাহরণ 2. আসন্ন চার দশমিক স্থান পর্যন্ত $\log_{10}1005$-এর মান বাহির কর।

$\log_e 1005=\log_e\left(1000\times\frac{1005}{1000}\right)$

$=\log_e(1000)+\log_e(1+\cdot 005)$

$=3\log_e 10+\log_e(1+\cdot 005)$;

$\log_e(1+\cdot 005)=\{\cdot 005-\frac{1}{2}\times(\cdot 005)^2+\ldots \quad \ldots\}$

$=\cdot 005-\cdot 000{,}012{,}5+\cdots \quad \cdots$

$=0\cdot 004{,}987{,}5\ldots$;

$\therefore \quad \log_{10}1005=\log_e 1005\times\log_{10}e$

$=3+\log_{10}e\times(\cdot 0049875)$

$=3+\dot{}434{,}294{,}48\times\dot{}004{,}987{,}5$

$\rightarrow 3+\dot{}43429\times\dot{}00499$

$\rightarrow 3+\dot{}002167\rightarrow 3\dot{}00217$

উদাহরণ 3. দেখাও যে,

(i) $\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{4.5}+\dfrac{1}{6.7}+\quad\ldots\quad\ldots\quad=1-\log_e 2$

(ii) $1+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{2^4}+\dfrac{1}{7}\cdot\dfrac{1}{2^6}+\quad\ldots\quad\ldots\quad=\log_e 3.$

(i) আমরা জানি, $-1<x\leqslant 1$ হইলে,

$\log_e(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\ldots\quad\ldots$

সুতরাং, $x=1$ হইলে,

$\log_e 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\quad\ldots$

বামপক্ষ $=\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{4.5}+\dfrac{1}{6.7}+\cdots\quad\ldots$

$=(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{6}-\frac{1}{7})+\ldots\quad\ldots$

$=1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots$

$=1-[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots]$

$=1-\log_e 2.$

(ii) আমরা জানি, $-1<x<1$ হইলে,

$\log_e\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)=2\left\{x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+\cdots\quad\ldots\right\}$

এখন $x=\frac{1}{2}$ হইলে

$\log_e\dfrac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=2\left\{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{2^5}+\cdots\quad\ldots\right\}$

$\therefore\quad 1+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{2^4}+\cdots\quad\cdots=\log_e 3.$

উদাহরণ 4. দেখাও যে,

$\log_e 2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{1.2.3}+\dfrac{1}{3.4.5}+\dfrac{1}{5.6.7}+\cdots\quad\ldots$

আমরা জানি, $-1<x\leqslant 1$ হইলে,

$\log_e(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\ldots\quad\ldots$

সুতরাং, $x=1$ হইলে,

$$\log_e 2 = 1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\dots \quad \dots$$

$$=(1-\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4})+\cdots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+\cdots \quad \dots$$

আবার, $\log_e 2 = 1-(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3})-(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{5})- \quad \dots \quad \dots$

$$=1-\frac{1}{2.3}-\frac{1}{4\,5}-\cdots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$\therefore$ (1) এবং (2) যোগ করিয়া পাই,

$$2\log_e 2 = 1+\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}\right)+\left(\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}\right)+\cdots \quad \dots$$

$$=1+\frac{2}{1.2.3}+\frac{2}{3.4.5}+\frac{2}{5.6.7}+\cdots \quad \dots$$

$$\therefore \quad \log_e 2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{3.4.5}+\frac{1}{5.6.7}+\cdots \quad \dots$$

উদাহরণ 5. $x>0$ হইলে, দেখাও যে,

$$\log_e x = \frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2-1}{(x+1)^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3-1}{(x+1)^3}+\cdots \quad \dots$$

$$\because \quad x=\frac{x}{x+1}\cdot\frac{x+1}{1}$$

$$=\left(\frac{x}{x+1}\right)\Big/\left\{1-\frac{x}{x+1}\right\}$$

$$=\left\{1-\frac{1}{x+1}\right\}\Big/\left\{1-\frac{x}{x+1}\right\};$$

$$\therefore \quad \log_e x = \log_e\left(1-\frac{1}{x+1}\right)-\log\left(1-\frac{x}{x+1}\right)$$

$$=-\left[\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x+1)^3}+\cdots \quad \dots\right]$$

$$+\left[\frac{x}{x+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{(x+1)^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{(x+1)^3}+\cdots \quad \dots\right]$$

$$=\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2-1}{(x+1)^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3-1}{(x+1)^3}+\cdots \quad \dots .$$

প্রশ্নমালা 33

1. পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত মান নির্ণয় কর :

(i) $\log_e 7$; (ii) $\log_e 8$; (iii) $\log_e \frac{5}{4}$; (iv) $\log_e 36$.

2. পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত মান নির্ণয় কর।

(i) $\log_{10} 9$; (ii) $\log_{10} 5$; (iii) $\log_{10} 15$; (iv) $\log_{10} 1{\cdot}008$.

3. দেখাও যে,

(i) $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+\ldots \quad \ldots \quad =\log_e 2$

(ii) $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.2^2}+\frac{1}{3.2^3}+\cdots \quad \ldots \quad =\log_e 2$

(iii) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}.\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}.\frac{1}{2^3}-\cdots \quad \ldots \quad =\log_e 1{\cdot}5$

4. অসীম পদ পর্যন্ত যোগফল নির্ণয় কর :

(i) $1-\frac{1}{2.3}-\frac{1}{4.5}-\frac{1}{6.7}-\ldots \quad \ldots$

(ii) $1+\frac{1}{3}.\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5}.\frac{1}{3^4}+\cdots \quad \ldots$

(iii) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)-\cdots \quad \ldots$

(iv) $\frac{1}{2\lfloor 1}+\frac{1}{2^2\lfloor 2}+\frac{1.2}{2^3\lfloor 3}+\frac{1.2.3}{2^4\lfloor 4}+\cdots \quad \ldots$

5. দেখাও যে, $n>1$ হইলে,

$$\log_e(n+1)-\log_e(n-1)=2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{3n^3}+\frac{1}{5n^5}+\ldots \quad \ldots\right)$$

6. প্রমাণ কর :

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2}.\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{3}.\frac{1}{(n+1)^3}+\cdots \quad \ldots$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{2}.\frac{1}{n^2}+\frac{1}{3}.\frac{1}{n^3}-\ldots \quad \ldots$$

7. x এর ঘাতের ঊর্ধ্বক্রমে বিস্তৃত কর, $(x^2<1)$:

(i) $\log_e(1+x+x^2)$; (ii) $\log_e\left(\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}\right)$;

8. $\log_e(1+x+x^2+x^3)$ কে x এর ঘাতের উর্ধ্বক্রমে বিস্তৃত কর এবং x^{2n} এর সহগ বাহির কর ; যেখানে, $x^2<1$.

9. $\log_e(1-5x+6x^2)$ কে x ঘাতের উর্ধ্বক্রমে বিস্তৃত কর এবং x^n এর সহগ বাহির কর ; $(9x^2<1)$.

10. $x^2+px+q=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α এবং β হইলে, দেখাও যে,

$$\log_e(1-px+qx^2)=(\alpha+\beta)x-\tfrac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)x^2+\tfrac{1}{3}(\alpha^3+\beta^3)x^3-\dots\ \dots$$

11. $y=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\cdots\ \cdots,\ (-1<x\leq 1)$ হইলে, দেখাও যে,

$$x=y+\frac{y^2}{\lfloor 2}+\frac{y^3}{\lfloor 3}+\frac{y^4}{\lfloor 4}+\dots\ \dots$$

12. x, y, z H. P. তে থাকিলে, এবং $x>y>z$ হইলে, দেখাও যে,

$$\left(\frac{z}{y}-\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z^2}{y^2}-\frac{y^2}{x^2}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{z^3}{y^3}-\frac{y^3}{x^3}\right)+\cdots\ \dots$$
$$=\log_e y-\log_e z.$$

13. যদি $x>0$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2-1}{(x+1)^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3-1}{(x+1)^3}+\dots\ \dots=\log_e x.$$

14. দেখাও যে, $\log_2 e-\log_4 e+\log_8 e-\log_{16} e+\cdots\ \cdots=1.$

[Joint. Ent. Ex. 1968]

15. দেখাও যে,

$$1+\frac{(\log_e 2)}{2\,!}+\frac{(\log_e 2)^2}{3\,!}+\frac{(\log_e 2)^3}{4\,!}+\dots\ \dots=\frac{1}{\log_e 2}.$$

16. দেখাও যে, $(n>0)$,

(i) $$1+\frac{(\log_e n)^2}{\lfloor 2}+\frac{(\log_e n)^4}{\lfloor 4}+\frac{(\log_e n)^6}{\lfloor 6}+\cdots\ \cdots=\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{n}\right).$$

(ii) $$1+\frac{(\log_e n)^2}{\lfloor 3}+\frac{(\log_e n)^4}{\lfloor 5}+\frac{(\log_e n)^6}{\lfloor 7}+\cdots\ \cdots=\frac{n^2-1}{2n\log_e n}.$$

দশম অধ্যায়

চক্রবৃদ্ধি এবং বার্ষিকী

(Compound Interest and Annuity)

10-1. উপস্থাপন।

বিশেষ কোন কারণে ঋণগ্রহীতা যে পরিমাণ টাকা ঋণ করে তাহাকে **আসল** বা **মূলধন (Principal)** বলা হয়। ঐ মূলধন ব্যবহারের জন্য ঋণগ্রহীতা, ঋণদাতাকে আসল বাদে যে অতিরিক্ত টাকা দেয় তাহাকে **সুদ** বা **বৃদ্ধি (Interest)** বলে। কোন নির্দিষ্ট সময় পরে আসল এবং সুদের সমষ্টিকে **সুদ-আসল** বা **সবৃদ্ধিমূল (Amount)** বলে। সুতরাং, **সবৃদ্ধিমূল = আসল + সুদ**। প্রতি বৎসর (বা প্রতি মাস, বা প্রতিদিন) প্রতি একশত টাকায় (বা প্রতি এক টাকায়) যে হিসাবে সুদ হয় তাহাকে **সুদের হার (Rate of interest)** বলে। 100 টাকার এক বৎসরের সুদকে **শতকরা বার্ষিক সুদের হার (Rate per cent per annum)** বলে। 100 টাকার 1 বৎসরের সুদ p হইলে ইহাকে সংক্ষেপে বার্ষিক $p\%$ লেখা হয়। সুদ দুই প্রকারের (1) **সরল সুদ (Simple Interest)** এবং (2) **চক্রবৃদ্ধি (Compound Interest).**

যখন কেমলমাত্র মূলধনের উপর সুদ ধরা হইয়া থাকে, তখন সেই সুদকে **সরল সুদ** বলা হয়। কিন্তু, যখন নির্দিষ্ট সময় অন্তর অন্তর প্রাপ্য সুদ মূলধনের সহিত যুক্ত হয় এবং ঐ সমষ্টির উপর পরবর্তী সময়ের জন্য সুদ ধরা হয়, তখন সেই জাতীয় সুদকে **চক্রবৃদ্ধি** বলা হয়।

উদাহরণ স্বরূপ, শতকরা বার্ষিক 10 টাকা হারে 500 টাকার 2 বৎসরের সরল সুদ এবং চক্রবৃদ্ধি নির্ণয় করা যাক্।

(i) **সরল সুদ ঃ** 100 টাকার 1 বৎসরের সুদ = 10 টাকা।

সুতরাং, 500 টাকার 2 বৎসরের সুদ $= 10 \times 5 \times 2$ টাকা ;

অর্থাৎ, 100 টাকা।

(ii) **চক্রবৃদ্ধি ঃ**

100 টাকার 1 বৎসরের সুদ = 10 টাকা।

$\therefore$ 500 টাকার 1 বৎসরের সুদ = 50 টাকা ;

তাহা হইলে, প্রথম বৎসরের মূলধন = 500 টাকা ;

এবং প্রথম বৎসরের সুদ = 50 টাকা।

সুতরাং, দ্বিতীয় বৎসরের মূলধন = 500 টাকা + 50 টাকা = 550 টাকা।

100 টাকার 1 বৎসরের সুদ = 10 টাকা ;

∴ 550 টাকার 1 বৎসরের সুদ = $\frac{10}{100} \times 550$ টাকা = 55 টাকা।

∴ দ্বিতীয় বৎসরের সবৃদ্ধিমূল = 550 টাকা + 55 টাকা = 605 টাকা।

∴ চক্রবৃদ্ধি = সবৃদ্ধিমূল − আসল = 605 টাকা − 500 টাকা = 105 টাকা।

10-2. সরল সুদের সূত্র :

মনে করি, P = আসল ; A = সুদ-আসল ;

I = মোট সুদ ; n = বৎসরের সংখ্যা।

r = 1 টাকার 1 বৎসরের সুদ।

তাহা হইলে, P টাকার 1 বৎসরের সুদ = Pr টাকা ;

এবং P টাকার n বৎসরের সুদ = Pnr টাকা।

∴ $I = Pnr$; $A = P + I = P + Pnr$.

অর্থাৎ $I = A - P = Pnr$; $A = P(1 + nr)$.

দ্রষ্টব্য : 100 টাকার 1 বৎসরের সুদ r টাকা হইলে,

$$I = A - P = \frac{Pnr}{100} ; \quad A = P\left(1 + \frac{nr}{100}\right).$$

উদাহরণ 1. শতকরা বার্ষিক 6·5% হারে 5000 টাকার 3 বৎসরের সরল সুদ এবং সবৃদ্ধিমূল কত ?

এখানে, P = 5000 টাকা ; $n = 3$;

$r = \frac{6·5}{100}$ টাকা = 0·065 টাকা ;

∴ $I = Pnr = 5000 \times 3 \times {·065}$ টাকা = 975 টাকা ;

$A = P + I$ = 5000 টাকা + 975 টাকা = 5975 টাকা।

উদাহরণ 2. শতকরা বার্ষিক কত হারে 4000 টাকার 6 বৎসরের সবৃদ্ধিমূল 6160 টাকা হইবে ?

এখানে, P = 4000 টাকা ; $n = 6$; A = 6160 টাকা।

ধরি, r = 100 টাকার 1 বৎসরের সুদ।

এখন, I = 6160 টাকা − 4000 টাকা = 2160 টাকা।

সুতরাং, $I = \frac{Pnr}{100}$ হইতে পাই ;

$$2160 = \frac{4000 \times 6 \times r}{100} ; \quad \text{বা,} \quad r = 9.$$

∴ নির্ণেয় উত্তর : 9%.

মন্তব্য : নীচের শ্রেণীতে সরল সুদ সম্বন্ধে যথেষ্ট আলোচনা করা হইয়াছে এবং তৎসংক্রান্ত বিবিধ প্রশ্নাবলীর সমাধান করা হইয়াছে। বর্তমান একাদশ ও দ্বাদশ শ্রেণীর পাঠ্যসূচীতে কেবলমাত্র চক্রবৃদ্ধিসংক্রান্ত যাবতীয় প্রশ্নাবলী আলোচিত হইবে।

10-3. চক্রবৃদ্ধির সূত্র :

মনে করি, $P=$ আসল ; $I=$ মোট সুদ ;
$A=$ সবৃদ্ধিমূল ; $n=$ বৎসরের সংখ্যা ;
$r=1$ টাকার 1 বৎসরের সুদ।

প্রথম বৎসরের মূলধন $=P$;
প্রথম বৎসরের সুদ $=Pr$;
প্রথম বৎসরের সবৃদ্ধিমূল $=P+Pr=P(1+r)$. … (1)

দ্বিতীয় বৎসরের মূলধন
$=$ প্রথম বৎসরের সবৃদ্ধিমূল $=P(1+r)$;
দ্বিতীয় বৎসরের সুদ $=P(1+r)r$;
দ্বিতীয় বৎসরের সবৃদ্ধিমূল
$=P(1+r)+P(1+r)r=P(1+r)^2$. … (2)

অনুরূপভাবে, তৃতীয় বৎসরের সবৃদ্ধিমূল
$=P(1+r)^3$;
চতুর্থ বৎসরের সবৃদ্ধিমূল $=P(1+r)^4$;
ইত্যাদি ; ইত্যাদি।
$\therefore$ n-তম বৎসরের সবৃদ্ধিমূল $=P(1+r)^n$. … (3)

তাহা হইলে, $\mathbf{A=P(1+r)^n}$;

$$\mathbf{I=A-P=P\{(1+r)^n-1\}}$$

বিশেষ দ্রষ্টব্য : (1)

সুদের হার বার্ষিক $p\%$ হইলে, $r=\dfrac{p}{100}$.

তখন, $A=P\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^n$; $I=A-P=P\left\{\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^n-1\right\}$.

বিশেষ দ্রষ্টব্য : (2) সুদ পর্ব :

$\dfrac{1}{m}$ বৎসর অন্তে সুদ আসলের সঙ্গে যুক্ত হইলে,

$$A=P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn} ;\quad I=A-P=P\left\{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}-1\right\}.$$

যে নির্দিষ্ট সময় অন্তে সুদ আসলের সঙ্গে যুক্ত হইয়া মূলধনে পরিণত হয়, তাহাকে সুদ গণনার কাল, অথবা, **সুদ-পর্ব (Interest-Period)** বলে। এই সুদ-পর্ব বাৎসরিক, ষাণ্মাসিক, মাসিক, প্রভৃতি হইতে পারে।

P = প্রাথমিক মূলধন ; A = সবৃদ্ধিমূল ; I = মোট সুদ ;

n = বৎসরের সংখ্যা এবং $r = 1$ টাকার 1 বৎসরের সুদ হইলে,

নিম্নের তালিকাটি লক্ষ্যণীয় :

সুদ-পর্ব	সবৃদ্ধিমূল	মোট সুদ
বাৎসরিক (Annually)	$A = P(1+r)^n$	$I = P\{(1+r)^n - 1\}$
ষাণ্মাসিক (Half-yearly)	$A = P\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2n}$	$I = P\left\{\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2n} - 1\right\}$
ত্রৈ-মাসিক (Quarterly)	$A = P\left(1+\frac{r}{4}\right)^{4n}$	$I = P\left\{\left(1+\frac{r}{4}\right)^{4n} - 1\right\}$
মাসিক (Monthly)	$A = P\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12n}$	$I = P\left\{\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12n} - 1\right\}$

বিশেষ দ্রষ্টব্য : (3) বর্তমান মূল্য ও বাটা :

P পরিমাণ টাকা কোন নির্দিষ্ট সময় পরে A পরিমাণ টাকাতে পরিণত হইলে, P কে A এর **বর্তমান মূল্য (Present Value,** বা **Worth)** বলা হয়। কোন নির্দিষ্ট সময়ান্তে সবৃদ্ধিমূল এবং উহার বর্তমান মূল্যের পার্থক্যকে **বাটা (Discount)** বলে।

মূলধন = P ; সবৃদ্ধিমূল = A ; n = বৎসরের সংখ্যা ; $r = 1$ টাকার 1 বৎসরের সুদ হইলে,

বর্তমান মূল্য = P ;

$$A = P(1+r)^n ; \quad P = A(1+r)^{-n}.$$

$$\therefore \; D = \text{বাটা} = A - P = A\{1-(1+r)^{-n}\}.$$

মন্তব্য : (1) সরল সুদের ক্ষেত্রে, $A=P(1+nr)$; $P=A/(1+nr)$.

$\therefore$ $D=$ প্রকৃত বাটা $=A-P=Anr/(1+nr)$. ... (1)

কিন্তু, ব্যাঙ্কের বাটা $=Anr$. ... (2)

$\therefore$ ব্যাঙ্কের লাভ $=Anr-\dfrac{Anr}{1+nr}=\dfrac{An^2r^2}{1+nr}$. ... (3)

(2) যদি $n=$ বৎসর সংখ্যা $(0<n<1)$, $r\%=$ শতকরা বার্ষিক সরল সুদের হার হয়, তবে ব্যাঙ্কের প্রচলিত বাটা দেওয়ার ফলে, ব্যাঙ্ক প্রকৃতপক্ষে $\left\{r\Big/\left(1-\dfrac{nr}{100}\right)\right\}\%$ হারে সুদ গ্রহণ করিল ; ইহা সহজেই দেখানো যায়।

বিশেষ দ্রষ্টব্য : (4) কার্যকরী সুদের হার :

1 টাকার 1 বৎসরের সুদ r টাকা হইলে, ইহাকে সুদের **নামিক হার (Nominal rate)** বলা হয় ; এবং সুদ 1 বৎসরে সমান সময় অন্তর m বার ধার্য্য হইলে, **কার্য্যকরী সুদের হার (Effective rate)** হইবে,

$$100\left\{\left(1+\frac{r}{m}\right)^m-1\right\}\%.$$

যেমন, 6 মাস অন্তে সুদ দেয় হইলে, অর্থাৎ, $m=2$ হইলে, কার্যকরী সুদের হার,

$$=100\left\{\left(1+\frac{r}{2}\right)^2-1\right\}\%.$$

আবার, সুদ তিন মাস অন্তর দেয় হইলে, অর্থাৎ, $m=4$ হইলে, কার্য্যকরী সুদের হার,

$$=100\left\{\left(1+\frac{r}{4}\right)^4-1\right\}\%.$$

উদাহরণস্বরূপ, বার্ষিক সুদের হার 8% হইলে, 100 টাকার 1 বৎসরের মোট সুদ হইবে 8 টাকা ; এবং বৎসরান্তে সবৃদ্ধিমূল হইবে 108 টাকা।

কিন্তু 6 মাস অন্তে সুদ দেয় হইলে, 6 মাস অন্তে 100 টাকার সুদ হইবে 4 টাকা ; সুতরাং 6 মাস অন্তে সবৃদ্ধিমূল হইবে 104 টাকা। এখন পরবর্তী 6 মাসের জন্য 104 টাকার উপর সুদ ধার্য্য হইবে, এবং ঐ সময়ের জন্য সুদের পরিমাণ হইবে $\frac{4}{100}\times104$ টাকা অর্থাৎ 4·16 টাকা। সুতরাং, দ্বিতীয় 6 মাস পরে, সবৃদ্ধিমূল $=104$ টাকা $+\,4{\cdot}16$ টাকা $=108{\cdot}16$ টাকা।

$\therefore$ বৎসরান্তে কার্য্যকরী সুদের হার $=(108{\cdot}16-100)\%$, অর্থাৎ, $8{\cdot}16\%$.

এস্থলে, 8% কে সুদের নামিক হার এবং 8·16% কে সুদের কার্য্যকরী হার বলে।

মন্তব্য : (1) সুদ গণনার কাল উল্লেখ না থাকিলে, বুঝিতে হইবে, সুদ বৎসরান্তে দেয়, অর্থাৎ, সুদ-পর্ব 1 বৎসর।

মন্তব্য : (2) যে নির্দিষ্ট সময় পর্যন্ত কোন মূলধন একটি নির্দিষ্ট সুদের হারে লগ্নী থাকে, সেই সময়টিকে লগ্নীকাল বলা হয়। সেই লগ্নীকাল অনেক সময় পূর্ণ বৎসর না হইয়া একটি বৎসরের কোন অংশ হইতে পারে। ঐ সময়ের জন্য সরল সুদের নিয়ম অনুযায়ী সুদ বাহির করিতে হইবে। যেমন,

$P=$ মূলধন ; $r=1$ টাকার 1 বৎসরের সুদ ; লগ্নীকাল $=\left(n+\frac{1}{q}\right)$ বৎসর

এখন, n বৎসর অন্তে সবৃদ্ধিমূল $=P(1+r)^n$ টাকা

এবং, $P(1+r)^n$ টাকার $\frac{1}{q}$ বৎসর সুদ $=P(1+r)^n.\ \frac{r}{q}$ টাকা

$\therefore$ নির্ণেয় সবৃদ্ধিমূল $=\left\{P(1+r)^n+P(1+r)^n\ .\ \frac{r}{q}\right\}$ টাকা

$$=P(1+r)^n\left(1+\frac{r}{q}\right) \text{ টাকা।}$$

$\therefore$ মোট সুদ $=P\left\{(1+r)^n\left(1+\frac{r}{q}\right)-1\right\}$ টাকা।

উদাহরণ 1. চক্রবৃদ্ধির বার্ষিক হার 9% হইলে, কত সময় অন্তে 500 টাকার সবৃদ্ধিমূল 838·60 টাকা হইবে ?

এখানে, $P=500$ টাকা ;

$A=838{\cdot}60$ টাকা ;

$r=\frac{9}{100}={\cdot}09.$ ধরি, বৎসরের সংখ্যা $=n.$

সুতরাং, $A=P(1+r)^n$ সূত্র হইতে পাই :

$$838{\cdot}60=500\times(1+{\cdot}09)^n$$

$\therefore\ \log 838{\cdot}6=\log 500+n\log 1{\cdot}09$

বা, $2{\cdot}92355=2{\cdot}69897+n\times0{\cdot}03743$ বা, $n\times0{\cdot}03743=0{\cdot}22458$

$\therefore\ n=\frac{0{\cdot}22458}{0{\cdot}03743}=6\ .$

$\therefore$ নির্ণেয় উত্তর : 6 বৎসর।

উদাহরণ 2. চক্রবৃদ্ধির বার্ষিক হার 10% হইলে, 10 বৎসর অন্তে 300 টাকার সবৃদ্ধিমূল কত হইবে ?

এখানে, $P=300$ টাকা ; $n=10$; $r=0{\cdot}1.$

$\therefore$ নির্ণেয় সবৃদ্ধিমূল $=A$ হইলে,

$A=P(1+r)^n$ সূত্র হইতে পাই :

$$A=300\times(1{\cdot}1)^{10}.$$

$\therefore \quad \log A = \log 300 + 10 \log 1{\cdot}1 = 2 + \log 3 + 10 \log 1{\cdot}1$

$= 2{\cdot}47712 + 10 \times (0{\cdot}04139)$

$= 2{\cdot}89102 = \log(778{\cdot}07).$

$\therefore \quad A = 778{\cdot}07$

$\therefore$ নির্ণেয় সবৃদ্ধিমূল = 778·07 টাকা, (প্রায়)।

উদাহরণ 3. যদি সুদ প্রতি 6 মাস অন্তর দেওয়া হয় এবং চক্রবৃদ্ধির হার বার্ষিক 6% হয়, তবে 3 বৎসর পরে দেয় 2000 টাকার বর্তমান মূল্য কত? প্রকৃত বাটা কত?

মনে করি, প্রারম্ভিক মূলধন = P টাকা।

এখন, সমূলচক্রবৃদ্ধি : $A = 2000$ টাকা ;

$r = \frac{6}{100} = 0{\cdot}06 ; \quad n = 3.$

তখন, $A = P\left(1 + \frac{r}{2}\right)^{2n}$ সূত্র হইতে পাই :

$2000 = P(1 + 0{\cdot}03)^6.$

$\therefore \quad \log 2000 = \log P + 6 \log 1{\cdot}03$

বা, $\log P = 3 + \log 2 - 6 \log 1{\cdot}03$

$= 3 + 0{\cdot}30103 - 6 \times 0{\cdot}01284$

$= 3{\cdot}22399 = \log(1674{\cdot}85)$

$\therefore \quad P = 1674{\cdot}85$

$\therefore$ নির্ণেয় প্রারম্ভিক মূলধন = 1674·85 টাকা (প্রায়) = বর্তমান মূল্য ;

এবং, নির্ণেয় বাটা = 325·15 টাকা।

উদাহরণ 4. বার্ষিক 8% হারে 3 বৎসরে সমান দুইটি মূলধনের সরল সুদ এবং চক্রবৃদ্ধির পার্থক্য 49·28 টাকা হইলে, প্রতিটি মূলধন কত? চক্রবৃদ্ধি কত?

এখনে, $r = \frac{8}{100} = 0{\cdot}08 ; \quad n = 3.$

মনে করি, প্রতিটি মূলধন = P টাকা।

তাহা হইলে, সরল সুদে (Simple Interest), P টাকার 3 বৎসরের সুদ

$= Pnr = P \times 3 \times 0{\cdot}08$ টাকা $= P \times 0{\cdot}24$ টাকা।

3 বৎসরে P টাকার চক্রবৃদ্ধি

$= P \times (1 + r)^n - P$

$= \{P(1 + 0{\cdot}08)^3 - P\}$ টাকা

$= P \times 0{\cdot}259712$ টাকা।

প্রদত্ত শর্তানুযায়ী,

$P \times 0·259712$ টা. $- P \times 0·24$ টা. $= 49·28$ টাকা

বা, $P \times 0·019712$ টাকা $= 49·28$ টাকা ;

$\therefore \quad P = \dfrac{49·28}{0·019712} = 2500.$

∴ নির্ণেয় মূলধন = 2500 টাকা।

∴ নির্ণেয় চক্রবৃদ্ধি $= P \times 0·259712$ টাকা

$= 2500 \times 0·259712$ টাকা

$= 649·28$ টাকা.

উদাহরণ 5. চক্রবৃদ্ধিতে লগ্নী কোন টাকার দ্বিতীয় বৎসর অন্তে **সবৃদ্ধিমূল** 11664 টাকা এবং তৃতীয় বৎসর অন্তে সবৃদ্ধিমূল 12597·12 টাকা হইলে সুদের **হার** এবং লগ্নীকৃত টাকার পরিমাণ নির্ণয় কর।

মনে করি, বাৎসরিক সুদের হার $= p\%$; এবং প্রারম্ভিক মূলধন P টাকা।

তাহা হইলে, $r = \dfrac{p}{100}$; এবং

$$P\left(1 + \frac{p}{100}\right)^3 = 12597·12 \qquad \ldots \qquad (1) ;$$

$$P\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 = 11664 \qquad \ldots \qquad (2).$$

(1) এবং (2) হইতে পাই,

$$1 + \frac{p}{100} = \frac{12597·12}{11664} = 1·08.$$

$\therefore \quad p = 8.$

সুতরাং, নির্ণেয় সুদের হার = বার্ষিক 8%.

এখন, (2) হইতে,

$P(1·08)^2 = 11664$;

বা, $P \times 1·1664 = 11664.$

$\therefore \quad P = 10{,}000.$

সুতরাং, লগ্নীকৃত টাকার পরিমাণ = 10,000 টাকা।

উদাহরণ 6. এক ব্যক্তি তাঁহার 5 বৎসর এবং 8 বৎসর বয়স্ক দুই পুত্রের জন্য 40,000 টাকা ব্যাঙ্কে রাখিয়া গেলেন এবং ব্যাঙ্ক কর্তৃপক্ষকে এই নির্দেশ দিলেন যে, পুত্রদ্বয়ের বয়স যখন 25 বৎসর হইবে, তখন তাহারা ব্যাঙ্ক হইতে টাকা তুলিতে পারিবে। ব্যাঙ্কে চক্রবৃদ্ধির হার বার্ষিক 9% হইলে এবং 25 বৎসর বয়সে তাহারা সমপরিমাণ টাকা পাইলে তাহাদের প্রত্যেকের নামে ব্যাঙ্কে কত পরিমাণ করিয়া টাকা জমা ছিল এবং 25 বৎসর বয়সে কত পরিমাণ করিয়া টাকা তাহারা পাইয়াছিল ?

মনে করি, 25 বৎসর বয়সে প্রত্যেক পুত্র A পরিমাণ করিয়া টাকা পাইয়াছিল ; এবং প্রথম পুত্র ও দ্বিতীয় পুত্রের নামে ব্যাঙ্কে প্রথমে P_1 টাকা ও P_2 টাকা জমা ছিল। সুতরাং শর্তানুযায়ী,

$$P_1 + P_2 = 40{,}000 \; ; \quad \ldots \quad (1)$$

$$A = P_1(1{\cdot}09)^{20} \; ; \text{ অর্থাৎ, } P_1 = A(1{\cdot}09)^{-20} \; ; \; \cdots \quad (2)$$

$$A = P_2(1{\cdot}09)^{17} \; ; \text{ অর্থাৎ } P_2 = A(1{\cdot}09)^{-17}. \; \ldots \quad (3)$$

$$\therefore \; 40{,}000 = P_1 + P_2$$

$$= A(1{\cdot}09)^{-20} + A(1{\cdot}09)^{-17}$$

$$= A(0{\cdot}178404 + 0{\cdot}231042) = A \times 0{\cdot}409446$$

$$\therefore \; A = \frac{40000}{0{\cdot}409446}$$

$$\therefore \; \log A = 4 + 2 \log 2 - \log 0{\cdot}409446$$

$$= 4{\cdot}98986$$

$$\therefore \; A = 97690{\cdot}30$$

$$x = (1{\cdot}09)^{-20} \; ;$$

$$\log x = -20 \times \log 1{\cdot}09$$

$$= \bar{1}{\cdot}2514$$

$$\therefore \; x = 0{\cdot}178404,$$

$$y = (1{\cdot}09)^{-17}$$

$$\log y = -17 \times \log 1{\cdot}09$$

$$= \bar{1}{\cdot}36369$$

$$\therefore \; y = 0{\cdot}231042$$

$$\therefore \; P_1 = A \times (1{\cdot}09)^{-20}$$

$$= 97690{\cdot}30 \times 0{\cdot}178404$$

$$\rightarrow 17428{\cdot}34$$

$$\therefore \; P_2 = 40000 - 17428{\cdot}34 = 22571{\cdot}66.$$

সুতরাং, প্রথম ও দ্বিতীয় পুত্রের নামে যথাক্রমে 17428·34 টাকা এবং 22571·66 টাকা ব্যাঙ্কে প্রথমে জমা ছিল ; এবং 25 বৎসর বয়সে প্রত্যেক পুত্র 97690·30 টাকা পাইয়াছিল।

প্রশ্নমালা 34

1. বার্ষিক 6% চক্রবৃদ্ধি হারে 10,000 টাকার 4 বৎসর অন্তে সমূলচক্রবৃদ্ধি কত হইবে ?

2. বার্ষিক $6\frac{1}{2}$% চক্রবৃদ্ধি হারে 3500 টাকার 5 বৎসরে চক্রবৃদ্ধি কত হইবে ?

3. বার্ষিক 8% চক্রবৃদ্ধি হারে কত টাকা 5 বৎসরে সুদে-আসলে 4000 টাকা হইবে ?

4. চক্রবৃদ্ধির হার কত হইলে 3 বৎসর অন্তে 10,000 টাকার চক্রবৃদ্ধি 1576·25 টাকা হইবে ?

5. কত বৎসর অন্তে বার্ষিক 6% চক্রবৃদ্ধি হারে 2500 টাকার চক্রবৃদ্ধি 477·54 টাকা হইবে ?

6. বার্ষিক $5\frac{1}{2}$% চক্রবৃদ্ধি হারে কত টাকা 15 বৎসরে সুদে-মূলে 5000 টাকা হইবে ? [**B. U. 1967**]

7. বার্ষিক 12% চক্রবৃদ্ধি হারে 5000 টাকা কত বৎসরে 48,235·80 টাকা হইবে ?

8. বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি হারে কোন মূলধন 2 বৎসর অন্তে 1102 টাকা 50 পয়সা এবং 3 বৎসর অন্তে 1157 টাকা 62·5 পয়সা সুদে-আসলে হইলে, মূলধন এবং সুদের বার্ষিক হার নির্ণয় কর।

9. বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি হারে (6 মাস অন্তর সুদ দেয়) কত টাকা 2 বৎসর অন্তে সুদে-মূলে 5000 টাকা হইবে ?

10. বার্ষিক 6% চক্রবৃদ্ধি হারে (6 মাস অন্তর সুদ দেয়) 2400 টাকার চক্রবৃদ্ধি 3 বৎসর অন্তে কত হইবে ?

11. অর্ধ-বৎসরান্তে দেয় 5% হারের চক্রবৃদ্ধি, বৎসরান্তে দেয় শতকরা কত হারের সমান ?

12. সুদ তিন মাস অন্তর দেয় এবং চক্রবৃদ্ধির হার বার্ষিক 8% হইলে, কত সময়ে 1200 টাকার চক্রবৃদ্ধি 124 টাকা 89 পয়সা হইবে ?

13. প্রতি 6 মাস অন্তে সুদ দেয় এবং চক্রবৃদ্ধির হার বার্ষিক 5% হইলে, $2\frac{1}{2}$ বৎসরে 1000 টাকা কততে পরিণত হইবে ?

14. বার্ষিক 6% চক্রবৃদ্ধি হারে (3 মাস অন্তর সুদ দেয়) 4 বৎসরের জন্য 5000 টাকা ব্যাঙ্কে রাখা হইল। 4 বৎসর অন্তে সমূলচক্রবৃদ্ধি নির্ণয় কর।

15. 500 টাকার বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি হারে (3 মাস অন্তর সুদ দেয়) 4 বৎসর অন্তে কত চক্রবৃদ্ধি হইবে ? বার্ষিক কার্যকরী সুদের হার কত ?

16. যদি 6 মাস অন্তর সুদ দেয় হয় এবং প্রথম ও দ্বিতীয় বৎসরের সুদের হার বার্ষিক যথাক্রমে 5% এবং 6% হয়, তবে 8000 টাকার 2 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি কত হইবে ?

17. কোন মূলধনের বার্ষিক 5% হারে 3 বৎসরের সরল সুদ এবং চক্রবৃদ্ধির পার্থক্য 228·75 টাকা হইলে, মূলধন নির্ণয় কর।

18. এক ব্যক্তি বার্ষিক 6% হারে সরল সুদে কিছু টাকা ধার করিয়া বার্ষিক 10% চক্রবৃদ্ধি হারে সেই টাকা অন্যকে ধারে দিল। ইহাতে যদি 4 বৎসরান্তে তাহার 2241 টাকা লাভ হয়, তবে সেই ব্যক্তি কত টাকা ধার করিয়াছিল ?

19. এক ব্যক্তি বার্ষিক 8% হার সরল সুদে 5000 টাকা ধার করিয়া ঐ দিনই সমস্ত টাকা অপর এক ব্যক্তিকে 8% চক্রবৃদ্ধি হারে ধারে দিল। 3 বৎসর অন্তে প্রথমোক্ত ব্যক্তি কত টাকা লাভ করিবে ?

20. A 5% চক্রবৃদ্ধি হারে 5000 টাকা C কে ধার দিল ; এবং B ঠিক একই পরিমাণ টাকা ঐ দিনই $5\frac{1}{4}$% সরল সুদে C কে ধার ছিল। 3 বৎসর পরে কে অধিক লাভবান্ হইবে এবং কত অধিক লাভবান্ হইবে ?

21. সুদ 6 মাস অন্তর দেয় হইলে, বার্ষিক 6% চক্রবৃদ্ধি হারে কত সময় পরে সবৃদ্ধিমূল আসলের তিনগুণ হইবে ?

22. সুদ 3 মাস অন্তর দেয় হইলে, বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি কত হারে কোন মূলধন 10 বৎসরে 3 গুণ হইবে ?

23. এক ব্যক্তি তাঁহার 10 বৎসর ও 13 বৎসর বয়স্ক দুই পুত্রের মধ্যে 18,750 টাকা এরূপভাবে ভাগ করিয়া ব্যাঙ্কে জমা দিলেন যে, তাহাদের বয়স যখন 30 বৎসর হইবে তখন তাহারা উভয়ে একই পরিমাণ টাকা পাইবে। সুদের বার্ষিক হার 5% হইলে, কনিষ্ঠ পুত্রের ভাগে কত টাকা জমা পড়িয়াছিল ? [B. U. 1969]

24. এক ব্যক্তি তাঁহার 10 বৎসর ও 13 বৎসর বয়স্ক দুই পুত্রের মধ্যে 20,000 টাকা এইরূপে ভাগ করিয়া ব্যাঙ্কে জমা দিলেন যে, প্রত্যেক পুত্রের বয়স যখন 25 বৎসর হইবে তখন তাহারা প্রত্যেকে একই পরিমাণ টাকা পাইবে। সুদের বার্ষিক হার 8% হইলে, কনিষ্ঠ পুত্রের ভাগে প্রথমে কত টাকা ব্যাঙ্কে জমা পড়িয়াছিল তাহা নির্ণয় কর।

25. এক ব্যক্তি তাঁহার 10, 12 ও 14 বৎসর বয়স্ক তিন পুত্রের নামে যথাক্রমে 10,000 টাকা, 8,000 টাকা এবং 6,000 টাকা রাখিয়া গেলেন। ঐ অর্থ যথাক্রমে 3%, 6% ও 10% চক্রবৃদ্ধি হারে নিয়োজিত থাকিলে, পুত্রেরা প্রত্যেকে তাহাদের 30 বৎসর বয়সে কত পরিমাণ করিয়া অর্থ ফেরৎ পাইবে ? [C. U. 1967]

26. এক ব্যক্তি 1960 সালের ১লা জুলাই 6,000 টাকা মহাজনের নিকট হইতে ঋণ করিলেন। তিনি প্রতি বৎসরের শেষে ধার্য্য সুদ দিতে না পারায় প্রাপ্য সুদ চক্রবৃদ্ধি হারে ধরা হইল। 1964 সালের ১লা জুলাই তিনি মহাজনের নিকট হিসাব নিষ্পত্তির জন্য আবেদন করেন ; এবং ইহাতে মহাজন তাঁহার নিকট 7,293 টাকা দাবী করেন। সুদের বার্ষিক হার নির্ণয় কর।

27. দেখাও যে, 10% বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি হারে ব্যাঙ্কে সঞ্চিত টাকা 25 বৎসরে 10 গুণের অধিক বৃদ্ধি পাইবে।

10-4. বার্ষিকী বা বার্ষিক বৃত্তি (Annuity) :

কোন শর্তাধীনে প্রতি বৎসর অন্তর দেয় কোন নির্দিষ্ট পরিমাণ অর্থকে (তাহা সুদ হউক, বা, ভাড়া হউক, বা, পেন্‌সন্ হউক) **বার্ষিকী** বলে। যে সামগ্রিক সময়ের জন্য বার্ষিকী প্রদান করা হয় তাহাকে **মেয়াদ** বলা হয়। এই মেয়াদ কয়েক বৎসর হইতে পারে, আবার চিরকালের জন্যও হইতে পারে। এক একটি বার্ষিকী প্রদানকে এক একটি **কিস্তি** বলা হয়।

পর পর দুইটি কিস্তি প্রদানের অন্তর্বর্তী সময়কে কিস্তি প্রদানের বিরাম বলে। বার্ষিকীর ক্ষেত্রে সুদ সর্বদা চক্রবৃদ্ধি হারে গণনীয়।

মনে করা যাক্, প্রতিটি কিস্তির পরিমাণ A টাকা। এখন, 1 টাকায় 1 বৎসরের সুদ r টাকা হইলে, চক্রবৃদ্ধি হারে, P_1 টাকার 1 বৎসরের সবৃদ্ধি মূল $= P_1(1+r)$ টাকা ; এখন, প্রথম কিস্তির পরিমাণ $P_1(1+r)$ টাকা হইলে, উহার বর্তমান মূল্য P_1 টাকা হইবে ; তাহা হইলে, $A = P_1(1+r)$; অর্থাৎ, $P_1 = A(1+r)^{-1}$. সুতরাং, প্রথম কিস্তির বর্তমান মূল্য $= A(1+r)^{-1}$ টাকা ; সেইরূপ, বার্ষিকী A টাকার দ্বিতীয় কিস্তির বর্তমান মূল্য, $P_2 = A(1+r)^{-2}$ টাকা ইত্যাদি।

কোন বার্ষিকীর বিভিন্ন কিস্তির বর্তমান মূল্যের সমষ্টিকে ঐ বার্ষিকীর **বর্তমান মূল্য** (**Present value**) বলে।

মনে করি, বার্ষিক বৃত্তি পাইবেন এইরূপ কোন ব্যক্তি ভবিষ্যতের কিস্তিসমূহের পরিবর্তে বর্তমানে এককালীন সমুদয় টাকা পাইতে ইচ্ছুক। তাহা হইলে, ঐ ব্যক্তির বর্তমানে যত পরিমাণ টাকা পাওয়া উচিত, তাহাই ঐ বার্ষিকীর মোট বর্তমান মূল্যের সমান।

চক্রবৃদ্ধিহারে n বৎসর মেয়াদী বার্ষিকী-প্রদানসমূহ জমিতে থাকিলে n বৎসরের শেষে জমানো অর্থকে বার্ষিকীর **মোট মূল্য** (**Amount**) বলা হয়।

10-5. বিভিন্ন শ্রেণীর বার্ষিকী।

[1] (a) **প্রত্যক্ষ বার্ষিকী (Immediate Annuity) :**

যদি কোন বার্ষিকী-প্রদান বর্তমানেই প্রতি বৎসরের শেষে দেয় হয়, তবে সেইরূপ বার্ষিকীকে **প্রত্যক্ষ বার্ষিকী** বলে।

(b) দেয় বার্ষিকী (Annuity Due) :

কোন বার্ষিকী-প্রদান বর্তমানেই প্রতি বৎসরের শুরুতে দেয় হইলে, সেইরূপ বার্ষিকীকে **দেয় বার্ষিকী** বলে।

মন্তব্য : কিছু বলা না থাকিলে, বার্ষিকী দ্বারা প্রত্যক্ষ বার্ষিকীকে বুঝাইবে।

[2] (a) মেয়াদী বার্ষিকী (Annuity Certain) :

যদি কোন বার্ষিকী-প্রদান কেবলমাত্র নির্দিষ্ট কয়েক বৎসরের জন্য দেয় হয়, তবে সেইরূপ বার্ষিকীকে **মেয়াদী বার্ষিকী** বলে।

(b) চিরস্থায়ী বার্ষিকী (Perpetual Annuity বা, Perpetuity) :

যদি কোন বার্ষিকী-প্রদান চিরকাল ধরিয়া চলিতে থাকে, তবে সেইরূপ বার্ষিকীকে **চিরস্থায়ী বার্ষিকী** বলে।

[3] বিলম্বিত বার্ষিকী (Deferred Annuity) :

যে বার্ষিকী-প্রদান কিছু সময় পর কার্যকরী বা আরম্ভ হয় তাহাকে **বিলম্বিত বার্ষিকী** বলে।

কোন বার্ষিকী-প্রদান n বৎসর বিলম্বিত হইলে, উহা n বৎসরের শেষে কার্যকরী হইবে এবং প্রথম কিস্তির টাকা $(n+1)$ বৎসর অন্তে দেয় হইবে।

স্থগিত কালের জন্য চক্রবৃদ্ধি সহ সমস্ত কিস্তির অর্থের সমষ্টিকে বার্ষিকীর মোট অর্থ বলা হয়।

কোন বার্ষিকী-প্রদান কিছু সময় অন্তে শুরু হইয়া বরাবর চলিতে থাকিলে, সেইরূপ বার্ষিকীকে **বিলম্বিত চিরস্থায়ী বার্ষিকী (Deferred Perpetuity)** বলে।

[4] অনাদায়ী বার্ষিকী (Unpaid, or, Foreborne Annuity) :

যদি কোন বার্ষিকী-প্রদান কোন নির্দিষ্ট সময়ের জন্য অনাদায়ী থাকে তবে সেই বার্ষিকীকে ঐ নির্দিষ্ট সময়ের জন্য অনাদায়ী বলা হয়। অনাদায়ী সময়ের জন্য সুদ সমেত বিভিন্ন কিস্তির মোট অর্থকে **অনাদায়ী বার্ষিকীর মোট পরিমাণ (Amount)** বলে।

দ্রষ্টব্য :

(i) লিজ সম্পত্তি (Leasehold Estate) :

কোন নির্দিষ্ট সময়ের জন্য স্বত্বাধিকারবিশিষ্ট সম্পত্তিকে **লিজ সম্পত্তি** বা **পাট্টা** বা **ইজারা** বা **লিজ** বলে। এইরূপ সম্পত্তির খাজানা, অর্থাৎ, বার্ষিকী-প্রদান যত বৎসরের জন্য লিজ ততদিন ধরিয়া চলিবে।

(ii) চিরস্থায়ী বা চিরসত্ত্ব সম্পত্তি (Freehold Estate) :

যে সম্পত্তি চিরস্থায়ী বার্ষিকী উৎপন্ন করে তাহাকে চিরস্থায়ী সম্পত্তি বলে। এইরূপক্ষেত্রে, চিরস্থায়ী বার্ষিকীকে **খাজানা** (Rent) বলা হয়। চিরস্বত্ব সম্পত্তির মূল্য উহার সমস্ত খাজানার বর্তমান মূল্যের সমান।

মন্তব্য : বার্ষিকীর মত কোনও শর্তাধীনে যে কোন নির্দিষ্ট সময় অন্তর কোন নিদিষ্ট পরিমাণ অর্থ দেয় হইতে পারে।

10·6. (a) নির্দিষ্ট মেয়াদী বার্ষিকীর বর্তমান মূল্য নির্ণয় :

মনে করা যাক, 1 টাকার 1 বৎসরের সুদ $= r$ টাকা, এবং বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি স্বীকৃত ; এবং বার্ষিক বৃত্তি A টাকা। ধরা যাক্, 1 বৎসর পরে দেয় A টাকার বর্তমান মূল্য P_1 টাকা।

এখন, P_1 টাকার 1 বৎসরের সুদ $= P_1 r$ টাকা বলিয়া,

$$A = P_1 + P_1 r = P_1(1+r) ;$$

অর্থাৎ, $P_1 = A(1+r)^{-1}$.

সুতরাং,

প্রথম কিস্তিতে দেয় A টাকার বর্তমান মূল্য $= A(1+r)^{-1}$ টাকা।

সেইরূপ,

দ্বিতীয় কিস্তিতে দেয় টাকার বর্তমান মূল্য $= A(1+r)^{-2}$ টাকা ;

তৃতীয় কিস্তিতে দেয় টাকার বর্তমান মূল্য $= A(1+r)^{-3}$ টাকা ;

... ...

... ...

n-তম কিস্তিতে দেয় টাকার বর্তমান মূল্য $= A(1+r)^{-n}$ টাকা।

বিভিন্ন n কিস্তিতে দেয় টাকার মোট বর্তমান মূল্য V টাকা হইলে,

$$V = A(1+r)^{-1} + A(1+r)^{-2} + \cdots \quad \cdots \quad + A(1+r)^{-n}$$

$$= A[R + R^2 + R^3 + \quad \cdots \quad \cdots \quad + R^n] ; \quad \left(R = \frac{1}{1+r}\right) ;$$

$$= AR[1 + R + R^2 + \quad \cdots \quad \cdots \quad + R^{n-1}]$$

$$= AR\left(\frac{1-R^n}{1-R}\right)$$

$$\therefore \quad V = \frac{A}{r}\left\{1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right\}.$$

(b) চিরস্থায়ী বার্ষিক বৃত্তির বর্ত্তমান মূল্য নির্ণয় ঃ

প্রত্যেক কিস্তির পরিমাণ A টাকা হইলে, বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি-হার স্বীকৃত থাকিলে, এবং 1 টাকার 1 বৎসরের সুদ r টাকা হইলে ; এবং চিরস্থায়ী বার্ষিকীর বর্তমান মূল্য V টাকা হইলে,

$$V=\frac{A}{r}\left\{1-\frac{1}{(1+r)^n}\right\} \quad (\text{যেখানে, } n\to\infty)$$

$$\to\frac{A}{r}\{1-0\}=\frac{A}{r}.$$

$$\therefore\quad V=\frac{A}{r}.$$

মন্তব্য ঃ (*i*) চিরস্থায়ী বার্ষিকীর ক্ষেত্রে, সমস্ত বার্ষিক বৃত্তির মোট বর্তমান মূল্যকে উহার **ক্রয় মূল্য** (*purchase-price*) বা সংক্ষেপে মূল্য (*price*) বলা হয়।

(*ii*) n বৎসর মেয়াদী কোন বার্ষিক বৃত্তি A টাকার বর্তমান মূল্য mA টাকা হইলে, এই বার্ষিক বৃত্তিকে worth m years' purchase বলা হয়।

10-7. (a) বিলম্বিত নির্দিষ্ট মেয়াদী বার্ষিকীর বর্ত্তমান মূল্য নির্ণয় ঃ

মনে করি, 1 টাকার 1 বৎসরের সুদ r টাকা এবং বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি হার স্বীকৃত। ধরা যাক্, কোন বার্ষিকী m বৎসর বিলম্বিত এবং তাহার পর n বৎসর ধরিয়া উহা চলিতে থাকিবে ; এবং প্রতিটি কিস্তির মূল্য A টাকা।

প্রদত্ত শর্তানুযায়ী—প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়,......n-তম কিস্তিগুলি যথাক্রমে $(m+1)$, $(m+2)$, $(m+3)$, ...$(m+n)$ বৎসর অন্তে দেয় হইবে। তাহা হইলে, তাহাদের বর্তমান মূল্যগুলি যথাক্রমে ঃ

$$\frac{A}{(1+r)^{m+1}}\text{ টা.};\ \frac{A}{(1+r)^{m+2}}\text{ টা.};\ \frac{A}{(1+r)^{m+3}}\text{ টা.};$$

$$\cdots\qquad\cdots\qquad\frac{A}{(1+r)^{m+n}}\text{ টা.।}$$

$\therefore$ m বৎসর বিলম্বিত n বৎসর মেয়াদী বার্ষিকী A টাকার বর্তমান মূল্য V টাকা হইলে,

$$V=\left[\frac{A}{(1+r)^{m+1}}+\frac{A}{(1+r)^{m+2}}+\quad\cdots\cdots+\frac{A}{(1+r)^{m+n}}\right]$$

$$=A(R^{m+1}+R^{m+2}+\cdots\cdots+R^{m+n});\ \left[R=\frac{1}{1+r}\right]$$

$$= AR^{m+1}\{1 + R + R^2 + \ldots \ldots + R^{n-1}\}$$

$$= AR^{m+1} \cdot \frac{1 - R^n}{1 - R}.$$

$$= A.\frac{R}{1-R} \cdot \{R^m - R^{m+n}\}$$

$$= \frac{A}{r}\left\{\frac{1}{(1+r)^m} - \frac{1}{(1+r)^{m+n}}\right\}$$

$$\therefore \quad V = \frac{A}{r}\left\{1 - \frac{1}{(1+r)^{m+n}}\right\} - \frac{A}{r}\left\{1 - \frac{1}{(1+r)^m}\right\}.$$

$=\{(m+n)$ বৎসর মেয়াদী বার্ষিকী A টাকার বর্তমান মূল্যের পরিমাণ $\}$
$-\{m$ বৎসর মেয়াদী বার্ষিকী A টাকার বর্তমান মূল্যের পরিমাণ $\}$।

(b) বিলম্বিত চিরস্থায়ী বার্ষিকীর বর্তমান মূল্য নির্ণয় ঃ

1 টাকার 1 বৎসরের সুদ r টাকা হইলে, বার্ষিক চক্রবৃদ্ধির হার স্বীকৃত থাকিলে ; এবং m বৎসর বিলম্বিত চিরস্থায়ী বার্ষিকী A টাকার বর্তমান মূল্য V টাকা হইলে,

$$V = \frac{A}{r}\left[\frac{1}{(1+r)^m} - \frac{1}{(1+r)^{m+n}}\right]; \quad (\text{যেখানে}, \quad n \to \infty)$$

$$\to \frac{A}{r} \cdot \left\{\frac{1}{(1+r)^m} - 0\right\} = \frac{A}{r} \quad \frac{1}{(1+r)^m}.$$

$$\therefore \quad V = \frac{A}{r} \cdot \frac{1}{(1+r)^m}.$$

10-8. n বৎসর অনাদায়ী বার্ষিকীর মোট পরিমাণ নির্ণয় ঃ

মনে করি, 1 টাকার 1 বৎসরের সুদ r টাকা ; এবং বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি স্বীকৃত।

ধরা যাক্, প্রতি কিস্তির মূল্য A টাকা।

যেহেতু, বার্ষিকী n বৎসর অনাদায়ী, প্রথম বৎসর অন্তে দেয় বার্ষিকী $(n-1)$ বৎসর অনাদায়ী থাকায় উহা বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি হারে $(n-1)$ বৎসরের জন্য সুদ অর্জন করিবে। সুতরাং, প্রথম বৎসর অন্তে দেয় বার্ষিকীর সবৃদ্ধিমূল $= A(1+r)^{n-1}$.

অনুরূপভাবে, দ্বিতীয় বৎসর অন্তে দেয় বার্ষিকী $(n-2)$ বৎসর সুদ অর্জন করিবে। সুতরাং, দ্বিতীয় বৎসর অন্তে দেয় বার্ষিকীর সবৃদ্ধিমূল $= A(1+r)^{n-2}$; ইত্যাদি। n-তম বৎসরের শেষে দেয় বার্ষিকী কোন সুদ অর্জন করিবে না।

∴ n বৎসর অনাদায়ী বার্ষিকীর মোট পরিমাণ M টাকা হইলে,

$$M=\{A(1+r)^{n-1}+A(1+r)^{n-2}+\ \ldots..+A(1+r)+A\}$$
$$=\{1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{n-1}\};\quad (\text{যেখানে,}\quad x=1+r)$$
$$=A.\frac{x^n-1}{x-1}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{M=\frac{A}{r}\{(1+r)^n-1\}.}$$

দ্রষ্টব্য ঃ n বৎসর মেয়াদী বার্ষিকী A টাকার মোট মূল্য M টাকা হইলে,

$$M=\frac{A}{r}\{(1+r)^n-1\};$$

যেখানে, $r=1$ টাকার 1 বৎসরের সুদ।

10-9. প্রাপ্যগুলি (Payments) বৎসর অন্তে দেয় নয়, এইরূপ বার্ষিকী বৃত্তি ঃ

ধরা যাক্‌, বার্ষিকী A টাকা বৎসরে q বার দেয় এবং চক্রবৃদ্ধির হারও বৎসরে q বার অর্থাৎ চক্রবৃদ্ধির পর্ব $\frac{1}{q}$ বৎসর। তাহা হইলে, প্রতি কিস্তির টাকার পরিমাণ হইবে A/q এবং n বৎসরের কিস্তির সংখ্যা হইবে nq.

ধরি, $X=A/q$; $N=nq$; $M=mq$; $s=r/q$;

যেখানে, 1 টাকার 1 বৎসরের সুদ $=r$ টাকা।

[a] (i) n বৎসর মেয়াদী বার্ষিকীর ক্ষেত্রে কিস্তিসমূহের বর্তমান মূল্য ঃ

$$V=\frac{X}{s}\left\{1-\frac{1}{(1+s)^{\mathrm{N}}}\right\}.$$

(ii) চিরস্থায়ী বার্ষিকীর ক্ষেত্রে, বর্তমান মূল্য ঃ

$$V=\frac{X}{s}=\frac{A}{r}.$$

(iii) m বৎসর বিলম্বিত n বৎসর মেয়াদী বার্ষিকীর বর্তমান মূল্য ঃ

$$V=\frac{X}{s}\left\{1-\frac{1}{(1+s)^{\mathrm{M+N}}}\right\}-\frac{X}{s}\left\{1-\frac{1}{(1+s)^{\mathrm{M}}}\right\}.$$

(iv) m বৎসর বিলম্বিত চিরস্থায়ী বার্ষিকীর বর্তমান মূল্য ঃ

$$V=\frac{X}{s}\cdot\frac{1}{(1+s)^{\mathrm{M}}}.$$

[৮] (i) n বৎসর মেয়াদী অনাদায়ী বার্ষিকী A টাকার মোট মূল্য :

$$M=\frac{X}{s}\{(1+s)^{N}-1\}.$$

(ii) n বৎসরের অনাদায়ী বার্ষিকীর মোট পরিমাণ :

$$M=\frac{X}{s}\{(1+s)^{N}-1\}.$$

10-10. ঋণশোধক তহবিল (Sinking Fund) :

নির্দিষ্ট সময় পরে কোন দায় (Liability) বা ঋণ মুক্ত হইবার জন্য, অথবা, ভবিষ্যতে কোন নির্দিষ্ট সময়ে কোন অবক্ষয়ী সম্পত্তি বদলাইবার জন্য প্রতি বৎসর অথবা নির্দিষ্ট সময় অন্তর চক্রবৃদ্ধি হারে কোন নির্দিষ্ট পরিমাণ টাকা লগ্নী করিয়া যে তহবিল (Fund) গড়িয়া তোলা হয়, তাহাকে **ঋণশোধক তহবিল** বলে।

প্রতি বৎসর অন্তে যে পরিমাণ করিয়া অর্থ লগ্নী করা হয় তাহা A হইলে, এবং n বৎসর পরে যে পরিমাণ টাকা লগ্নী মারফত পাওয়া যাইবে তাহা M হইলে,

$$M=\frac{A}{r}\{(1+r)^{n}-1\},$$

যেখানে, r টাকা $=1$ টাকার 1 বৎসরের সুদ। কিন্তু, বৎসরে q বার লগ্নী করিলে,

$$M=\frac{A}{r}\left\{\left(1+\frac{r}{q}\right)^{nq}-1\right\}.$$

10-11. বৃত্তিদান তহবিল (Endowment Fund) :

কোন চিরস্থায়ী বার্ষিক বৃত্তি প্রদানের নিমিত্ত এককালীন, অথবা, নির্দিষ্ট সময়, বা, চিরকাল ধরিয়া অর্থ লগ্নী করিয়া যে তহবিল গড়িয়া তোলা হয়, তাহাকে **বৃত্তিদান তহবিল** বলে।

উদাহরণ 1. বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি 8% হারে, 10 বৎসর মেয়াদী বার্ষিকী 3000 টাকার (i) বর্তমান মূল্য এবং (ii) অনাদায়ী থাকিলে, মোট অর্থ নির্ণয় কর।

এখানে, $A=3000$ টাকা ;

$r=\frac{8}{100}=0{\cdot}08$;

$n=10.$

$\therefore\quad V=\frac{A}{r}\left\{1-\frac{1}{(1+r)^{n}}\right\}$ সূত্র হইতে,

$$V=\frac{3000}{0^{\cdot}08}\left\{1-\frac{1}{(1^{\cdot}08)^{10}}\right\}$$
$$=\frac{3000,00}{8}\times(1-0^{\cdot}46323)$$
$$=\frac{3000,00}{8}\times0^{\cdot}53677$$
$$=20128^{\cdot}875$$

$x=(1^{\cdot}08)^{-10}$;
$\log x=-10\log 1^{\cdot}08$
$=-10\times{}^{\cdot}03342$
$=-{}^{\cdot}33420$
$=\bar{1}^{\cdot}66580$
$\therefore\ x=0^{\cdot}46323$

$\therefore$ (*i*) বর্তমান মূল্য = 20128 88 টাকা (প্রায়)।

$M=\frac{A}{r}\{(1+r)^n-1\}$ সূত্র হইতে,

$$M=\frac{3000}{0^{\cdot}08}\{(1^{\cdot}08)^{10}-1\}$$
$$=\frac{3000,00}{8}(2^{\cdot}1587-1)$$
$$=\frac{3000,00}{8}\times1^{\cdot}1587$$
$$=43451^{\cdot}25$$

$k=(1^{\cdot}08)^{10}$;
$\log k=10\log 1^{\cdot}08$
$=10\times{}^{\cdot}03342$
$=0^{\cdot}33420$
$\therefore\ k=2^{\cdot}1587$

$\therefore$ (*ii*) মোট মূল্য = 43451·25 টাকা।

উদাহরণ 2. এক ব্যক্তি 4000 টাকা এই শর্তে ধার করিল যে, সে সুদ সহ সমুদয় টাকা 6টি সমান বার্ষিক কিস্তিতে পরিশোধ করিবে। ঠিক হইল যে, প্রথম কিস্তি এক বৎসর পরে দেয় হইবে। বার্ষিক চক্রবৃদ্ধির হার 5% হইলে, প্রতিটি কিস্তির পরিমাণ নির্ণয় কর। [B. U. 1968]

এখানে, $V=\frac{A}{r}\left\{1-\frac{1}{(1+r)^n}\right\}$ সূত্রে,

$V=4000$; $r=\frac{5}{100}=0^{\cdot}05$: $n=6$;

A = প্রতিটি কিস্তির পরিমাণ।

$$\therefore\ 4000=\frac{A}{{}^{\cdot}05}\{1-(1^{\cdot}05)^{-6}\}$$

মনে করি, $x=(1^{\cdot}05)^{-6}$;

$\therefore\ \log x=-6\log 1^{\cdot}05=-6\times0^{\cdot}02119$
$=\bar{1}^{\cdot}87286$
$\therefore\ x=0^{\cdot}74621.$

$$\therefore \quad A = \frac{4000 \times \cdot 05}{1 - \cdot 74621} = \frac{200}{\cdot 25379}$$

$$\therefore \quad \log A = 2 + \log 2 - \log \cdot 25379$$
$$= 2 + \cdot 30103 - (\bar{1}\cdot 40446)$$
$$= 3 + \cdot 30103 - \cdot 40446$$
$$= 2\cdot 89657$$
$$\therefore \quad A = 788\cdot 09.$$

স্থতরাং, প্রতিটি কিস্তির পরিমাণ : 788 টাকা (প্রায়)।

উদাহরণ 3. এক ব্যক্তি 40,000 টাকায় নিম্নলিখিত শর্তে একটি বাড়ী ক্রয় করিবেন : তিনি নগদ 10,000 টাকা বাড়ী ক্রয়ের সঙ্গে সঙ্গে প্রদান করিবেন এবং বাকী টাকা বার্ষিক 10টি সমান কিস্তিতে পরিশোধ করিতে স্বীকৃত হইবেন এবং ক্রয়ের দিন হইতে এক বৎসর পরে প্রথম কিস্তির টাকা দিতে রাজী হইবেন। বার্ষিক চক্রবৃদ্ধির হার 5% হইলে, প্রত্যেক কিস্তির পরিমাণ নির্ণয় কর। [**B. U. 1966**]

বাড়ীর বর্তমান মোট মূল্য = 40,000 টাকা ; ক্রয়ের সময়ে প্রদত্ত অর্থ = 10,000 টাকা। স্থতরাং, বাকী যে টাকা তাহাকে 10টি সমান কিস্তিতে পরিশোধ করিতে হইবে তাহা 30,000 টাকা। মনে করি, বার্ষিক কিস্তির পরিমাণ = A টাকা।

স্থতরাং, 10 বৎসর মেয়াদী বার্ষিকী A টাকার বর্তমান মূল্য = 30,000 টাকা।

এখন, $V = \frac{A}{r}\left\{1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right\}$ সূত্র হইতে,

$$30{,}000 = \frac{A}{\cdot 05}\{1 - (1\cdot 05)^{-10}\}.$$

ধরি. $x = (1\cdot 05)^{-10}$.

$$\therefore \quad \log x = -10 \log 1\cdot 05 = -10 \times 0\cdot 02119 = \bar{1}\cdot 7881$$

$$\therefore \quad x = 0\cdot 61390.$$

$$\therefore \quad A = \frac{30{,}000 \times 0\cdot 05}{1 - 0\cdot 61390} = \frac{1500}{0\cdot 3861} = \frac{3000}{0\cdot 7722}$$

$$\therefore \quad \log A = 3 + \log 3 - \log 0\cdot 7722$$
$$= 3 + 0\cdot 47712 - (\bar{1}\cdot 88773)$$
$$= 4\cdot 47712 - 0\cdot 88773 = 3\cdot 58939$$
$$\therefore \quad A = 3885\cdot 0$$

∴ প্রতিটি কিস্তির পরিমাণ = 3885 টাকা।

উদাহরণ 4. এক ব্যক্তি নগদ 5,000 টাকা এবং ইহার পর 10 বৎসর ধরিয়া প্রতি বৎসরের শেষে 1,000 টাকা করিয়া এমন একটি প্রতিষ্ঠানে অর্থ বিনিয়োগ করিলেন যাহা বাৎসরিক $7\frac{1}{2}\%$ হারে চক্রবৃদ্ধি প্রদান করে। 10 বৎসরের শেষে তাঁহার কত টাকা সঞ্চিত হইবে ?

এখানে, (*i*) 5,000 টাকার 10 বৎসরের সবৃদ্ধিমূল + (*ii*) বার্ষিকী 1000 টাকার 10 বৎসর মেয়াদী মোট অর্থ

$=(M_1+M_2)$ টাকা, যেখানে

$$M_1=5{,}000\times\left(1+\frac{7{\cdot}5}{100}\right)^{10}=5{,}000\times(1{\cdot}075)^{10}$$

$=5{,}000\times x\,;\quad x=(1{\cdot}075)^{10}.$

$\therefore\ \log x=10\times\log 1{\cdot}075=10\times 0{\cdot}03141=0{\cdot}3141.$

$\therefore\ x=2{\cdot}0610.$

সুতরাং, $M_1=5000\times 2{\cdot}0610=10305.$

এবং $M_2=\dfrac{1000}{0{\cdot}075}\{(1+{\cdot}075)^{10}-1\}$

$$=\frac{1{,}000{,}000}{75}\times\{2{\cdot}0610-1\}$$

$$=\frac{1{,}000{,}000\times 1{\cdot}061}{75}=14{,}146{\cdot}67$$

$\therefore\ V=M_1+M_2=24{,}451{\cdot}67$

$\therefore$ নির্ণেয় সঞ্চিত অর্থ $=24{,}451{\cdot}67$ টাকা।

উদাহরণ 5. এক ব্যক্তি 6,000 টাকা এই শর্তে ধার করিলেন যে, প্রতি 6 মাস অন্তে দেয় 8টি সমান কিস্তিতে তিনি উহা পরিশোধ করিবেন এবং ঋণ গ্রহণের সময় হইতে ছয় মাস পরে প্রথম কিস্তি দিবেন। বার্ষিক সুদের হার 12% হইলে এবং চক্রবৃদ্ধি ষাণ্মাসিক গৃহীত হইলে, প্রতিটি কিস্তির পরিমাণ নির্ণয় কর।

ধরি, প্রতিটি ষাণ্মাসিক কিস্তির পরিমাণ $=X$ টাকা।

এখানে, $V=6{,}000\,;\ N=8\,;\ s=0{\cdot}06.$

$\therefore\ V=\dfrac{X}{s}\left\{1-\dfrac{1}{(1+s)^N}\right\}$ সূত্র হইতে,

$$6{,}000=\frac{X}{0{\cdot}06}\{1-(1{\cdot}06)^{-8}\}$$

ধরি, $x=(1{\cdot}06)^{-8}.$

$\therefore \quad \log x = -8 \log 1{\cdot}06 = -8 \times 0{\cdot}02531$

$= -0{\cdot}20248 = \bar{1}{\cdot}79752.$

$\therefore \quad x = 0{\cdot}62737.$

$$\therefore \quad X = \frac{6000 \times 0{\cdot}06}{0{\cdot}37263} = \frac{3600}{3{\cdot}7263}$$

$\therefore \quad \log X = 2 + \log 36 - \log 3{\cdot}7263$

$= 2 + 1{\cdot}55630 - 0{\cdot}57128 = 2{\cdot}98502$

$\therefore \quad X = 966{\cdot}11.$

$\therefore$ নির্ণেয় কিস্তির পরিমাণ : 966·11 টাকা।

উদাহরণ 6. এক ব্যক্তি 60 বৎসর বয়সে চাকুরী হইতে অবসর গ্রহণ করিলেন। তাঁহার নিয়োগকর্তা তাঁহার জীবনের বাকী সময়ের জন্য ষাণ্মাসিক কিস্তিতে দেয় বাৎসরিক 1200 টাকা বার্ধক্য ভাতা হিসাবে অনুমোদন করিলেন। ঐ ব্যক্তি 13 বৎসর জীবিত থাকিবেন মনে করিলে, এবং বার্ষিক 4% হারে সুদ 6 মাস অন্তর দেওয়া যাইবে ধরিলে, এক সঙ্গে কত টাকা ঐ ব্যক্তি বার্ধক্য ভাতা হিসাবে পাইবেন?

[N. B. U. 1971]

এখানে, $X = 600$; $s = 0{\cdot}02$; $N = 26$.

$$\therefore \quad V = \frac{600}{0{\cdot}02}\{1 - (1{\cdot}02)^{-26}\}$$

$= 30000\,\{1 - x\}$;

$x = (1{\cdot}02)^{-26}$.

$\therefore \quad \log x = -26 \times \log 1{\cdot}02 = -26 \times 0{\cdot}00860$

$= -0{\cdot}22360 = \bar{1}{\cdot}77640.$

$\therefore \quad x = 0{\cdot}59759$

$\therefore \quad V = 30{,}000 \times 0{\cdot}40241 = 12072{\cdot}30$

$\therefore$ নির্ণেয় উত্তর : 12,072·30 টাকা।

উদাহরণ 7. ছয় মাস অন্তর চক্রবৃদ্ধি গণনা করা যাইবে এই শর্তে কোন প্রতিষ্ঠান বার্ষিক 10% হারে 15000 টাকা ঋণ গ্রহণ করিল এবং চুক্তি হইল যে, 24টি ষাণ্মাসিক কিস্তিতে ঐ প্রতিষ্ঠান উক্ত ঋণ পরিশোধ করিবে। প্রথম 23টি কিস্তির প্রত্যেকটির পরিমাণ 1100 টাকা হইলে, দ্বাদশ বৎসর অন্তে 24-তম কিস্তির পরিমাণ কত হইবে?

এখানে, $s=\frac{10/2}{100}=0{\cdot}05$; $N=23$; $X=1100$; $V=$ প্রথম 23টি কিস্তির বর্তমান মূল্যের পরিমাণ হইলে,

$$V=\frac{1100}{0{\cdot}05}\{1-(1{\cdot}05)^{-23}\}$$

$$=22{,}000\times\{1-x\};$$

$$x=(1{\cdot}05)^{-23}.$$

$$\therefore\ \log x=-23\times\log 1{\cdot}05=-23\times 0{\cdot}02119$$

$$=-0{\cdot}48737=\bar{1}{\cdot}51263.$$

$$\therefore\ x=0{\cdot}32556.$$

$$\therefore\ V=22{,}000\times 0{\cdot}67444$$

$$=14{,}837{\cdot}68$$

সুতরাং, শেষ কিস্তির বর্তমান মূল্য $=15{,}000$ টাকা $-\ 14{,}837{\cdot}68$ টাকা

$=162{\cdot}32$ টাকা।

এখন, শেষ কিস্তির পরিমাণ P টাকা হইলে, উহার বর্তমান মূল্য $=162{\cdot}32$ টাকা।

$$\therefore\ P=162{\cdot}32\times(1{\cdot}05)^{24}.$$

$$\therefore\ \log P=\log 162{\cdot}32+24\log 1{\cdot}05$$

$$=2{\cdot}21036+24\times 0{\cdot}02119$$

$$=2{\cdot}21036+0{\cdot}50856$$

$$=2{\cdot}71892.$$

$$\therefore\ P=523{\cdot}50.$$

$\therefore$ নির্ণেয় উত্তর : $523{\cdot}50$ টাকা (প্রায়)।

উদাহরণ 8. 10 বৎসর অন্তে 50,000 টাকা মূল্যের কিছু যন্ত্রপাতি বদলাইবার জন্য একটি ঋণশোধক তহবিল গঠন করা হইল। 10 বৎসর পরে ঐ পুরাতন যন্ত্রপাতির মূল্য 2,500 টাকা হইবে ধরিয়া লাভের অঙ্ক হইতে প্রতি বৎসর কি পরিমাণ অর্থ ঐ তহবিলে রাখিলে, নূতন যন্ত্রপাতি ক্রয় করা সম্ভব হইবে, যদি বার্ষিক সুদের হার 8% হয়?

যন্ত্রটির ক্রয়মূল্য = 50,000 টাকা ;
গুরুত্বহীন মূল্য = 2,500 টাকা ;

অন্তর = 47,500 টাকা।

সুতরাং, 10 বৎসর যে অর্থের প্রয়োজন হইবে তাহার মোট মূল্য 47,500 টাকা।

তাহা হইলে, এখানে, $M=47{,}500$; $n=10$; $r=0{\cdot}08$.

প্রতি বৎসর অন্তে A টাকা করিয়া লাভের অঙ্ক হইতে পৃথক করিয়া রাখিলে,

$$47{,}500=\frac{A}{0{\cdot}08}\{(1{\cdot}08)^{10}-1\}.$$

ধরি, $x=(1{\cdot}08)^{10}$.

$$\therefore \quad \log x=10\times\log 1{\cdot}08=10\times 0{\cdot}03342$$
$$=0{\cdot}33420\ ;$$
$$\therefore \quad x=2{\cdot}158756$$

$$\therefore \quad 47{,}500=\frac{A}{0{\cdot}08}\times 1{\cdot}158756$$

$$\therefore \quad A=\frac{47{,}500\times 0{\cdot}08}{1{\cdot}158756}$$
$$=\frac{3800}{1{\cdot}158756}$$

$$\therefore \quad \log A=2+\log 38-\log 1{\cdot}158756$$
$$=2+1{\cdot}57978-0{\cdot}06399$$
$$=3{\cdot}51579.$$

$$\therefore \quad A=3279{\cdot}40$$

∴ নির্ণেয় উত্তর : 3279·40 টাকা।

উদাহরণ 9. 1,000 টাকার একটি বাৎসরিক বৃত্তি (Scholarship) প্রদানের নিমিত্ত একটি বৃত্তিদান তহবিলে এক ব্যক্তি পাঁচটি সমান বাৎসরিক কিস্তিতে সমান পরিমাণ অর্থ দান করিলেন। ঐ পাঁচটি কিস্তির শেষ কিস্তি দেওয়ার দুই বৎসর পরে বৃত্তি দান আরম্ভ হইলে, এবং বার্ষিক চক্রবৃদ্ধির হার 7% হইলে প্রত্যেক কিস্তির মূল্য নির্ণয় কর।

মনে করি, প্রতিটি কিস্তির মূল্য A টাকা। এই মেয়াদী বার্ষিক কিস্তির প্রথমটি এখন দেওয়া হইল, এবং অপর চারিটি ইহার পর প্রতি বৎসর অন্তে পর পর দেওয়া হইল। তাহা হইলে, প্রথম কিস্তি দেওয়ার 6 বৎসর পরে এই কিস্তি সমূহের মোট পরিমাণ M হইলে,

$$M=A(1+r)^6+A(1+r)^5+A(1+r)^4+A(1+r)^3+A(1+r)^2\ ;$$

যেখানে, $r=0{\cdot}07$.

$$\therefore \quad M = A\{a^6 + a^5 + a^4 + a^3 + a^2\}; \quad (a = 1 + r)$$

$$= A\left\{\frac{a^7 - 1}{a - 1} - (a + 1)\right\}$$

$$= \frac{A}{a-1}\{(a^7 - 1) - (a^2 - 1)\}$$

$$= \frac{A}{r}\{(1+r)^7 - (1+r)^2\}$$

$$= \frac{A}{0\cdot07}\{(1\cdot07)^7 - (1\cdot07)^2\}$$

$$\therefore \quad M = \frac{A}{0\cdot07} \times 0\cdot4610$$

$$x = (1\cdot07)^7$$

$$\therefore \quad \log x = 7 \times \cdot02938$$

$$= 0\cdot20566$$

$$\therefore \quad x = 1\cdot6059;$$

$$(1.07)^2 = 1\cdot1449$$

আবার, 1,000 টাকার বৃত্তিটি একটি চিরস্থায়ী বার্ষিক বৃত্তি যাহার বর্তমান মূল্য $= \frac{1,000}{r}$ টাকা $= \frac{1,000}{\cdot07}$ টাকা. এবং ইহা M টাকার সমান।

$$\therefore \quad \frac{A}{0\cdot07} \times 0\cdot4610 = \frac{1000}{0\cdot07} \quad \text{বা,} \quad A = \frac{1000}{0\cdot4610}$$

$$\therefore \quad \log A = 3 - \log 0\cdot4610 = 3 - \bar{1}\cdot66370 = 3\cdot33630;$$

$$\therefore \quad A = 2169\cdot33$$

∴ নির্ণেয় উত্তর : 2169·33 টাকা (প্রায়)।

মন্তব্য : প্রকৃতপক্ষে প্রতিবারেই 2170 টাকা জমা দিতে হইবে।

উদাহরণ 10. বার্ষিক সুদের হার 5% হইলে, কোন্‌টি বেশী লাভজনক হইবে :—10 বৎসর মেয়াদী 150 টাকার বার্ষিক বৃত্তি অথবা 7 বৎসর পরে শুরু হইবে এইরূপ 80 টাকার চিরস্থায়ী বার্ষিকী ?

প্রথমক্ষেত্রে,

$$V_1 = \frac{150}{\cdot05}\{1 - (1\cdot05)^{-10}\}$$

$$= 3000 \times 0\cdot3861$$

$$= 1158\cdot30$$

$$x = (1\cdot05)^{-10};$$

$$\therefore \quad \log x = -10 \times \cdot02119$$

$$= \bar{1}\cdot7881$$

$$\therefore \quad x = 0\cdot6139.$$

তাহা হইলে,

10 বৎসর মেয়াদী বার্ষিক 150 টাকার বর্তমান মূল্য = 1158·30 টাকা।

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে,

$$V_2 = \frac{80}{\cdot 05} \times (1\cdot 05)^{-7}$$
$$= 1600 \times \cdot 71067$$
$$= 1137\cdot 07$$

$$y = (1\cdot 05)^{-7}$$
$$\therefore \log y = -7 \times \cdot 02119$$
$$= \bar{1}\cdot 85167$$
$$\therefore y = 0\cdot 71067$$

সুতরাং,

7 বৎসর বিলম্বিত চিরস্থায়ী বার্ষিকী 80 টাকার বর্তমান মূল্য = 1137·07 টাকা।

∴ প্রথমটির বর্তমান মূল্য দ্বিতীয়টির সাপেক্ষে বেশী বলিয়া, প্রথমটি বেশী লাভজনক।

প্রশ্নমালা 35

1. বার্ষিক 4% হার সুদে বৎসরান্তে দেয় 5 বৎসর মেয়াদী বার্ষিকী 300 টাকার বর্তমান মূল্য বাহির কর। [N. B. U. 1969]

2. বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি 10% হারে 12 বৎসর মেয়াদী বার্ষিকী 1000 টাকার বর্তমান মূল্য নির্ণয় কর।

3. যে ব্যাঙ্ক বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি 6% হারে দেয়, সেই ব্যাঙ্কে একব্যক্তি প্রতি বৎসরের শেষে 300 টাকা করিয়া জমা রাখিতে লাগিলেন। 15 বৎসর পরে ঐ ব্যাঙ্কে তাঁহার কত টাকা জমা হইবে ?

4. এক ব্যক্তি 4000 টাকা এই শর্তে ধার করিলেন যে, সুদ-সহ সমুদয় টাকা 6টি সমান বাৎসরিক কিস্তিতে পরিশোধ করিবেন। প্রথম কিস্তি প্রথম বৎসরের শেষে দেয় এবং বার্ষিক চক্রবৃদ্ধির হার 5% হইলে, প্রতিটি কিস্তির মূল্য বাহির কর। [B. U. 1968]

5. বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি 5% হারে 5টি সমান বার্ষিক কিস্তিতে ঋণ পরিশোধ করিবার শর্তে, কোন সমিতির একজন সদস্য 400 টাকা ধার লইলেন। প্রথম কিস্তি বৎসরান্তে দেয় হইলে, প্রতিটি কিস্তির পরিমাণ নির্ণয় কর।

6. 30 টি সমান বার্ষিক কিস্তিতে 40,000 টাকার একটি ঋণ পরিশোধ করিতে হইবে। প্রতিটি কিস্তিতে সুদ-সমেত আসল টাকার কিছু অংশ থাকিবে। বার্ষিক সুদের হার 4% হইলে, প্রতিটি কিস্তির পরিমাণ নির্ণয় কর। [C. U. 1965]

7. প্রতি বৎসরের শেষে আসলের কিছু অংশ এবং সুদ-সমেত 10 টি সমান কিস্তিতে ঋণ পরিশোধ করিবার শর্তে রাজী হইয়া এস্. রায় 4% চক্রবৃদ্ধিতে 20,000 টাকা ধার করিলেন। প্রতিটি কিস্তির পরিমাণ নির্ণয় কর। [C U. 1962]

8. বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি 5% হারে 10 বৎসর মেয়াদী বার্ষিকী 100 টাকার মোট পরিমাণ নির্ণয় কর। [C. U. 1968]

9. বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি 10% হারে 5 বৎসরের অনাদায়ী বৎসরান্তে দেয় বার্ষিকী 100 টাকার মোট পরিমাণ কত?

10. বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি $6\frac{1}{4}$% হারে 15 বৎসরের মেয়াদী বার্ষিকী 3,000 টাকার মোট অর্থ এবং বর্তমান মূল্য নির্ণয় কর।

11. কোন চিরসত্ব সম্পত্তির খাজানা বার্ষিক 5,000 টাকা হইলে এবং ঐ সম্পত্তির মূল্য 1,00,000 হইলে, বার্ষিক সুদের হার কত?

12. একটি চিরস্থায়ী সম্পত্তির মূল্য 50,000 টাকা। যদি বাৎসরিক চক্রবৃদ্ধির হার 9% হয়, তবে ঐ সম্পত্তির খাজানা কত?

13 কত মূল্যে 8 বৎসর মেয়াদী 2000 টাকার বার্ষিকী ক্রয় করা যাইবে, যদি চক্রবৃদ্ধির হার 12% হয়?

14. এক ব্যক্তি একটি Co-operative Bank হইতে এই শর্তে 2,500 টাকা ঋণ গ্রহণ করিলেন যে, ঐ ঋণ 6% চক্রবৃদ্ধি হারে 10টি সমান বার্ষিক কিস্তিতে পরিশোধ করিবেন। প্রথম কিস্তি প্রথম বৎসরের শেষে প্রদেয় হইলে, প্রতিটি কিস্তির পরিমাণ নির্ণয় কর। [B. U. 1970]

15. এক ব্যক্তি প্রতি বৎসরের শেষে কোন ব্যাঙ্কে 300 টাকা করিয়া জমা রাখিবার সিদ্ধান্ত করিলেন। ঐ ব্যাঙ্ক বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি 9% দিলে, 10 বৎসর পরে তাঁহার কত টাকা ব্যাঙ্কে জমা হইবে?

16. বৎসরের শুরুতে শ্রী মিত্র স্থির করিলেন যে, বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি 4% দেয়, এমন একটি ব্যাঙ্কে প্রতি বৎসরের শেষে তিনি 45 টাকা 50 পয়সা জমা দিবেন। কিস্তিগুলি এইভাবে জমিতে থাকিলে, 12 বৎসর বাদে তাঁহার জমা খাতে অর্থের পরিমাণ কত হইবে? [C. U. 1959]

17. এক ব্যক্তি 4,000 টাকা এই শর্তে ধার করিলেন যে, প্রতি 6 মাস অন্তে দেয় 9টি সমান কিস্তিতে তিনি উহা সুদ-সহ পরিশোধ করিবেন এবং ঋণ গ্রহণের সময় হইতে ছয় মাস পরে প্রথম কিস্তি দিবেন। বার্ষিক সুদের হার 9% হইলে এবং চক্রবৃদ্ধি ষাণ্মাসিক গৃহীত হইলে প্রতিটি কিস্তির পরিমাণ নির্ণয় কর।

18. প্রতি তিনমাস অন্তে 100 টাকা করিয়া ব্যাঙ্কে জমা রাখিলে, 6 বৎসর অন্তে কত টাকা জমা হইবে, যদি ঐ ব্যাঙ্ক বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি 6% হারে প্রতি তিন মাস অন্তর সুদ দেয় ?

19. প্রতি মাসের শেষে 50 টাকা করিয়া ব্যাঙ্কে জমাইলে, 10 বৎসর অন্তে কত টাকা জমিবে, যদি বার্ষিক চক্রবৃদ্ধির হার 9% প্রতি মাসান্তে দেয় হয় ?

20. বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি 5% হারে 10 বৎসর মেয়াদী 700 টাকার বার্ষিকীর এবং 7 বৎসর পরে শুরু হইবে এইরূপ 396 টাকার চিরস্থায়ী বার্ষিকীর মধ্যে কোন্‌টি বেশী লাভজনক ?

21. কোনও ব্যক্তি 60 বৎসর বয়সে অবসর গ্রহণ করিলে, তাহার নিয়োগকর্তা তাহাকে প্রতি বৎসর 2,000 টাকা পেনসন্ দিবার ব্যবস্থা করিলেন। ঐ ব্যক্তির প্রত্যাশিত জীবন-কাল 75 বৎসর হইলে, সে এককালীন কত টাকায় তাহার পেন্‌সন্ বিনিময় করিতে পারে, যদি সুদের হার বার্ষিক 10% হয় ?

22. এক ব্যক্তি 58 বৎসর বয়সে চাকুরী হইতে অবসর গ্রহণ করিলেন। তাঁহার নিয়োগকর্তা তাঁহার জীবিত কালের জন্য মাসিক 300 টাকা বার্ষিক ভাতা অনুমোদন করিলেন। ঐ ব্যক্তির প্রত্যাশিত জীবনকাল 75 বৎসর হইলে, তিনি এককালীন কত টাকা তাঁহার বার্ধক্যভাতার বিনিময়ে পাইতে পারেন ? (বার্ষিক সুদের হার = 10%).

23. এক ব্যক্তি 5,000 টাকা মূল্যের একটি টেলিভিসন্ ক্রয় করিতে ইচ্ছা করিলেন। তিনি নগদ 1742 টাকা দিয়া বাকী টাকা 9টি সমান বার্ষিক কিস্তিতে পরিশোধ করিতে রাজী হইলেন। বার্ষিক চক্রবৃদ্ধির হার $7\frac{1}{2}$% হইলে, তাঁহাকে প্রতি বৎসর কত করিয়া দিতে হইবে ?

24. এস্, রায় 17,000 টাকা মূল্যের ছাপাখানার যন্ত্রপাতি কিনিতে ইচ্ছা করিলেন। ক্রয়কালে 9,000 টাকা দিতে, এবং বাকী টাকা 8টি বার্ষিক সমান কিস্তিতে দিতে প্রস্তুত হইলেন। সুদের হার বার্ষিক $3\frac{1}{2}$% হইলে, তাঁহাকে প্রতি বৎসর কত টাকা দিতে হইবে ? [C. U. 1957]

25. একটি রেডিও এর নগদ মূল্য 450 টাকা ; যাহা 14টি সমান মাসিক কিস্তিতে দেওয়া যাইতে পারে। রেডিওটি ক্রয় করার সময় প্রথম কিস্তি দেয় হইলে এবং বার্ষিক চক্রবৃদ্ধির হার 6% হইলে এবং সুদ মাসিক গৃহীত হইলে, প্রতিটি কিস্তির মূল্য কত ?

26. এক ব্যক্তি নগদ 2,500 টাকা এবং ইহার পর 5 বৎসর ধরিয়া প্রতি বৎসরের শেষে 1000 টাকা করিয়া ব্যাঙ্কে জমা দিতে থাকিলেন। বার্ষিক চক্রবৃদ্ধির হার $6\frac{1}{4}$ % হইলে, 5 বৎসর অন্তে ব্যাঙ্কে তাঁহার কত টাকা সঞ্চিত হইবে ?

27. এক ব্যক্তি 20,000 টাকা ঋণ করিয়া ঋণ গ্রহণের এক বৎসর অন্তে অন্তে সুদসহ সমুদয় টাকা 20টি বৎসরিক কিস্তিতে পরিশোধ করিতে রাজী হইলেন। বার্ষিক চক্রবৃদ্ধির হার 7·5% হইলে এবং প্রথম 19টি কিস্তির প্রত্যেকটির পরিমাণ 2000 টাকা হইলে, বিংশ কিস্তির পরিমাণ কত ?

28. কোন সীমিত কোম্পানী 25 বৎসর অন্তে 1,00,000 টাকার সম্পত্তি বদলাইবার জন্য একটি অপচয়ী তহবিল গঠন করিলেন। সুদের হার বার্ষিক 3% হইলে, প্রতি বৎসরের শেষে লাভের কত পরিমাণ টাকা পৃথক করিয়া তহবিলে রাখিতে হইবে ? [C. U. 1961]

29. একটি কোম্পানী একটি মেসিনের মূল্য নির্ধারণ করে 97,000 টাকায় এবং ইহার কার্য্যকরী ক্ষমতা 12 বৎসরে। 12 বৎসর পরে অবক্ষয়িত মেসিনের মূল্য 2,000 টাকা ধরিলে এবং বার্ষিক চক্রবৃদ্ধির হার 5% হইলে, নূতন একটি মেসিন কিনিবার জন্য লাভের টাকা হইতে প্রতি বৎসর কি পরিমাণ টাকা পৃথক করিয়া রাখিতে হইবে ?

30. 5% চক্রবৃদ্ধি হারে প্রতি বৎসর কত টাকা লগ্নীকৃত করিলে, 20 বৎসর পরে একটি যন্ত্র অপসারণ করিয়া সেইরূপ আর একটি যন্ত্র পুনঃ স্থাপন করা যাইবে ? যন্ত্রটির বর্তমান মূল্য 60,000 টাকা এবং 20 বৎসর পরে ঐরূপ যন্ত্রের মূল্য 25% বাড়িয়া যাইবে অনুমান করা যায়। [C. U. 1970]

31. 3000 টাকার একটি বাৎসরিক বৃত্তি প্রদানের জন্য এক ব্যক্তি এককালীন 50,000 টাকা দিয়া একটি তহবিল গঠন করিলেন। গঠন করার পরে পাঁচ বৎসর অন্তে প্রথম বৃত্তি প্রদান করিলে এবং উহা চিরকাল ধরিয়া চলিতে থাকিলে, সুদের বার্ষিক শতকরা হার বাহির কর।

32. কোনও ব্যক্তি কোনও বিশ্ববিদ্যালয়কে সম্প্রদান বলিয়া বিশ্ববিদ্যালয়ের ব্যাঙ্কের অ্যাকাউন্টে কিছু পরিমাণ অর্থ জমা দিতে গিয়া নিম্নোক্ত চুক্তি করিলেন : *i)* বাৎসরিক 1000 টাকা ছাত্রবৃত্তি বাবদ, 10 বৎসরের জন্য ; এবং *(ii)* পুরস্কারের বই বাবদ প্রত্যেক বৎসর 500 টাকা করিয়া, 20 বৎসরের জন্য।

5% বাৎসরিক চক্রবৃদ্ধির হারে জমা টাকা 20 বৎসরের পরেই শেষ হইয়া গেল। মনে করা যাক্, 1970 সালের ১লা জুলাই হইতে ছাত্রবৃত্তি এবং পুরস্কার দেওয়ার চুক্তি কার্যকরী হইতে আরম্ভ করিবে। তাহা হইলে, 1969 সালের ১লা জুলাই সম্প্রদান হিসাবে কত টাকার প্রয়োজন ? [C. U. 1969]

একাদশ অধ্যায়

ভেদ

(Variation)

11-1. উপস্থাপন।

একটি রাশিমালার অন্তর্গত কোন রাশি বিভিন্ন অবস্থায় বিভিন্ন মান লইলে, ঐ রাশিকে **চলরাশি** বা **চল** (Variable) বলে ; এবং যে রাশি সর্বদা একই থাকে (ঐ চলরাশির পরিবর্তন সত্বেও) তাহাকে **ধ্রুবক রাশি** বা **ধ্রুবক** (Constant) বলে।

উদাহরণস্বরূপ, x^2+3x+4 এই রাশিমালাটি x এর বিভিন্ন মানের জন্য বিভিন্ন হইবে। ধরা যাক, $y=x^2+3x+4$.

এখন, $x=1, 2, 3\cdots$ ...ইত্যাদি হইলে, y এর অনুরূপ মানগুলি যথাক্রমে,

8, 14, 22, ..., ইত্যাদি হইবে।

সুতরাং, এখানে, x এবং y উভয়েই চলরাশি।

আবার, $y=kx^2$ এর মধ্যে x এর পরিবর্তনের সঙ্গে সঙ্গে y এর পরিবর্তন হইলে এবং k সর্বদা অপরিবর্তিত থাকিলে, k কে x এর সাপেক্ষে ধ্রুবক বলা হইবে।

মনে করি, একটি রেলগাড়ী **সমবেগে** (With uniform speed) চলিতে থাকিয়া 1 ঘণ্টায় 40 কিলোমিটার দূরত্ব অতিক্রম করে। সুতরাং, উহা 30 মিনিটে 20 কি. মি. ; 15 মিনিটে 10 কি. মি. ; 5 মিনিটে $3\frac{1}{3}$ কি. মি. ; ইত্যাদি, এবং 2 ঘণ্টায় 80 কি. মি. ; 3 ঘণ্টায় 120 কি. মি. ; $4\frac{1}{2}$ ঘণ্টায় 180 কি. মি. ; ইত্যাদি, দূরত্ব অতিক্রম করিবে। সুতরাং, দেখা যাইতেছে, সময়ের হ্রাস বা বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে অতিক্রান্ত পথের দৈর্ঘ্যের হ্রাস বা বৃদ্ধি হইতেছে। তাহা ছাড়া, ইহা লক্ষ্যণীয় যে, সময় যে অনুপাতে হ্রাস (বা, বৃদ্ধি) প্রাপ্ত হইতেছে, দূরত্বও ঠিক সেই একই অনুপাতে হ্রাস (বা, বৃদ্ধি) প্রাপ্ত হইতেছে। সুতরাং, এইরূপক্ষেত্রে, সময়ের পরিবর্তনের সঙ্গে সঙ্গে দূরত্বেরও পরিবর্তন হইতে থাকিবে। এখানে ধরা যায়, $d=kt$, যেখানে, t সময় (ঘণ্টায়) এবং d দূরত্ব (কিলোমিটারে) সূচিত করে।

তাহা হইলে, $t=1$ হইলে, $d=40$ হইবে।

$\therefore\ 40=k\times 1$; অর্থাৎ $k=40$.

$\therefore\ d=40t.$

এখন, দেখা যাইতেছে, t এর হ্রাস (বা বৃদ্ধি) এর সঙ্গে সঙ্গে d এর হ্রাস (বা বৃদ্ধি) হইবে,

($\because\ d=kt$, বা, $d=40t$).

11-2. [a] সরল ভেদ (Direct Variation) :

দুইটি চলরাশি A এবং B যদি এইরূপ সম্বন্ধ যুক্ত থাকে যে, A এর পরিবর্তনের অনুপাতটি ঠিক B এর অনুরূপ পরিবর্তনের অনুপাতের সমান, তাহা হইলে, A, B এর সহিত **সরল ভেদে** আছে বলা হয় ; অথবা, সংক্ষেপে "**A, B এর সহিত ভেদে আছে**" বলা হয় ; এবং "$A \propto B$" এইরূপ লেখা হয়।

ধরা যাক্, A পর পর a_1, a_2, a_3,⋯ ⋯, ইত্যাদি মান লইল এবং B এর অনুরূপ মানগুলি যথাক্রমে, b_1, b_2, b_3,⋯ ⋯, ইত্যাদি হইল।

তাহা হইলে, $A \propto B$ থাকিলে, সংজ্ঞা হইতে আমরা বুঝিব :

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}; \quad \frac{a_1}{a_3}=\frac{b_1}{b_3}; \quad \frac{a_2}{a_3}=\frac{b_2}{b_3}; \cdots \quad \cdots; \text{ ইত্যাদি।}$$

$$\therefore \quad \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\cdots \quad \cdots.$$

সুতরাং, দেখা যাইতেছে,

$$\frac{A \text{ এর যে কোন মান}}{B \text{ এর অনুরূপ মান}} = \text{সর্বদা একই; অর্থাৎ একটি ধ্রুবক।}$$

এই তথ্যটিকে আমরা লিখিব :

$$\frac{A}{B}=K; \quad \text{অর্থাৎ,} \quad A=KB;$$

যেখানে K একটি ধ্রুবক ; অর্থাৎ K এর মান A এবং B এর নিরপেক্ষ। এইরূপক্ষেত্রে, K কে **ভেদের ধ্রুবক (Constant of Variation)** বলা হয়।

মন্তব্য : (1) $A \propto B$ বলিলে, $A=KB$ কে বুঝাইবে, যেখানে K হইতেছে ভেদের ধ্রুবক। বিপরীতক্রমে, $A=KB$ বলিলে, $A \propto B$ কে বুঝাইবে।

(2) অন্যরূপ কোন কিছু উল্লেখ না থাকিলে, k, l, m, n,⋯ ⋯, ইত্যাদি অক্ষরগুলিকে ভেদের ধ্রুবক বুঝিব।

দ্রষ্টব্য : A এবং B এর যে কোন এক জোড়া মান দেওয়া থাকিলে, K, অর্থাৎ, ভেদের ধ্রুবক নির্ণয় করা যাইবে।

উদাহরণস্বরূপ, $A \propto B$ এবং $A=6$, যখন, $B=3$; দেওয়া আছে।

এখানে, যেহেতু $A \propto B$, $\therefore \ A=KB$.

তাহা হইলে, $6=K \times 3$. $\therefore \ K=2$. $\therefore \ A=2B$.

উদাহরণ : বৃত্তের ক্ষেত্রফল উহার ব্যাসার্ধের বর্গের সহিত সরল ভেদে আছে। যদি ব্যাসার্ধ 7 ফুট হইলে, ক্ষেত্রফল 154 বর্গফুট হয়, তবে ব্যাসার্ধ 5 ফুট হইলে, ক্ষেত্রফল কত হইবে?

ব্যাসার্ধ r ফুট হইলে, ক্ষেত্রফল যদি A বর্গফুট হয়, তবে $A=Kr^2$, (যেখানে K ধ্রুবক)।

$\therefore\ 154=K\times 7^2$; বা, $K=22/7$.

$\therefore\ A=\frac{22}{7}\times r^2$

$\therefore$ যখন $r=5$, তখন $A=\frac{22}{7}\times 5^2=78\frac{4}{7}$.

$\therefore$ নির্ণেয় উত্তর : $78\frac{4}{7}$ বর্গফুট।

11-2 (b) ব্যস্ত ভেদ (Inverse Variation) :

A এবং B দুইটি চলরাশি যদি এমন হয় যে, $A\propto\frac{1}{B}$, তাহা হইলে, "**A, B এর সহিত ব্যস্ত ভেদে আছে**" বলা হইবে।

এইরূপ ক্ষেত্রে, $A=\frac{K}{B}$, যেখানে K ভেদের ধ্রুবক। সুতরাং, $AB=K$.

অন্য পদ্ধতি :

দুইটি চলরাশি A এবং B এমনভাবে সম্বন্ধযুক্ত যে, A এর মান যে অনুপাতে বৃদ্ধি পাইবে, B এর অনুরূপমান সেই একই অনুপাতে হ্রাস পাইবে ; অথবা, বিপরীতক্রমে, A এর মান যে অনুপাতে হ্রাস পাইবে, B এর অনুরূপমান সেই একই অনুপাতে বৃদ্ধি পাইবে ; তাহা হইলে, "**A, B এর সহিত ব্যস্ত ভেদে আছে**" বলা হইবে।

ধরা যাক্, A-এর মান a_1 হইতে বৃদ্ধি পাইয়া a_2 হইল ; অর্থাৎ, A-এর মান $\frac{a_2}{a_1}$ অনুপাতে বৃদ্ধি পাইল ;

এবং, A এর মান যখন a_1 ও a_2 তখন B এর অনুরূপমান b_1 ও b_2.

তাহা হইলে, B এর মান $\frac{b_1}{b_2}$ অনুপাতে হ্রাস পাইল। এখন, A, B এর সহিত ব্যস্ত ভেদে থাকিলে,

$\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_1}{b_2}$; অর্থাৎ, $a_1b_1=a_2b_2$.

[বৃদ্ধির অনুপাত $\left(\frac{a_2}{a_1}\right)$ দিয়া a_1 কে গুণ করা উচিত ; এবং হ্রাসের অনুপাত $\left(\frac{b_1}{b_2}\right)$ দিয়া b_1 কে ভাগ করা উচিত।]

সুতরাং, ব্যস্ত ভেদের ক্ষেত্রে,

$a_1b_1 = a_2b_2 = \quad \cdots \quad \cdots =$ একটি ধ্রুবক,

এইরূপ ক্ষেত্রে, আমরা লিখি,

$$A \times B = K, \quad \text{or}, \quad A = \frac{K}{B}.$$

সুতরাং, ব্যস্ত ভেদের ক্ষেত্রে,

$$A \propto \frac{1}{B}.$$

উদাহরণস্বরূপ, "সমশক্তিসম্পন্ন 3 জন লোক একটি কাজ 6 দিনে শেষ করিতে পারে।

সুতরাং ঐরূপ সমশক্তিসম্পন্ন 9 জন লোক ঐ কাজটি 2 দিনে শেষ করিবে।" এখানে দেখা যাইতেছে যে, লোক সংখ্যা বৃদ্ধি পাইলে, একই কাজের জন্য দিন সংখ্যা একই অনুপাতে হ্রাস পায়। সুতরাং বলা যায়, "**লোকসংখ্যা সময়ের সহিত ব্যস্ত ভেদে আছে।**"

11-2 [c] যৌগিক ভেদ (Joint Variation) :

(*i*) একটি চলরাশি কতিপয় (সসীম সংখ্যক) চলরাশির গুণফলের সহিত সরলভেদে থাকিলে, প্রথম রাশিটিকে অবশিষ্ট রাশিগুলির সহিত "**যৌগিক ভেদে আছে**" বলা হয়।

মনে করি, চলরাশি A, অপর দুইটি চলরাশি B এবং C এর সহিত যৌগিক ভেদে আছে।

তাহা হইলে, সংজ্ঞানুসারে,

$A \propto BC$; অর্থাৎ, $A = KBC$, যেখানে K ভেদের ধ্রুবক।

(*ii*) কোন একটি চলরাশি A, B এর সহিত সরল ভেদে এবং C এর সহিত ব্যস্ত ভেদে থাকিলে, A, B এবং $\frac{1}{C}$ এর সহিত যৌগিক ভেদে আছে বলা যায় ; অর্থাৎ,

$$A \propto B.\frac{1}{C} \text{ ; বা, } A = KB \times \frac{1}{C}, \text{ যেখানে } K \text{ ভেদের ধ্রুবক।}$$

উদাহরণ : মনে করি, 1 টাকার 1 বৎসরের সুদ r টাকা। তাহা হইলে P টাকার n বৎসরের সুদ I টাকা হইলে, $I = Pnr$.

এখানে, I (*Interest*) P, n, এবং r এর সহিত যৌগিক ভেদে আছে।

11-3. যৌগিক ভেদের উপপাদ্য :

তিনটি চলরাশি A, B এবং C যদি এমন হয় যে, $A \propto B$, যখন C অপরিবর্তিত থাকে ; এবং $A \propto C$, যখন B অপরিবর্তিত থাকে ; তাহা হইলে, $A \propto BC$, যখন B এবং C উভয়েরই পরিবর্তিত হয়।

প্রমাণ : দেওয়া আছে,

$A \propto B$, যখন C অপরিবর্তিত ; ... ... (1)

$A \propto C$, যখন B অপরিবর্তিত। ... ... (2)

প্রদত্ত শর্ত হইতে দেখা যাইতেছে : A এর পরিবর্তন আংশিকভাবে B এবং আংশিকভাবে C এর পরিবর্তনের উপর নির্ভরশীল।

ধরি, যখন B এর মান b_1 এবং C এর মান c_1, তখন A এর মান a_1.

A	B	C
a_1	b_1	c_1
a'	b_2	c_1
a_2	b_2	c_2

এখন, মনে করা যাক্, C অপরিবর্তিত রহিল ; অর্থাৎ, উহার মান c_1 রহিল ; কিন্তু, B এর মান পরিবর্তিত হইয়া b_2 হইল ; এবং তখন A এর মান a' হইল। তাহা হইলে, স্বীকার্য্য (1) এর সাহায্যে,

$$\frac{a_1}{a'} = \frac{b_1}{b_2}. \quad \ldots \quad (3)$$

এবার, মনে করা যাক্, B অপরিবর্তিত রহিল ; অর্থাৎ উহার মান b_2 রহিল ; কিন্তু, C এর মান c_2 হইল, এবং তখন A এর মান a_2 হইল। তাহা হইলে, স্বীকার্য (2) এর সাহায্যে,

$$\frac{a'}{a_2} = \frac{c_1}{c_2} \quad \ldots \quad (4)$$

তাহা হইলে, (3) এবং (4) হইতে,

$$\left.\begin{aligned} \frac{a_1}{a_2} &= \frac{b_1c_1}{b_2c_2}; \\ \text{অর্থাৎ,} \quad \frac{a_1}{b_1c_1} &= \frac{a_2}{b_2c_2}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (5)$$

সুতরাং, A, B, C এর মান $(a_1, b_1, c_1,)$ হইতে পরিবর্তিত হইয়া (a_2, b_2, c_2) হইলে (5) এর সম্বন্ধটি সত্য হয়।

তাহা হইলে, $\frac{A}{BC} =$ ধ্রুবক ; অর্থাৎ, $A \propto BC$;

যখন B এবং C উভয়ে পরিবর্তিত হয়।

দ্বিতীয় পদ্ধতি :

$A \propto B$, যখন C অপরিবর্তিত।

সুতরাং, $A = KB$, যেখানে A এবং B সম্পর্কে K ধ্রুবক।

আবার, $A \propto C$, যখন B অপরিবর্তিত।

সুতরাং, $KB \propto C$, যখন B ধ্রুবক।

$\therefore \; K \propto C$, ($B =$ ধ্রুবক)।

তাহা হইলে, $K = lC$, যেখানে **K এবং C সম্পর্কে l ধ্রুবক** ··· (6)

কিন্তু, A এবং B সম্পর্কে K ধ্রুবক। ··· (7)

তাহা হইলে, (6) ও (7) হইতে, A, B, C সম্পর্কে l ধ্রুবক।

$\therefore \; A = KB = (lC)\,B = l(BC)$,

যেখানে, A, B, C সম্পর্কে l ধ্রুবক।

$\therefore \; A \propto BC$, যখন B এবং C চলরাশি।

11-4. কতিপয় প্রয়োজনীয় সিদ্ধান্ত :

(1) $A \propto B$ এবং $B \propto C$ হইলে, $A \propto C$.

যেহেতু, $A \propto B$, $\therefore \; A = lB$, যেখানে l ভেদের ধ্রুবক।

আবার, যেহেতু, $B \propto C$, $\therefore \; B = mC$, যেখানে m ভেদের ধ্রুবক।

$\therefore \; A = lm\,C$; অর্থাৎ, $A = kC$.

$\therefore \; A \propto C$, কারণ, $k = lm =$ ধ্রুবক।

(2) $A \propto B$ হইলে, $A^n \propto B^n$.

যেহেতু, $A \propto B$,

$\therefore \; A = kB$. যেখানে, k ভেদের ধ্রুবক।

$\therefore \; A^n = k^n B^n$.

$\therefore \; A^n \propto B^n$, কারণ, k^n একটি ধ্রুবক।

(3) $A \propto B$ এবং $B \propto C$ হইলে, $(A \pm B) \propto C$ এবং $AB \propto C^2$.

যেহেতু, $A \propto B$, এবং $B \propto C$,

$\therefore \; A = lB$ এবং $B = mC$, যেখানে, l ও m ধ্রুবক।

$\therefore \; A \pm B = (l \pm m)\,C$. $\therefore \; (A \pm B) \propto C$.

আবার, $AB = lm\,C^2$. $\therefore \; AB \propto C^2$.

(4) $A \propto B$ এবং $C \propto D$ হইলে, $AC \propto BD$ এবং $\frac{A}{C} \propto \frac{B}{D}$.

প্রদত্ত শর্ত হইতে,

$A = lB$ এবং $C = mD$; যেখানে, l এবং m ধ্রুবক।

তাহা হইলে, $AC = lm.BD$; এবং $\frac{A}{C} = \frac{l}{m}.\frac{B}{D}$.

সুতরাং, $AC \propto BD$; এবং $\frac{A}{C} \propto \frac{B}{D}$.

উদাহরণ 1. যদি $(x+y) \propto (x-y)$ হয়, তবে দেখাও যে,

(i) $(x^2+y)^2 \propto xy$; এবং (ii) $(ax+by) \propto (lx+my)$.

প্রদত্ত শর্তানুসারে,

$x+y = k(x-y)$, যেখানে k ধ্রুবক।

$$\therefore \quad \frac{x+y}{x-y} = k.$$

সুতরাং, যোগ ও ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা,

$$\frac{x}{y} = \frac{k+1}{k-1}.$$

$\therefore \quad y = px$; যেখানে, $p = \frac{k-1}{k+1}$ = ধ্রুবক।

(i) এখন, $\frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{(1+p^2)x^2}{px^2} = \frac{1+p^2}{p}$ = ধ্রুবক।

$\therefore \quad (x^2+y^2) \propto xy$.

(ii) আবার, $\frac{ax+by}{lx+my} = \frac{a+bp}{l+mp}$ = ধ্রুবক।

$\therefore \quad (ax+by) \propto (lx+my)$.

উদাহরণ 2. যদি x, y^2 এর সহিত সরল ভেদে থাকে এবং $y=4$, যখন $x=8$; তবে y এর মান বাহির কর, যখন $x=32$. **[H. S. Comp. 1961]**

যেহেতু, $x \propto y^2$, $\therefore \quad x = ky^2$, (k একটি ধ্রুবক).

প্রদত্ত শর্ত হইতে, $8 = k \times 4^2$; $\therefore \quad k = \frac{1}{2}$.

তাহা হইলে, $x = \frac{1}{2}y^2$.

এখন, $x = 32$ হইলে, $y^2 = 64$. অর্থাৎ, $y = \pm 8$

$\therefore$ নির্ণেয় উত্তর : ± 8.

উদাহরণ 3. দেওয়া আছে,

$x+y \propto z+\frac{1}{z}$; এবং $x-y \propto z-\frac{1}{z}$; x এবং z এর মধ্যে সম্বন্ধ বাহির কর যদি $x=3$ এবং $y=1$ হইলে $z=2$ হয়।

$$\because \quad x+y \propto z+\frac{1}{z}, \qquad \therefore \quad x+y=l\left(z+\frac{1}{z}\right); \text{ (} l \text{ একটি ধ্রুবক)।}$$

$$\because \quad x-y \propto z-\frac{1}{z}, \qquad \therefore \quad x-y=m\left(z-\frac{1}{z}\right); \text{ (} m \text{ একটি ধ্রুবক)।}$$

যেহেতু, $z=2$, যখন $x=3$ এবং $y=1$, অতএব,

প্রথমটি হইতে, $4=l \times 2\frac{1}{2}$; অর্থাৎ, $l=8/5$;

এবং দ্বিতীয়টি হইতে, $2=m \times 1\frac{1}{2}$; অর্থাৎ, $m=4/3$.

তাহা হইলে,

$x+y=\frac{8}{5}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ এবং $x-y=\frac{4}{3}\left(z-\frac{1}{z}\right)$ যোগ করিয়া পাই,

$$2x=\left(\frac{8}{5}+\frac{4}{3}\right)z+\left(\frac{8}{5}-\frac{4}{3}\right) \times \frac{1}{z}$$

$$\text{বা,} \quad 15x=22z+\frac{2}{z}$$

উদাহরণ 4. যদি $x+y \propto z$ যখন y ধ্রুবক এবং $z+x \propto y$ যখন z ধ্রুবক, তবে দেখাও যে, $x+y+z \propto yz$ যখন y এবং z উভয়ে চলরাশি। **[B. U. 1964]**

$\because \quad x+y \propto z,$ যখন y ধ্রুবক।

$\therefore \quad x+y=kz,$ যেখানে y ও k ধ্রুবক।

$\therefore \quad x+y+z=(k+1)z.$

তাহা হইলে,

$x+y+z \propto z,$ যখন y ধ্রুবক। ... (1)

আবার, যেহেতু,

$z+x \propto y,$ যখন z ধ্রুবক,

$\therefore \quad z+x=ly,$ যেখানে, l এবং z ধ্রুবক।

$\therefore \quad x+y+z=(l+1)y.$

তাহা হইলে,

$x+y+z \propto y,$ যখন z ধ্রুবক। ... (2)

সুতরাং, (1) এবং (2) হইতে,

$x+y+z \propto yz,$ যখন y এবং z উভয়ের পরিবর্তন হয়।

উদাহরণ 5. $x \propto y$ এবং $y \propto z$ হইলে, এবং x, y, z এর এক সেট মান a, b, c এবং দ্বিতীয় সেট মান A, B, C হইলে দেখাও যে,

$$(a^2+b^2+c^2)(A^2+B^2+C^2)=(Aa+Bb+Cc)^2.$$

$\because$ $x \propto y$, $\therefore$ $x=ky$, যেখানে k ধ্রুবক ;

$\because$ $y \propto z$, $\therefore$ $y=mz$, যেখানে m ধ্রুবক।

তাহা হইলে, $x=kmz$.

প্রদত্ত শর্তানুসারে,

$a=kmc$ এবং $b=mc$; ... (1)

$A=kmC$ এবং $B=mC$. ... (2)

$$\therefore \ (a^2+b^2+c^2)(A^2+B^2+C^2)$$
$$=c^2C^2(k^2m^2+m^2+1)^2$$
$$=\{(kmC)(kmc)+(mC)(mc)+Cc\}^2$$
$$=(Aa+Bb+Cc)^2.$$

উদাহরণ 6. কোন দোলকের দোলনের সময় উহার দৈর্ঘ্যের বর্গমূলের সহিত সরল ভেদে থাকে। 40 সে.মি. দৈর্ঘ্যের একটি দোলক এক সেকেণ্ডে একবার দোলন হইল ; কত দৈর্ঘ্যের একটি দোলক 2·5 সেকেণ্ডে একবার দোলে ?

মনে করি, দোলকটি দৈর্ঘ্য l সে.মি. এবং উহা T সেকেণ্ডে একবার দোলে।

তাহা হইলে, প্রদত্ত শর্তানুসারে,

$$T \propto \sqrt{l} ;$$

বা, $T=k\sqrt{l}$, (k ভেদের ধ্রুবক)।

দেওয়া আছে, $l=40$ সে.মি. হইলে $T=1$ সেকেণ্ড।

$$\therefore \ 1=k\sqrt{40}.$$

তাহা হইলে, $T=2{\cdot}5$ সেকেণ্ড, অর্থাৎ, 5/2 সেকেণ্ড হইলে,

$$\frac{5}{2}=k\sqrt{l} \quad \text{বা,} \quad l=\frac{25}{4}\times\frac{1}{k^2}$$

$$=\tfrac{25}{4}\times 40=250.$$

$\therefore$ নির্ণেয় দৈর্ঘ্য = 250 সে মি.।

উদাহরণ 7. কোন তরল পদার্থের চাপ উহার গভীরতার সহিত সরল ভেদে থাকে যখন উহার ঘনত্ব ধ্রুবক; এবং ইহা ঘনত্বের সহিত সরল ভেদে থাকে যখন গভীরতা ধ্রুবক। যখন গভীরতা 32 এবং ঘনত্ব 1 তখন চাপ 1 হইলে, গভীরতা নির্ণয় কর যখন চাপ 2 এবং ঘনত্ব 16.

ধরা যাক্, তরল পদার্থের চাপ $= p$; গভীরতা $= d$ এবং ঘনত্ব $= \rho$.

তাহা হইলে, প্রশ্নানুসারে,

$p \propto d$, যখন ρ ধ্রুবক;

এবং, $p \propto \rho$, যখন d ধ্রুবক।

সুতরাং, যৌগিক ভেদের উপপাদ্য অনুসারে,

$p \propto d\rho$, যখন d এবং ρ উভয়েই চল।

$\therefore \ p = k\rho d$, যেখানে k ধ্রুবক।

আবার, প্রদত্ত শর্তানুসারে,

যখন, $d = 32, \ \rho = 1$, তখন $p = 1$.

$\therefore \ 1 = k.32.1; \quad \therefore \ k = \frac{1}{32}$.

সুতরাং, $p = \frac{1}{32}\rho d$.

মনে করি, $d = d_1$, যখন $p = 2$ এবং $\rho = 16$.

$\therefore \ 2 = \frac{1}{32} \times 16 \times d_1, \quad \therefore \ d_1 = 4$.

$\therefore$ নির্ণেয় গভীরতা $= 4$ (একক)।

উদাহরণ 8. যদি 5 জন লোক 9 দিনে 10 একর জমি চাষ করিতে পারে তবে, 50 একর জমি চাষ করিতে 25 জন লোকের কত দিন লাগিবে ভেদ প্রণালীর সাহায্যে নির্ণয় কর।

মনে করি, x লোকসংখ্যা; d দিন সংখ্যা; এবং A জমির পরিমাণ (একরে)

তাহা হইলে,

$x \propto A$, যখন d ধ্রুবক;

এবং, $x \propto d^{-1}$, যখন A ধ্রুবক।

সুতরাং, যৌগিক ভেদের উপপাদ্য অনুযায়ী,

$x \propto A/d$, যখন A এবং d উভয়ে চল।

$\therefore \ x = kA/d$, যেখানে k ধ্রুবক।

প্রশ্নানুযায়ী, $x=5$, যখন $d=9$ এবং $A=10$.

$$\therefore\ 5=k\times 10/9\ ; \quad \text{বা,}\quad k=9/2.$$

$$\therefore\ x=9A/2d.$$

এখন, $A=50$ এবং $x=25$ বসাইয়া পাই,

$$25=9\times 50/2d\ ; \quad \text{বা,}\quad d=9.$$

$\therefore$ নির্ণেয় উত্তর : 9 দিন।

উদাহরণ 9. কোন হোষ্টেলের মোট খরচের কিছু অংশ নির্দিষ্ট (fixed) এবং অপর অংশ বোর্ডারের সংখ্যার সহিত সরল ভেদে অবস্থিত। 120 জন বোর্ডারের জন্য মোট খরচ 2,000 টাকা এবং 100 জন বোর্ডারের জন্য মোট খরচ 1,700 টাকা হইল। বোর্ডারের সংখ্যা কত হইলে, মোট 1,880 টাকা খরচ হইবে ?

মনে করি, নির্দিষ্ট খরচ $=K$ টাকা ; বোর্ডারের সংখ্যা যখন x, তখন মোট খরচ E টাকা।

তাহা হইলে,

$$E=K+A, \quad \text{যেখানে } A\propto x$$

অর্থাৎ, $E=K+mx$, যেখানে m ধ্রুবক।

প্রদত্ত শর্তানুযায়ী, যখন $x=120$, $E=2000$;

এবং, যখন $x=100$, $E=1700$.

$$\therefore\ 2000=K+m\times 120$$

এবং, $1700=K+m\times 100$

বিয়োগ করিয়া, $300=m\times 20$;

$\therefore\ m=15.$

তাহা হইলে,

$$2000=K+15\times 120\ ; \quad \therefore\ K=200.$$

$$\therefore\ E=200+15x$$

এখানে, $E=1880$ বসাইয়া পাই,

$$1880=200+15x\ ; \quad \therefore\ x=112$$

$\therefore$ নির্ণেয় উত্তর : 112 জন।

উদাহরণ 10. বগিবিহীন কোন রেল ইঞ্জিনের বেগ (velocity) ঘণ্টায় 42 কি.মি. এবং ইহার বেগ হ্রাসের পরিমাণ উহার সহিত সংযুক্ত বগির সংখ্যার বর্গমূলের সহিত সরল ভেদে অবস্থিত। যদি 9টি বগি সংযুক্ত থাকিলে বেগ ঘণ্টায় 24 কি.মি. হয়, তবে সর্বাধিক কয়টি বগি যুক্ত থাকিলে উহা চলিতে সক্ষম হইবে ?

মনে করি, ইঞ্জিনটির বেগ ঘণ্টায় v কি.মি., যখন উহার সহিত n সংখ্যক বগি সংযুক্ত থাকে; এবং উহার বেগ ঘণ্টায় 42 কি.মি., যখন উহার সহিত কোন বগি সংযুক্ত থাকে না।

তাহা হইলে প্রদত্ত শর্তানুসারে,

$$(42-v) \propto \sqrt{n}$$

$$\therefore \quad 42-v=k\sqrt{n}, \quad \text{যেখানে } k \text{ ধ্রুবক।}$$

$$\text{বা,} \quad v=42-k\sqrt{n}.$$

দেওয়া আছে, $v=24$, যখন $n=9$.

$$\therefore \quad 24=42-k\sqrt{9}.$$

$$\therefore \quad k=6.$$

$$\therefore \quad v=42-6\sqrt{n}$$

$$=6(7-\sqrt{n})$$

দেখা যাইতেছে, $n=49$ হইলে, $v=0$.

সুতরাং, বগির সংখ্যা 49 হইলে উহার বেগ শূন্য হইবে।

সুতরাং, ইঞ্জিনের সহিত সর্বাধিক 48টি বগি সংযুক্ত করা যাইবে।

প্রশ্নমালা 36

A—বিভাগ

1. A, B এর সহিত সরল ভেদে আছে; এবং $B=7$ যখন $A=5$; B এর মান বাহির কর, যখন $A=10$.

2. $A^3 \propto B^3$ এবং $B=4$ যখন $A=3$; B এর মান কত যখন $A=2\frac{1}{4}$.

3. যদি $y \propto x^2$ এবং $y=12$ যখন $x=18$; y এবং x এর মধ্যে যে সম্বন্ধ আছে তাহা বাহির কর।

4. A, B এবং C এর সহিত যৌগিক ভেদে অবস্থিত এবং $A=2$ যখন $B=\frac{3}{5}$ এবং $C=\frac{10}{27}$; $A=54$ এবং $B=3$ হইলে C এর মান বাহির কর।

5. A, B এর সহিত ব্যস্ত ভেদে আছে এবং $A=7$ যখন $B=3$; A এর মান বাহির কর যখন $B=5$.

6. যদি x, y এর সহিত সরল ভেদে এবং z এর সহিত ব্যস্ত ভেদে থাকে এবং $x=10$ যখন $y=5$ এবং $z=2$; x এর মান বাহির কর যখন $y=3$, $z=2$.

7. x, y এর বর্গের সহিত সরল ভেদে এবং z এর ঘনমূলের সহিত ব্যস্ত ভেদে আছে এবং $x=2$ যখন $y=4$; $z=8$; y এর মান কত যখন $x=3$; $z=27$?

8. p, দুইটি রাশির সমষ্টির সহিত সরল ভেদে অবস্থিত এবং উহাদের একটি x এর সহিত সরল ভেদে এবং অপরটি x এর সহিত ব্যস্ত ভেদে আছে। $p=6$ যখন $x=4$; এবং $p=3\frac{1}{3}$ যখন $x=3$. p এর মান বাহির কর, যখন $x=2$. [P. U. 1961]

9. চলরাশি y দুইটি রাশির সমষ্টির সমান। রাশি দুইটির একটি x এর সহিত সরলভেদে এবং অপরটি $\sqrt{x}$ এর সহিত সরলভেদে আছে। $y=10$ যখন $x=4$; এবং $y=21$, যখন $x=9$ হইলে, x এবং y এর মধ্যে সম্বন্ধ বাহির কর।

10. চলরাশি y দুইটি রাশির সমষ্টির সমান। রাশি দুইটির একটি x এর সহিত সরল ভেদে এবং অপরটি x এর সহিত ব্যস্ত ভেদে আছে। $y=pa+b$ যখন $x=4$ এবং $y=pb+a$ যখন $x=b$ হইলে, x এর মান বাহির কর, যখন $y=pab+1$.

B—বিভাগ

11. যদি $x^2+y^2 \propto xy$, তবে দেখাও যে, $x+y \propto x-y$.

12. যদি $x+y \propto x-y$, তবে দেখাও যে, $x^2+y^2 \propto xy$.

13. যদি $x+y \propto x-y$, তবে দেখাও যে, $x^3+y^3 \propto xy(x+y)$.

14. যদি $x \propto y$ এবং $y \propto z$ হয়, তবে দেখাও যে,
$\sqrt{yz}+\sqrt{zx}+\sqrt{xy} \propto x+y+z$.

15. যদি $x \propto y \propto z$ হয়, তবে দেখাও যে, $ax^2+by^2+cz^2 \propto (px+qy+rz)^2$ যেখানে, a, b, c, p, q, r ধ্রুবক।

16. যদি $x \propto \frac{1}{y}$ এবং $y \propto \frac{1}{z}$ হয়, তবে দেখাও যে, $z \propto x$.

17. $x \propto yz$ এবং $y \propto zx$ হইলে, দেখাও যে, z একটি ধ্রুবক।

18. $\frac{x}{y} \propto x+y$ এবং $\frac{y}{x} \propto x-y$ হইলে, দেখাও যে,
x এবং y এর পরিবর্তন সত্ত্বেও $x^2-y^2=$ ধ্রুবক।

19. যদি $\frac{1}{x}-\frac{1}{y} \propto \frac{1}{x-y}$ হয়, তবে দেখাও যে, $x^2+y^2 \propto xy$.

20. যদি $x+y \propto z$ যখন y ধ্রুবক এবং $z+x \propto y$ যখন z ধ্রুবক হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $x+y+z \propto yz$ যখন y এবং z উভয়েই চলরাশি।

21. যদি x, y, z চলরাশি হয় এবং $(x+y-z)(x+z-y) \propto yz$ কিন্তু $y+z-x=$ ধ্রুবক, তবে দেখাও যে, $x+y+z \propto yz$.

22. যদি $u^2+v^2 \propto x^2+y^2$ এবং $uv \propto xy$ ও $\frac{u}{v}+\frac{v}{u}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ হয়,
তবে দেখাও যে, $u+v \propto x+y$.

C—বিভাগ

23. কোন বৃত্তের ক্ষেত্রফল উহার ব্যাসার্ধের বর্গের সহিত সরলভেদে অবস্থিত। যখন বৃত্তের ব্যাসার্ধ 3 ফুট 6 ইঞ্চি, তখন উহার ক্ষেত্রফল $38\frac{1}{2}$ বর্গফুট। বৃত্তের ব্যাসার্ধ 4 ফুট 8 ইঞ্চি হইলে, উহার ক্ষেত্রফল বাহির কর। [H. S. 1960]

24. কোন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল উহার উন্নতি এবং ভূমির সহিত যৌগিক ভেদে অবস্থিত। ত্রিভুজটির উন্নতি 18 ফুট এবং ভূমি 33 ফুট 2 ইঞ্চি হইলে উহার ক্ষেত্রফল $33\frac{1}{6}$ বর্গ গজ হয়। ত্রিভুজের উন্নতি 2 ফুট 9 ইঞ্চি এবং ভূমি 10 ফুট 4 ইঞ্চি হইলে উহার ক্ষেত্রফল কত হইবে? [H. S. Comp. 1964]

25. স্থিতাবস্থা হইতে একটি গুরুদ্রব্যের পতনের দূরত্বের পরিমাণ উহার পতন কালের বর্গের সহিত সরলভেদে পরিবর্তিত হয়। 3 সেকেণ্ডে দ্রব্যটি 72 ফুট পড়িলে, 4 সেকেণ্ডে উহা কত দূরত্ব অতিক্রম করিবে? [H. S. Comp. 1970]

26. ভেদের প্রণালীতে বাহির কর : কতজন লোক 8 দিনে 30 টাকা উপার্জন করিবে যদি 3 জন লোক 16 দিনে 9 টাকা উপার্জন করে? [H. S. 1970]

27. গোলকের আয়তন উহার ব্যাসার্ধের ত্রিঘাতের সহিত সরল ভেদে পরিবর্তিত হয়। $1\frac{1}{2}$, 2 এবং $2\frac{1}{2}$ মিটার ব্যাস বিশিষ্ট তিনটি নিরেট গোলককে গলাইয়া একটি নূতন নিরেট গোলকে পরিণত করা হইলে নূতন গোলকের ব্যাস কত হইবে তাহা বাহির কর। [H. S. 1971]

28. কোন সমতল ক্ষেত্রের উপর বায়ুর চাপ ঐ সমতল ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল এবং বায়ুর বেগের বর্গের সহিত যৌগিক ভেদে অবস্থিত। যখন বায়ুর বেগ ঘণ্টায় 8 মাইল, তখন এক বর্গ ফুট সমতলের উপর বায়ুর চাপ 2 পাউণ্ড। যখন এক বর্গগজ সমতলের উপর বায়ুর চাপ 72 পাউণ্ড তখন বায়ুর বেগ নির্ণয় কর। [P. U. 1968]

29. আলোর উজ্জ্বলতা উৎপত্তিস্থলের দূরত্বের বর্গের সহিত ব্যস্ত ভেদে অবস্থিত। বাতি হইতে 8 ইঞ্চি দূরে অবস্থিত বইটিকে কতদূরে সরাইলে আলোর উজ্জ্বলতা অর্ধেক হইবে?

30. বৃত্তাকার চোঙের আয়তন উহার ভূমির ব্যাসার্ধের বর্গের সহিত সরল ভেদে অবস্থিত যখন উচ্চতা একই থাকে এবং উচ্চতার সহিত সরল ভেদে অবস্থিত যখন ভূমি একই থাকে। যখন উচ্চতা 7 ফুট এবং ভূমির ব্যাস 4 ফুট তখন আয়তন 88 ঘনফুট। চোঙের উচ্চতা কত হইলে, উহার ভূমির ব্যাসার্ধ 9 ফুট এবং আয়তন 396 ঘনফুট হইবে?

31. শঙ্কুর আয়তন উহার উচ্চতা ও বৃত্তাকার ভূমির ক্ষেত্রফলের সহিত যৌগিক ভেদে পরিবর্তিত হয়। শঙ্কুর আয়তন 50 ঘনফুট যখন উচ্চতা 15 ফুট এবং ভূমির

ক্ষেত্রফল 10 বর্গফুট। শঙ্কুর আয়তন 770 ঘনফুট এবং উচ্চতা 15 ফুট হইলে, উহার বৃত্তাকার ভূমির ব্যাসার্ধ বাহির কর। ($\pi = 22/7$) [H. S. Comp. 1968]

32. পিরামিডের আয়তন উহার উচ্চতা এবং ভূমির ক্ষেত্রফলের সহিত যৌগিক ভেদে পরিবর্তিত হয়। যখন ভূমির ক্ষেত্রফল 60 বর্গফুট এবং উচ্চতা 14 ফুট তখন উহার আয়তন 280 ঘনফুট। যখন আয়তন 390 ঘনফুট এবং উচ্চতা 26 ফুট, তখন ভূমির ক্ষেত্রফল কত? [H. S. 1967]

33. x ফুট গভীর একটি কূপ খনন করিবার জন্য মোট খরচের এক অংশ x এর সহিত সরল ভেদে এবং অপর অংশ x^2 এর সহিত সরল ভেদে অবস্থিত। যদি 100 ফুট এবং 200 ফুট গভীর কূপ খননের জন্য যথাক্রমে 500 টাকা এবং 1200 টাকা খরচ পড়ে তবে 250 ফুট গভীর কূপ খনন করিতে কত খরচ পড়িবে? [P. U. 1969]

34. কোন হোষ্টেলের মোট খরচের কিছু অংশ ধ্রুবক এবং বাকী অংশ বোর্ডারের সংখ্যার সহিত সরল ভেদে অবস্থিত। বোর্ডিংএর খরচ হিসাবে প্রত্যেক বোর্ডারকে প্রতিমাসে 160 টাকা করিয়া দিতে হয়। বোর্ডারের সংখ্যা যখন 50 তখন মাথাপিছু 20 টাকা লাভ হয় এবং বোর্ডারের সংখ্যা যখন 75 তখন মাথা পিছু 25 টাকা লাভ হয়। যখন বোর্ডারের সংখ্যা 80 হইবে, তখন মোট লাভ কত হইবে?

35. বগিবিহীন একখানি রেল ইঞ্জিন ঘণ্টায় 24 মাইল যাইতে পারে এবং উহার বেগের হ্রাসের পরিমাণ উহার সহিত সংযুক্ত বগির সংখ্যার বর্গমূলের সহিত সরল ভেদে অবস্থিত। 4 খানি বগি সংযুক্ত থাকিলে উহার বেগ ঘণ্টায় 20 মাইল হয়। সর্বাধিক কতগুলি বগি সংযুক্ত থাকিলে ইঞ্জিনটি চলিতে সক্ষম হইবে? [H. S. 1968]

36. তামার তারের বৈদ্যুতিক রোধ উহার দৈর্ঘ্যের সহিত সরল ভেদে এবং উহার বেধের (thickness) বর্গের সহিত ব্যস্ত ভেদে অবস্থিত। দুইটি তামার তারের বৈদ্যুতিক রোধ সমান এবং উহাদের একটির দৈর্ঘ্য অপরটির দ্বিগুণ হইলে, তাহাদের বেধের তুলনা কর।

37. একটি বাষ্পচালিত রেল ইঞ্জিনের কয়লা খরচ উহার বেগের বর্গের সহিত সরল ভেদে অবস্থিত। যখন ইঞ্জিনের বেগ ঘণ্টায় 50 কি. মি., তখন প্রতি ঘণ্টায় 240 কিলোগ্রাম কয়লা খরচ হয়। যদি অন্যান্য খরচ প্রতি ঘণ্টায় 9 টাকা হয় এবং প্রতি টন কয়লার দাম 150 টাকা হয়, ইঞ্জিনের বেগ ঘণ্টায় 40 কিলোমিটার হইলে, 300 কিলোমিটার দূরত্ব যাইতে মোট খরচ কত পড়িবে? কত গতিবেগ হইলে, সর্বাপেক্ষা কম খরচ পড়িবে, এবং মোট কত টাকা তখন লাগিবে?

38. কোন উপগ্রহের কক্ষপথের (যাহার কেন্দ্র পৃথিবীর কেন্দ্রে অবস্থিত) ব্যাসার্ধ r এবং ঐ কক্ষপথে উপগ্রহটির বেগ v হইলে $v \propto 1/\sqrt{r}$ এইরূপ একটি নির্দিষ্ট উপগ্রহের কক্ষপথের ব্যাসার্ধ পৃথিবীর ব্যাসের দ্বিগুণ হইলে, উপগ্রহটির বেগ হয় ঘণ্টায় 20,700 কিলোমিটার। যে উপগ্রহ পৃথিবীর উপরিভাগ হইতে সর্বদাই 1,700 কিলোমিটার উচ্চে থাকে, তাহার বেগ নির্ণয় কর। (ধরা যায়, পৃথিবী একটি গোলক যাহার ব্যাসার্ধ 6400 কিলোমিটার)। [H. S. 1967]

পরিশিষ্ট

P-1. সূচক উপপাদ্য এর প্রমাণ ঃ

$$e^x = 1 + \frac{x}{\lfloor 1} + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \quad \dots \quad \dots \quad \text{to } \infty.$$

এখন, $n > 1$ হইলে, দ্বিপদ উপপাদ্যের সাহায্যে,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx} = 1 + nx \cdot \frac{1}{n} + \frac{nx.(nx-1)}{\lfloor 2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

$$+ \frac{nx.(nx-1)(nx-2)}{\lfloor 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \quad \dots \quad \text{to } \infty$$

$$= 1 + x + \frac{x\left(x - \frac{1}{n}\right)}{\lfloor 2} + \frac{x\left(x - \frac{1}{n}\right)\left(x - \frac{2}{n}\right)}{\lfloor 3}$$

$$+ \quad \dots \quad \dots \quad \text{to } \infty. \quad \dots \quad (1)$$

এখন, (1)-তে $x = 1$ বসাইয়া পাই,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\lfloor 2} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{\lfloor 3}$$

$$+ \quad \dots \quad \dots \quad \text{to } \infty. \quad \dots \quad (2)$$

এখন, যেহেতু, $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}^x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx}$,

$$\therefore \left\{1 + 1 + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\lfloor 2} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{\lfloor 3} + \dots \quad \dots \text{to } \infty\right\}^x$$

$$= 1 + x + \frac{x\left(x - \frac{1}{n}\right)}{\lfloor 2} + \frac{x\left(x - \frac{1}{n}\right)\left(x - \frac{2}{n}\right)}{\lfloor 3} + \dots \quad \dots \text{to } \infty \quad \dots (3)$$

n-এর যে কোন মানের জন্য (3) সর্বদা সত্য বলিয়া $n \to \infty$ করিয়া, (3) হইতে পাই,

$$\left\{1 + 1 + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3} + \dots \quad \dots \text{to } \infty\right\}^x$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \dots \quad \dots \text{to } \infty.$$

অর্থাৎ, x-এর যে কোন মানের জন্য,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \dots \quad \dots \text{to } \infty.$$

দ্রষ্টব্য : ধরি, $a>0$ এবং $a=e^k$; তাহা হইলে, $k=\log_e a$.

$$\therefore \quad a^x=e^{kx}=1+kx+\frac{k^2x^2}{\lfloor 2}+\frac{k^3x^3}{\lfloor 3}+\cdots \quad \ldots \text{ to } \infty.$$

$$\therefore \quad a^x=1+(\log_e a)x+(\log_e a)^2\frac{x^2}{\lfloor 2}+(\log_e a)^3\frac{x^3}{\lfloor 3}+\cdots \text{ to } \infty.$$

P-2. লগারিদম্ উপপাদ্যের প্রমাণ :

$-1<x\leq 1$ হইলে,

$$\log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots \quad \ldots \text{ to}\infty .$$

এখন, $a>0$ হইলে, y-এর যে কোন মানের জন্য,

$$a^y=1+y(\log_e a)+\frac{y^2}{\lfloor 2}(\log_e a)^2+\ldots \quad \ldots \text{ to } \infty. \qquad (1)$$

তখন, (1)-তে $a=1+x$ বসাইয়া পাই,

$$(1+x)^y=1+y\{\log_e(1+x)\}+\frac{y^2}{\lfloor 2}\{\log_e(1+x)\}^2+\ldots \quad \ldots \text{ to } \infty.$$

এখন, $|x|<1$ হইলে, দ্বিপদ উপপাদ্যের সাহায্যে y-এর যে কোন মানের জন্য,

$$(1+x)^y=1+yx+\frac{y(y-1)}{\lfloor 2}x^2+\frac{y(y-1)(y-2)}{\lfloor 3}x^3+\cdots \quad \ldots \text{ to } \infty \ldots (3)$$

সুতরাং, (1) এবং (2) হইতে পাই,

$$1+y\{\log_e(1+x)\}+\frac{y^2}{\lfloor 2}\{\log_e(1+x)\}^2+\cdots \quad \ldots \text{ to } \infty$$

$$=1+yx+\frac{y(y-1)}{\lfloor 2}x^2+\frac{y(y-1)(y-2)}{\lfloor 3}x^3+\cdots \quad \ldots \text{ to } \infty.$$

ইহা একটি অভেদ বলিয়া, উভয় পক্ষ হইতে y-এর সহগ লইয়া পাই,

$$\log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots \quad \ldots \text{to } \infty.$$

আবার, $x=1$ এর জন্য উভয় পক্ষের মান সমান হইবে। সুতরাং, $-1<x\leq 1$ হইলে,

$$\log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots \quad \ldots \text{ to } \infty.$$

উদাহরণ 1. a এবং b ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং $a>b>1$ হইলে, দেখাও যে,

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)^a>\left(1+\frac{1}{b}\right)^b.$$

এথান থেকে দেখাও যে, $(1\frac{1}{2})^2<(1\frac{1}{3})^3<(1\frac{1}{4})^4<\dots\quad\dots<e.$

দ্বিপদ উপপাদ্যের সাহায্যে,

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)^a=1+a.\frac{1}{a}+\frac{a(a-1)}{1.2}.\frac{1}{a^2}+\dots\quad\dots$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{2}{a}\right)+\dots\quad\dots\quad(A)$$

যাহার পদ সংখ্যা $=a+1$;

$$\left(1+\frac{1}{b}\right)^b=1+b.\frac{1}{b}+\frac{b(b-1)}{1.2}\frac{1}{b^2}+\dots\quad\dots$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{2}{b}\right)+\dots\quad\dots$$

যাহার পদসংখ্যা $=b+1$. $\quad\dots\quad\dots\quad(B)$

যেহেতু, $a>b$; সুতরাং, দ্বিতীয় পদের পর (A) এর যে কোন পদ (B) এর অনুরূপ পদ অপেক্ষা বৃহত্তর ; তাহা ছাড়া, (A) এর পদসংখ্যা (B) এর পদসংখ্যা অপেক্ষা বেশী।

সুতরাং, $\left(1+\frac{1}{a}\right)^a>\left(1+\frac{1}{b}\right)^b.$

সুতরাং, n যে কোন পূর্ণ সংখ্যা হইলে,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

এখানে, $n=2, 3, 4, \dots\quad\dots$ বসাইয়া পাই,

$$\left(1\frac{1}{2}\right)^2<\left(1\frac{1}{3}\right)^3<\left(1\frac{1}{4}\right)^4<\dots\dots<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

আবার,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n.\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1.2}.\frac{1}{n^2}+\dots\quad\dots$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\dots .$$

এখন, $n\to\infty$ হইলে,

$$\underset{n\to\infty}{\text{Lt}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots\quad\dots\text{ to }\infty$$

$$=e.$$

$$\therefore\quad(1\tfrac{1}{2})^2<(1\tfrac{1}{3})^3<(1\tfrac{1}{4})^4<\dots\quad\dots\quad<e.$$

উত্তরমালা

বীজগণিত

প্রশ্নমালা 1 (পৃষ্ঠা—7)

1. (*i*) প্রধান মান = 2, (*ii*) প্রধান মান = 2,
(*iii*) প্রধান মান = 16, (*iv*) প্রধান মান = 4.

2. (*i*) 5, (*ii*) $\frac{1}{8}$, (*iii*) 27. (*iv*) 3, (*v*) $\frac{4}{25}$, (*vi*) 81.

3. (*i*) $a^{-\frac{1}{2}}$, (*ii*) 2, (*iii*) 72, (*iv*) $\frac{1}{16}$, (*v*) $\frac{1}{4}$, (*vi*) a^2.

4. 25. 5. $\frac{1}{50}$. 6. $4\frac{1}{2}$. 7. x^a.

8. $\dfrac{b^2}{144a^2}$. 9. a^{-3}. 10. $a^{\frac{1}{3}}$. 11. $ab^{\frac{1}{3}}$.

12. $\sqrt{(5xy)}$. 13. x. 14. 1. 15. $\frac{3}{2}a^{\frac{7}{12}}$.

16. $2^{\frac{1}{48}}$. 17. 1. 18. 6. 19. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{16}$.

20. $a^{\frac{5}{4}}b^{-\frac{1}{6}}c^{-\frac{5}{12}}$. 21. $x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{3}{8}}$. 22. $\frac{1}{4}$. 23. b^2.

24. $\dfrac{c}{a}$.

প্রশ্নমালা 2 (পৃষ্ঠা—12)

1. $4\frac{1}{2}$ 2. $2^{q-2r-2p}$ 3. $(\frac{3}{10})^n$ 4. $2.^{n-m}.5^{n-m-4}$

5. $\frac{2}{3}$ 6. 8 7. $\left(\dfrac{p}{q}\right)^{m+n}$ 8. $x^{-(p^2+q^2)}$

9. 1 10. 1 11. 1 12. 1 13. 1

14. 1 15. x 16. 1 17. 1 18. $\dfrac{a}{b}$

19. 1 20. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{mn}$ 21. a 22. 1 23. $x-y$

24. $x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}$ 25. $a-b$ 26. $\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$

27. $a^{\frac{1}{2}}b^{-1}$.

প্রশ্নমালা 3 (পৃষ্ঠা—17)

1. $x=\frac{1}{2}$, 2. $x=-\frac{3}{2}$, 3. $x=1$,

4. $x=\frac{1}{3}$, 5. $x=1$, 6. $x=3\frac{1}{2}$,

7. $x=2$, 8. $x=0\ ;\ 2$, 9. $x=1\ ;\ y=2$,

10. $x=1\ ;\ y=1$, 11. $x=2\ ;\ y=3$, 12. $x=y=1$,

13. $x=1\ ;\ y=1$, 14. $x=3\ ;\ y=3$,

15. $x=2, y=3\ ;\ x=2, y=-3\ ;\ x=-2, y=\frac{1}{3}\ ;\ x=-2, y=-\frac{1}{3}$;

16. $x=1, y=\frac{1}{2}, z=1$. 17. $x=1, y=2\ ;\ x=\frac{14}{9}, y=\frac{7}{8}$.

প্রশ্নমালা 4 (পৃষ্ঠা—23)

1. (*i*) $\sqrt{3}$, (*ii*) $2\sqrt[3]{5}$, (*iii*) $\sqrt{12}$ বা, $2\sqrt{3}$ (*iv*) $\sqrt[3]{9}$
   (*v*) 243, (*vi*) 18, (*vii*) 3, (*viii*) 343,
   (*ix*) 144.

2. (*i*) $\sqrt{5}+\sqrt{7}$ (*ii*) $4+\sqrt{8}$, (*iii*) 5,
   (*iv*) $2+2\sqrt{2}$ (*v*) $\sqrt[3]{5^2}$, (*vi*) $\sqrt[20]{4^9}$,
   (*vii*) 12, (*viii*) $\sqrt[6]{675}$.

3. (*i*) $3\sqrt{5}$, (*ii*) $2\sqrt[3]{7}$, (*iii*) $3\sqrt[4]{5}$,
   (*iv*) -6, (*v*) $3\sqrt[5]{3}$ (*vi*) $6\sqrt[3]{5}$,
   (*vii*) $ab^2\sqrt[3]{a}$, (*viii*) $2b\sqrt[3]{ab}$, (*ix*) $-3ab^2\sqrt[3]{2}$
   (*x*) $2a^2b\sqrt[4]{2b}$, (*xi*) $3xy^2\sqrt[5]{2xy^2}$

4. (*i*) $\sqrt{20}$, (*ii*) $\sqrt[3]{864}$, (*iii*) $\sqrt[4]{405}$,
   (*iv*) $\sqrt[5]{1701}$, (*v*) $\sqrt{a^2b}$, (*vi*) $\sqrt[3]{a^3b^3c}$,
   (*vii*) $\sqrt[3]{x^6y^3z}$, (*viii*) $\sqrt[3]{a^8b^{12}}$

5. (*a*) (*i*) সদৃশ, (*ii*) সদৃশ, (*b*) (*i*) অসদৃশ, (*ii*) অসদৃশ.

6. (*i*) $\sqrt[6]{27}, \sqrt[6]{4}$, (*ii*) $\sqrt[4]{400}, \sqrt[4]{3}$, (*iii*) $\sqrt[12]{16}, \sqrt[12]{125}$,
   (*iv*) $\sqrt[6]{9}, \sqrt[6]{125}, \sqrt[6]{4}$ (*v*) $\sqrt[12]{16}, \sqrt[12]{27}, \sqrt[12]{25}$,

7. (*a*) $\sqrt[3]{125}, \sqrt[3]{a^3}, \sqrt[3]{(a+b)^3}, \sqrt[3]{b^6}, \sqrt[3]{216}$
   (*b*) $\sqrt[4]{81}, \sqrt[4]{(a+b)^4}, \sqrt[4]{a^2b^4}, \sqrt[4]{49}, \sqrt[4]{400}$.

8. (a) (i) $3\sqrt{3}, 5, 2\sqrt{6}$, (ii) $2\sqrt{3},\ 2\sqrt[4]{5},\ \sqrt{8}$,

(b) (i) $\sqrt[6]{8},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt[4]{5}$, (ii) $\sqrt[9]{12},\ \sqrt[6]{6}, \sqrt{2}$,

(c) (i) $\sqrt{81}$ বৃহত্তম ; $2\sqrt[3]{3}$ ক্ষুদ্রতম ;

(ii) $\sqrt[3]{4}$ বৃহত্তম ; $\sqrt[4]{5}$ ক্ষুদ্রতম, (iii) $\sqrt[6]{5}$ বৃহত্তম, $\sqrt[9]{7}$ ক্ষুদ্রতম,

(iv) $\sqrt[9]{8}$ বৃহত্তম ; $\sqrt[18]{12}$ ক্ষুদ্রতম।

9. (i) $2\sqrt{5}$, (ii) $6\sqrt{2}$, (iii) $3+7\sqrt[3]{3}$,

(iv) $2\sqrt{5}+3\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}$

10. (i) $\sqrt{3}$, (ii) $\sqrt{7}$, (iii) $4\sqrt{3}$, (iv) $8\sqrt{2}+\sqrt{3}$,

(v) $32\sqrt{3}$, (vi) 0, (vii) $(3ab-b)\sqrt{a}$

(viii) $(ab+b+a^2c)\sqrt{a}$, (ix) $2a(1-a)\sqrt{x}$

11. (i) $6\sqrt{10}$, (ii) 30, (iii) $10\sqrt{6}$

(iv) $180\sqrt{5}$, (v) 648, (vi) $6\sqrt[3]{18}$,

(vii) $6\sqrt[6]{2000}$, (viii) $12\sqrt[5]{8}$, (ix) $20\sqrt[12]{10125}$,

(x) $54\sqrt[18]{3125}$, (xi) $2\sqrt[12]{6912}$

12. (i) $3\sqrt{5}+5$, (ii) $5+\sqrt{15}$, (iii) $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$,

(iv) $9\sqrt{5}-5\sqrt{3}$, (v) $a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$, (vi) $(a-b)$,

(vii) $8+2\sqrt{35}$, (viii) x,

(ix) $15-10\sqrt{2}+10\sqrt{3}-5\sqrt{6}$, (x) $4+2\sqrt{10}$.

প্রশ্নমালা 5 (পৃষ্ঠা—32)

5. (i) $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}$, (ii) $(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2})(3\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{9}+4)$

(iii) $pq=n=2m+1=$ অযুগ্ম পূর্ণসংখ্যা হইলে,

উৎপাদক $=x^{2m}-x^{2m-1}y+\cdots\cdots-xy^{2m-1}+y^{2m}$;

$pq=n=2m=$ যুগ্ম পূর্ণসংখ্যা হইলে,

উৎপাদক $=(x-y)(x^{2m-2}+x^{2m-4}y^2+\cdots+x^2y^{2m-4}+y^{2m-2})$

যেখানে $x=(a^q)^{\frac{1}{n}},\ \ y=(b^p)^{\frac{1}{n}}$.

6. (i) $\frac{2}{15}\sqrt[3]{9}$, (ii) $\frac{5}{6}.\sqrt[3]{3}$, (iii) $3\sqrt{5}+6$, (iv) $\frac{2}{3}(\sqrt{5}-\sqrt{2})$,

(v) $\frac{1}{2}(7+3\sqrt{5})$, (vi) $6\sqrt{5}+4\sqrt{11}$ (vii) $5-2\sqrt{6}$,

(viii) $\frac{1}{12}(\sqrt{30}-3\sqrt{2}+2\sqrt{3})$ (ix) $\frac{1}{8}(\sqrt{15}-\sqrt{5}-\sqrt{3}+1)$,

(x) $\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$, (xi) $\frac{1}{5}(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})$, (xii) $\sqrt[3]{2}-1$.

7. (*i*) 7, (*ii*) $2a$, (*iii*) 1, (*iv*) 52, (*v*) $\frac{41}{40}(3\sqrt[3]{3}+1)+\frac{9}{40}.\sqrt[3]{9}$
(*vi*) 0, (*vii*) $3\sqrt[3]{3}+1$.

8. (*i*) $\pm(\sqrt{5}+2)$, (*ii*) $\pm(4-\sqrt{3})$, (*iii*) $\pm(\sqrt{7}-\sqrt{5})$
(*iv*) $\pm(5+\sqrt{3})$, (*v*) $\pm(3-2\sqrt{2})$, (*vi*) $\pm(2\sqrt{7}-\sqrt{5})$
(*vii*) $\pm(\sqrt{a+b}-\sqrt{c})$, (*viii*) $\pm(\sqrt{a^2-b^2}-b)$,
(*ix*) $\pm(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1})$, (*x*) $\pm(\sqrt{\frac{7}{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}})$,
(*xi*) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(3-\sqrt{5})$, (*xii*) $\pm\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})\right\}$,
(*xiii*) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{5}-\sqrt{3})$, (*xiv*) $\pm\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)$,
(*xv*) $\pm(3\sqrt{3}-1)$, (*xvi*) $\pm(\sqrt{15}+\sqrt{3})$,
(*xvii*) $\pm\sqrt[4]{2}.(2-\sqrt{3})$, (*xviii*) $\pm\sqrt[4]{3}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$
(*xix*) $\pm\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}(3-\sqrt{5})$, (*xx*) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2a+b}+\sqrt{b})$
(*xxi*) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})$,
(*xxii*) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-2})$,
(*xxiii*) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})$,
(*xxiv*) $\pm(1+\sqrt{2}-\sqrt{5})$,
(*xxv*) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})$.

9. (*i*) $5-\sqrt{3}$, (*ii*) $2\sqrt{13}+7$, (*iii*) $\sqrt[4]{2}.(\sqrt{3}-\sqrt{2})$
(*iv*) $\sqrt{3}-1$, (*v*) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$, (*vi*) $2-\sqrt{3}$;
(*vii*) $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$, (*viii*) $1+\sqrt{5}+\sqrt{7}$,
(*ix*) $\frac{1}{5}(\sqrt{10}+\sqrt{15})$ (*x*) $3-\sqrt{3}$,

প্রশ্নমালা 6 (পৃষ্ঠা—36)

1. 0, 2. 0, 3. 0, 4. 0
5. $\frac{1}{2}(\sqrt{2}-\sqrt{6})$ 6. 0, 7. 0.
8. $\frac{1}{3}(3\sqrt{2}-4\sqrt{3}+3\sqrt{6})$ 9. $\sqrt{6}-2$ 10. $\frac{1}{5}.\sqrt{15}$

11. 14·5, 12. $\frac{7}{13}$. 13. 0·44721 (প্রায়),
14. 1·148 (প্রায়) 16. 0, 19. 4, 20. 1,
22. $n(n-1)$, 24. (*i*) $29+56\sqrt{15}$, (*ii*) 184,
26. $\frac{1}{2}\left(ab+\frac{1}{ab}\right)$ 28. $2\sqrt{(a^2-b^2)}$, 30. 2.

প্রশ্নমালা 7 (পৃষ্ঠা—41)

1. 3, 2. 6, 3. কোন সমাধান নাই,
4. 2, 5. 25, 6. 5/4,
7. $\pm\frac{2}{5}\sqrt{5}$, 8. $\frac{ab}{a-b}$, 9. 1, -8,
10. $4a$, $-4a$, 11. 0, $7a/9$, 12. 1,
13. 4. 14. 5, -5, 15 3, -3,
16. 2, $-9/2$, 17. 2, $\frac{1}{2}$, 18. 5,
19. 1, $-5/2$, 20. 3, $-1/2$.

প্রশ্নমালা 8 (পৃষ্ঠা—48)

1. (*i*) $i, -i$, (*ii*) $2i, -2i$, (*iii*) $i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}$,
(*iv*) $\frac{1}{2}i\sqrt{10}, -\frac{1}{2}i\sqrt{10}$, (*v*) $\pm 2, \pm 2i$
2. (*i*) -4, (*ii*) -6, (*iii*) $-\sqrt{6}$ (*iv*) $5i$
(*v*) i, (*vi*) 2.
3. (*i*) -3, (*ii*) -20, (*iii*) 15, (*iv*) $2i$,
(*v*) $4i$, (*vi*) $-4\sqrt{3}i$, (*vii*) $\sqrt{2}$, (*viii*) 0.
4. (*i*) √, (*ii*) ×, (*iii*) ×, (*iv*) √,
(*v*) × (*vi*) √
5. (*i*) $21i$, (*ii*) $7i$, (*iii*) -72, (*iv*) -30,
(*v*) 2, (*vi*) $\sqrt{2}$ (*vii*) -12 (*viii*) -36, (*ix*) 256
(*x*) -108 (*xi*) -41472.
6. (*i*) $-i$, (*ii*) 1, (*iii*) 1 (*iv*) i,
(*v*) $(-1)^n i$, (*vi*) i, (*vii*) i (*viii*) 1 (*ix*) 0,
(*x*) 3, (*xi*) 1, (*xii*) 2,

7. (i) $3-4i$, (ii) $5+3i$, (iii) $-7-2i$,
(iv) $-2+4i$ (v) $-4i$, (vi) $4i$, (vii) 5.

8. (i) $x=3, y=2$, (ii) $x=0$, $y=-3$.

9. $x=-4, y=3$. 10. $x=3/13, y=-2/13$.

11. (i) ঠিক আছে, (ii) ঠিক আছে, (iii) ঠিক নাই,
(iv) ঠিক নাই (v) ঠিক নাই, (vi) ঠিক নাই

12. (i) ঠিক নহে, (ii) ঠিক নহে, (iii) ঠিক আছে
(iv) ঠিক আছে, (v) ঠিক নহে, (vi) ঠিক নহে,
(vii) ঠিক আছে, (viii) ঠিক আছে (ix) ঠিক আছে।

প্রশ্নমালা 9 (পৃষ্ঠা—67)

1. (i) 3, (ii) $\sqrt{13}$, (iii) 2, (iv) 10
(v) $\sqrt{2}/5$, (vi) π, (vii) $\pi/2$, (viii) $-\pi/2$,

2. (i) 4, (ii) $\sqrt{3}$, (iii) $180°$, (iv) $-90°$,
(v) $-45°$, (vi) $-135°$,

3. (i) $-7+22i$, (ii) $16-37i$, (iii) $-46+128i$,
(iv) $4-3\sqrt{6}i$, (v) $0+i$, (vi) $0+i$,
(vii) $A+iB$, $A=(ac-bd)/(c^2+d^2)$, $B=-(ad+bc)/(c^2+d^2)$
(viii) $0+i$, (ix) $-19/10+17/10.i$,
(x) $17/13+6/13i$, (xi) $-36/169-15/169i$,
(xii) $37/13+16/13i$, (xiii) $119/169-120/169i$,
(xiv) $-12/25-16/25i$, (xv) $2/5-1/5i$.

4. -8, 5. $x=\frac{4}{7}$, $y=-\sqrt{6}/14$

6. $X=\dfrac{(a+bx)(c+dx)+bdy^2}{(c+dx)^2+d^2y^2}$, $Y=\dfrac{y(bc-ad)}{(c+dx)^2+d^2y^2}$.

9. $ad+bc=0$ 11. (i) -3, (ii) -18.

17. (i) 5, (ii) $\sqrt{10}$, (iii) 5, (iv) $3/5$, (v) $1/2$, (vi) 1,

18. (i) π, (ii) 0, (iii) $\pi/4$, (iv) $\pi/2$, (v) $-\pi/2$,
(vi) $-\pi/6$. (vii) $5\pi/6$ (viii) $5\pi/12$, (ix) $\pi/2$,
(x) $\pi/2$, (xi) $-3\pi/4$ (xii) $\pi/6$.

23. $\arg(z_1)=\pi/6$; $\arg(z_2)=2\pi/3$.

25. $\arg(z_1)=3\pi/4$; $\arg z_2=-\pi/3$.

28. $AB=8$ একক ; $BC=6$ একক ; AC কর্ণ $=10$ একক।

প্রশ্নমালা 10 (পৃষ্ঠা—76)

3. (i) $\pm(5+3i)$, (ii) $\pm(4-3i)$, (iii) $\pm(3-2i)$,

(iv) $\pm(3-4i)$, (v) $\pm(2+3i)$, (vi) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(5-3i)$

(vii) $\pm\frac{1}{2}(\sqrt{2\sqrt{2}+2}+i\sqrt{2\sqrt{2}-2})$,

(viii) $\pm\frac{1}{2}(\sqrt{2\sqrt{2}+2}-i\sqrt{2\sqrt{2}-2})$,

(ix) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, (x) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$

(xi) $\pm(3+7i)$, (xii) $\pm(\sqrt{2}+3i)$

(xiii) $\pm(a-i)$, (xiv) $\pm(\sqrt{a+ib}+\sqrt{a-ib})$,

(xv) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{a^2+a+1}-i\sqrt{a^2-a+1})$

(xvi) $\pm(\sqrt{1+a}+i\sqrt{1-a})$

(xvii) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{x^2+1}+i\sqrt{x^2-1})$,

(xviii) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{x^2+x+1}+i\sqrt{x^2-x+1})$,

(xix) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{x+3}-i\sqrt{x+1})$,

(xx) $\pm\left(a+\frac{1}{a}+i\right)$,

(xxi) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3x+1}+i\sqrt{x-3})$

4. (i) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(5-i)$, (ii) $\pm(3-i)$

(iii) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}+i)$, (iv) $\pm(\sqrt{2}+i)$

(v) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$, (vi) $\pm(1+i)$

7. (i) -1 ; $\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$;

(ii) $2, -1+i\sqrt{3}$; $-1-i\sqrt{3}$;

(iii) $-3, \frac{3}{2}(1+i\sqrt{3})$; $\frac{3}{2}(1-i\sqrt{3})$;

8. (i) $1, -1, i, -i$; (ii) $2, -2, 2i, -2i$;

(iii) $2+i, -2-i$; $2i-1$; $-2i+1$.

20. $(1-bc-ca-ab)^2+(a+b+c-abc)^2$.

21. $x=ap+bq+cr$; $y=aq+br+cp$; $z=ar+bp+cq$.

প্রশ্নমালা—11 (পৃষ্ঠা—94)

1. (i) ঠিক নাই ; বীজ : 2, 2 ; (ii) ঠিক আছে ; (iii) ঠিক আছে ; (iv) ঠিক আছে। 2. (a) (ii) $2-\sqrt{3}$. (b) (ii) $5+3i$.

3. (i) $-3\pm 3i\sqrt{2}$, (ii) 5, 1 ; (iii) 9, −3 ;

(iv) $3\pm\sqrt{7}$; (v) $-3\pm 5i$, (vi) $2\pm i\sqrt{3}$,

(vii) 7 ; 7 ; (viii) 17, −2 ; (ix) −5/3, −5/3 ;

(x) 3/2, 4/7 ; (xi) 5, $\frac{1}{2}(1\pm i\sqrt{23})$;

(xii) 0, $\frac{1}{2}\{-(a+b+c)\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2-2(bc+ca+ab)}\}$;

(xiii) $\frac{1}{2}\ -5\pm\sqrt{17})$, $\frac{1}{2}(-5\pm i\sqrt{7})$;

(xiv) 2, $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}(3\pm i\sqrt{7})$; (xv) 3, −3 ; (xvi) 0, 0 ;

(xvii) $x=3, y=2, x=-5/2, y=-7/2$.

(xviii) $x=3, y=2, x=41/8, y=-1/8$.

4. (i) সমীকরণ, (ii) অভেদ, (iii) সমীকরণ, (iv) অভেদ, (v) অভেদ।

5. (i) $x^2-2x-63=0$, (ii) $2x^2+9x-35=0$,

(iii) $x^2+12x+36=0$, (iv) $x^2-14x+46=0$,

(v) $x^2+6x-11=0$, (vi) $x^2-10x+28=0$.

6. (i) $x^2-6x+2=0$, (ii) $x^2+10x+13=0$,

(iii) $x^2+6x-54=0$, (iv) $x^2-18=0$,

(v) $x^2-14x+58=0$, (vi) $x^2-6x+17=0$,

(vii) $x^4-82x^2+3481=0$, (viii) $x^2+49=0$,

(ix) $x^2+18=0$, (x) $4x^2-6x+1=0$,

(xi) $x^2+4x-3=0$, (xii) $x^2-7x+1=0$,

(xiii) $7x^2-6x+2=0$, (xiv) $ba^2-2ax+a=0$,

(xv) $qx^2-(p^2-2q)x+q=0$.

11. (i) $6p^2=25r$, (ii) $pr+r=0$

12. $(mp-1)(np-1)+(m-n)^2$ 13. $2p^2=9q$

14. একটি বীজ অপর বীজের বর্গ হইবে।

15. (*i*) একটি বীজ ধনাত্মক এবং অপর বীজ ঋণাত্মক : (*ii*) উভয়েই ঋণাত্মক।

21. $1/2 : -7/2$ 22. $2 ; 1/2$ 23. $a+b=0$

24. $m=0$ 27. (*i*) $\pm\sqrt{33}/4,$ (*ii*) $7/4 ; -11/8$

34. 5, 6.

প্রশ্নমালা 12 (পৃষ্ঠা—104)

1. (*i*) $-bc/a^2,$ (*ii*) $(3abc-b^3)/a^3,$
(*iii*) $(b^4-4ab^2c+2a^2c^2)/a^4,$ (*iv*) $(b^2-2ac)/c^2,$
(*v*) $(2abc-b^3)/c^3,$ (*vi*) $\pm\{(b^2-ac)\sqrt{b^2-4ac}\}/a^3,$
(*vii*) $(b^4-4ab^2c+3a^2c^2)/a^4,$ (*viii*) $b^2/(ac),$

2. (*i*) $(p^2-2q)q^6,$ (*ii*) $6p^2+q,$
(*iii*) $(p^4-4p^2q+2q^2)/q^2,$ (*iv*) $(p^3-3pq)/q^3,$
(*v*) $\left(\frac{p^2}{q}-2\right)\left(\frac{p^4}{q^2}-\frac{4p^2}{q}+1\right),$ (*vi*) $1-p-q+p^2-pq+q^2,$
(*vii*) $(p^4-4p^2q+2q^2)/q^4,$ (*viii*) $2/p,$
(*ix*) $(p^2-q)(p^2-4q)p/q$

3. $\dfrac{b^3-3abc}{a^3c^3}$ 4. $\dfrac{q^2-2pr}{r^2}$ 5. 8 8. 0

9. $2(p^2-2q+p'^2-2q'-pp')$ 10. $2(c+q)-bp$

11. (*i*) $a^4x^2-2a^2(b^2-ca)x+b^2(b^2-2ac)=0$
(*ii*) $x^2+(m+1)\frac{b}{a}x+\frac{mb^2}{a^2}+\frac{(m-1)^2c}{a}=0$
(*iii*) $a^2cx^2+b(b^2-2ac)x+b^2c=0$
(*iv*) $(a-b+c)x^2+2(c-a)x+(a+b+c)=0$

12. $a(x^2-1)+2bx=0$ 13. $x^2-(p^2-4q)x-q(p^2-4q)=0$

14. $3x^2-18x+2=0$ 15. $4x^2-10(m+1)x+(4m^2+17m+4)=0$

17. $x^2-2px-q^2=0$ 18. $x^2-apx+b(p^2-2q)+q(a^2-2b)=0$

19. $x^2+x+1=0$ 20. $6x^2-13x+6=0$

21. $x^2-px+q=0$ 22. $3x^2-5x-100=0$

25. প্রথম সমীকরণের বীজদ্বয় α এবং β হইলে দ্বিতীয় সমীকরণের বীজদ্বয় α/β এবং β/α হইবে। 26. $\frac{1}{2}\{(\gamma+\delta)\pm\sqrt{(\gamma+\delta)^2-4\alpha\beta}\}$

প্রশ্নমালা 13 (পৃষ্ঠা—115)

1. (*i*) $10\frac{1}{8}$, (*ii*) $2\frac{1}{12}$, (*iii*) $3\frac{9}{16}$, (*iv*) $(a+c)^3$

2. (*i*) $3\frac{1}{4}$, (*ii*) $-2\frac{3}{4}$

5. $-3<x<\frac{1}{2}$ 7. $-4<k<4$

8. $(2-\sqrt{3})\leq x\leq(2+\sqrt{3})$ 15. গরিষ্ঠমান $=2$; লঘিষ্ঠমান $=\frac{2}{27}$

19. $\frac{1}{8}$; 5 23. $(x-3y+2)$; $(2x+y+3)$

24. $p=\frac{3}{2}$; $x+y+z$; $x+\frac{1}{2}y+1$

প্রশ্নমালা 14 (পৃষ্ঠা—127)

1. (*i*) 58, (*ii*) 77, (*iii*) -32, (*iv*) 40

2. 41 3. -104 4. $-7, -4, -1, 2\cdots\cdots$

5. 13, 10, 7, 4,…… ; -14 6. 20-তম পদ 7. 20-তম পদ

8. কোন পদ নহে। 9. $m+n-p$

10. $p+q-r$; 0 ; $p+q-50$

11. (*i*) 13, (*ii*) -10, (*iii*) $6\frac{1}{2}$,
(*iv*) $b+\frac{1}{2}(a+c)$, (*v*) $ax+by$

12. 20 ; 26 ; 32 13. 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47, 52

14. 7 15. 2, 4, 6, 8 অথবা, 8, 6, 4,2

16. 2, 3, 4, 5, 6 অথবা, 6, 5, 4, 3, 2

17. 30, 41, 52, 63, 74, 85 19. 4 : 5

প্রশ্নমালা 15 (পৃষ্ঠা—133)

1. (*i*) 650, (*ii*) -915, (*iii*) 3927, (*iv*) 1906,
(*v*) 150, (*vi*) 370, (*vii*) -32, (*viii*) 57,
(*ix*) $170+20\sqrt{2}$, (*x*) -200

2. (*i*) $\frac{1}{2}n(3n+7)$. (*ii*) $n(7-n)$,
(*iii*) $n\{(a^2+b^2)+(n-3)ab\}$, (*iv*) 720, (*v*) 225

3. $\frac{1}{2}n(n+1)$ 4. (*i*) 247 (*ii*) n^2 6. 10

7. 5, 8 8. 11925 9. 52500 10. 17696

11. 1250 12. (*a*) 882. (*b*) 931

13. $\frac{1}{2}(n-2)(a+b)$ 14. 3, 14 15. 472 16. 3

17. $28\frac{1}{2}$ 18. $1\ ;\ -20\frac{1}{2}$ 19. 50 20. 8

21. $1,\ -2,\ -5,\ -8\cdots\cdots$ 26. $u_1 = -2\ ;\ m = 10$

29. 10 মাস 30. 14 মাস 31. 17

32. 28 মাইল 1220 গজ। 33. নবম দিনে শেষ বুঝায়।

34. 15 ঘণ্টা।

প্রশ্নমালা 16 (পৃষ্ঠা—143)

1. (i) $\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$, (ii) $\frac{1}{3}n(4n^2+6n-1)$,
(iii) $\frac{1}{2}n(4n^2+17n+21)$, (iv) $\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$.
(v) $\frac{1}{2}n(n+1)^2(n+2)$, (vi) $n(2n^3+8n^2+7n-2)$,
(vii) $\frac{1}{2}n(n+4)(n^2+4n+7)$, (viii) $\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+5)$,
(ix) $\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$, (x) $\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$,
(xi) $\frac{1}{2}n(6n^2+3n-1)$, (xii) $\frac{1}{2}n(6n^2-3n-1)$,
(xiii) $\frac{1}{60}n(n+1)(n+2)(12n^2+9n-1)$

2. (i) 2915, (ii) 26876100, (iii) $\frac{100}{101}$,
(iv) $\dfrac{n}{3n+1}$, (v) $\dfrac{n}{6n+4}$

3. (i) n যুগ্ম হইলে, $S_n = -\frac{1}{2}n$; n অযুগ্ম হইলে, $S_n = \frac{1}{2}(n+5)$
(ii) $(-1)^{n-1}.\ \frac{1}{2}n(n+1)$, (iii) $\frac{1}{6}n(n^2+6n-1)$,
(iv) $\frac{1}{3}n(n^2+3n+5)$, (v) $\frac{1}{6}n^2(n^2-1)+n$,
(vi) $\frac{1}{6}n(n^2+6n+11)$, (vii) $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$,
(viii) $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, (ix) $\frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$,
(x) $\frac{1}{6}n(n+1)(2n^2+2n-1)$; (xi) $n(2n+3)$;
(xii) $n(4n^2+9n+6)$. 4. 5291 ; 5. 166566 ;
6. 53261 ; 8. $\frac{1}{6}(n+1)(n+2)$.

প্রশ্নমালা 17 (পৃষ্ঠা—152)

1. 486 ; 2. $\dfrac{-1}{256}$; 3. $\dfrac{1}{243\sqrt{3}}$; 4. $\dfrac{352}{2187}$;

5. $256\sqrt{6}$; 6. সপ্তম পদ ; 7. অষ্টম পদ ; 8. ষষ্ঠ পদ ;

9. 192 ; 10. 1, 2, 4, 8, 16,... অথবা, 1, −2, 4, −8,···

11. 4 ; 12. 2560 ; 13. $8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \cdots$
অথবা, $24, -12, 6, -3, 3/2 ; \ldots$ 14. $\frac{3}{25}, \frac{3}{5}, 3, 15, \cdots$
$\frac{3}{25}, \frac{-18}{25}, \frac{108}{25}, \frac{-648}{25}, \cdots$ 15. 896, অথবা, -896 ;

16. $-4/3, -8/3, -16/3, \cdots\cdots ;\ 4, -8, 16, 32, \cdots$

17. (*i*) ± 6, (*ii*) ± 6 ; (*iii*) ± 6 ; (*iv*) $\pm a(a+b)$;
(*v*) $\pm (a-b)\sqrt{ab}$; (*vi*) $\pm a^2b^2(a-b)$;

18. (*i*) 15, 45 ; (*ii*) 12, 36, 108 ; অথবা, $-12, 36, -108$;
(*iii*) 225, 2025, 18225 ; অথবা, $-225, 2025, -18225$;
(*iv*) $8/5, 4/5, 2/5, 1/5, 1/10$; অথবা,
$-8/5, 4/5, -2/5, 1/5, -1/10$.
(*v*) $4\sqrt{2}, 4, 2\sqrt{2}, 2, \sqrt{2}, 1, 1/\sqrt{2}$; অথবা,
$-4\sqrt{2}, 4, -2\sqrt{2}, 2, -\sqrt{2}, 1, -1/\sqrt{2}$;

19. $x=15, y=45, z=135$, অথবা, $x=-15, y=45, z=-135$.

20. $a=3\frac{1}{3}, b=5, c=7\frac{1}{2}, d=11\frac{1}{4}$; 21. 18, 12, 8, অথবা, 8, 12, 18.

22. 2, 6, 18, অথবা, 18, 6, 2 ; 23. 1, 3, 9, অথবা, 9, 3, 1.

24. $t_p = \pm\sqrt{mn}$; $t_q = m(n/m)^{\frac{p}{2q}}$

প্রশ্নমালা 18 (পৃষ্ঠা—160)

1. (*i*) 1023, (*ii*) $121\frac{13}{27}$, (*iii*) -3280, (*iv*) $1\frac{341}{1024}$,
(*v*) $\frac{3}{2}(1-3^{-20})$, (*vi*) $\frac{2}{3}(1-2^{-50})$, (*vii*) $1\frac{2729}{4096}$,
(*viii*) $3\frac{679}{1024}$, (*ix*) $73\frac{227}{256}$, (*x*) $\frac{5}{9}(9-10^{-10})$.

2. (*i*) $3(2^n-1)$, (*ii*) $\frac{1}{2}(3^n-1)$, (*iii*) $\frac{3}{2}(1-3^{-n})$,
(*iv*) $\frac{5}{4}(1-5^{-n})$, (*v*) $(4+2\sqrt{2})(1-2^{-n/2})$;
(*vi*) $\frac{10}{81}(10^n-1)-\frac{n}{9}$; (*vii*) $\frac{1}{3}(1-10^{-n})$;
(*viii*) $\frac{a}{1-a}(1-a^n)-\frac{x}{1-x}(1-x^n)$, (*ix*) $\frac{a}{1+r}\{1+(-1)^{n+1}.r^n\}$.

3. (*i*) $2(2^n-1)$, (*ii*) $\frac{4}{3}(1-4^{-n})$,
(*iii*) $\frac{3}{4}(1-3^{-50})$, (*iv* $-\frac{1}{3}(2^{2n}-1)$.

4. (*i*) $\frac{50}{81}(10^n-1)-\frac{5n}{9}$, (*ii*) $\frac{7n}{9}-\frac{7}{81}(1-10^{-n})$,

(iii) $n-\frac{1}{9}(1-10^{-n})$; (iv) $2^{n+1}-(n+2)$;

(v) $\frac{1}{9}(6n-5).2^{2n}+\frac{5}{9}$; (vi) $(2n-1)2^{n+1}+2$;

(vii) $2^{n+1}-(n+2)$; (viii) $\{1-(n+1)a^n+na^{n+1}\}/(1-a)^2$.

5. 2441406×5^{45} ; 6. দশটি পদ ; 7. $(2n+1)2^{n+1}+2$;

8. $\frac{3}{2}(3^n-1)$; 9. $r=2$; 10. 6138 ;

11. $\frac{2}{3}(1-2^{-n})$; 12. 7, 14, 28,…… ; 448 ;

13. $\dfrac{ar(r^n-1)}{(r-1)^2}-\dfrac{an}{r-1}$, 16. $u_1{}^2k(1-k^{2n})/(1-k^2)$.

17. (i) $\dfrac{1}{(1+\beta)^{m+n}}$, $\dfrac{\alpha^n-(1+\beta)^n}{\alpha-(1+\beta)}$,

(ii) n^2, (iii) $n+\dfrac{2}{r^{2n-1}}\left(\dfrac{r^{2n}-1}{r^2-1}\right)+\dfrac{1}{r^{4n-2}}\left(\dfrac{r^{4n}-1}{r^4-1}\right)$

18. $47\frac{15}{16}$ মিটার ; 19. প্রথম কিস্তি = 6 টাকা ; শেষ কিস্তি = 3072 টাকা ;

20. 1196·875 টাকা।

প্রশ্নমালা 19 (পৃষ্ঠা—166)

1. $x=12, y=18$ অথবা, $x=-8, y=8$; 2. 4, 6 ; অথবা, $\frac{1}{4}$, $-\frac{3}{2}$ ·

3. 2, 4, 6, 9 ; অথবা, $\frac{35}{4}$, $\frac{25}{4}$, $\frac{15}{4}$, $\frac{9}{4}$;

4. 2, 5, 8, অথবা, 26, 5, −16 ; 5. 4, 8, 16 ; অথবা, 16, 8, 4 ;

6. 5 অথবা, $12\frac{1}{2}$; 22. A, B, C নিকট যথাক্রমে 900 টাকা ; 600 টাকা, 400 টাকা। 23. A, B, C, D এর প্রাপ্তি যথাক্রমে, 11250 টাকা, 6750 টাকা, 2250 টাকা, 750 টাকা।

প্রশ্নমালা 20 (পৃষ্ঠা—177)

1. (i) 1, (ii) 1, (iii) 1, (iv) 2, (v) 3, (vi) 4, (vii) , (viii) $\frac{1}{3}$, (ix) −1, (x) −4, (xi) −1, (xii) −3, (xiii) 1, (xiv) 4, (xv) 6, (xvi) 3, (xvii) 9, (xviii) 8, (xix) $\frac{1}{25}$, (xx) 4, (xxi) 1, (xxii) 1, (xxiii) 2, (xxiv) 1, (xxv) 1, (xxvi) 2.

2. (i) 4, (ii) 4, (iii) 6, (iv) −2, (v) −6, (vi) y/x.

3. (i) ঠিক আছে, (ii) ঠিক নহে, (iii) সাধারণতঃ ঠিক নহে, (iv) সাধারণতঃ ঠিক নহে, (v) ঠিক আছে, (vi) ঠিক আছে।

4. (i) $a=3$, (ii) $N=-2$, (iii) $x=4$, (iv) $N=2(\log a)\times(\log b)$.

5. (*i*) 0, (*ii*) 0, (*iii*) -1

8. (*i*) $a/3$, (*ii*) $a=100$; ·01,

14. (*i*) 2, (*ii*) log 2, (*iii*) log 2, (*iv*) 1,
(*v*) $\log(\frac{1084}{3})$, (*vi*) 2, (*vii*) $\log_2 3$.

20. $x=0·0025$, 22. 101,

23. (*i*) 1 ; (*ii*) 0, -1, (*iii*) $x=y=0$.

প্রশ্নমালা 21 (পৃষ্ঠা - 190)

1. (*i*) 2, (*ii*) 2, (*iii*) 0, (*iv*) -3, (*v*) 3, (*vi*) 4, (*vii*) 5.
2. (*i*) 1·81571, (*ii*) $\bar{1}$·81571, (*iii*) $\bar{2}$·81571, (*iv*) 5·81571.
. (*i*) 1·65321, (*ii*) $\bar{3}$·85733 4. (*i*) 0·89432, (*ii*) $\bar{3}$·92428
5. (*i*) 1·87506, (*ii*) 3·65321, (*iii*) 0·70436,
(*iv*) $\bar{1}$·27300 (*v*) 0·09691.
6. (*i*) 13, (*ii*) 31, (*iii*) 57, (*iv*) 18, (*v*) 85.
7. (*i*) 6, (*ii*) 38, (*iii*) 21, (*iv*) 14. 8. 141 ;
9. (*i*) 150, (*ii*) 79. 13. 191·5631, 14. 2·146 ;
15. 18·241 ; 16. 4·227, 17. 1·566 ; 18. 0·06974 ;
19. 1·19734 ; 20. $\bar{1}$·7362497 ; 21. 6·725549 ;
22. 9·076226, 23. 259·569, 24. 21.

প্রশ্নমালা 22 (পৃষ্ঠা—200)

1. (*i*) 2·75128 (*ii*) 2·77815, (*iii*) 1·87233,
(*iv*) 1·70421 ; (*v*) $\bar{3}$·81093.
2. (*i*) 3·6701, (*ii*) 23·799, (*iii*) 0·074500,
(*iv*) 0·55879, (*v*) 0·0074900 (*vi*) 0·04061.
3. (*i*) 375·49 (প্রায়), (*ii*) 181·46 (প্রায়) (*iii*) 2·8381 (প্রায়) ;
(*iv*) 7·5154 (প্রায়), (*v*) 0·41400, (*vi*) $9·3912\times10^{-16}$.
4. 2·64, 5. (*i*) 0·59883 (প্রায়), (*ii*) 2·5875 (প্রায়)
(*iii*) 3·0947 (প্রায়) ; (*iv*) 0·52815 (প্রায়), (*v*) 2·056 (প্রায়),
(*vi*) 0·538 (প্রায়), (*vii*) 49·85 (প্রায়) ।
6. 143·33 ; 7. 1·33 ; 8. 2·4000 ;

9. 15·43 ; 10. 1·17044 (প্রায়) ।

11. (*i*) $x = 5·3013$ (প্রায়) ; (*ii*) $x = 2·0782$ (প্রায়)
(*iii*) $x = 3·1699$ (প্রায়) (*iv*) $x = 2·9614$ (প্রায়) ।

12. (*i*) $x = 3·16992$ (প্রায়) ; (*ii*) $x = 3·39987$ (প্রায়) ;
(*iii*) $x = 0·407037$; $y = 5·6568$ (প্রায়) ;
(*iv*) $x \to 2·7096$; $y \to 1·7096$ (প্রায়) ;
(*v*) $x = 0·029996$ (প্রায়) ।

প্রশ্নমালা 23 (পৃষ্ঠা—218)

1. (*i*) 120 ; (*ii*) 30240 ; (*iii*) 13800 ; (*iv*) $\lfloor 10$;
(*v*) $\lfloor 20$; (*vi*) $n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+2)$,

2. (*i*) ঠিক আছে ; (*ii*) ঠিক নাই ; (*iii*) ঠিক আছে ;
(*iv*) ঠিক আছে ।

3. (*i*) $r = 4$; (*ii*) $r = 4$,

4. (*i*) $n = 7$; (*ii*) $n = 10$; (*iii*) $n = 5$; (*iv*) $n = 14$.

9. 20 ; 10. 20 ; 11. 650 ; 12. 720 ;
13. 132 ; 14. 360 ; 15. 120 ; 16. 360 ;
17. 120 ; 18. 6720 ; 19. 5040 ; 20. 120960 ;
22. 30240 ; 23. 150 ; 24. (*i*) 129729600 ;
(*ii*) 124740000 ; 25. (*i*) 48 ; (*ii*) 72 ;
26. 96 ; 27. 72 ; 28. 192 ; 29. 24 ;
30. 154 ; 31. 3600 ; 34. 552960 ;
35. $\lfloor 39/\{\lfloor 5 \times (\lfloor 4)^2 \times (\lfloor 6)^3\}$ 36. $\lfloor 11 \times \lfloor 10/\lfloor 6$;
37. 324000 ; 38. 2880 ; 39. 144 ; 40. 24 ;
41. 120 ; 42. (*a*) 1680 ; (*b*) 840.

প্রশ্নমালা 24 (পৃষ্ঠা—226)

1. 100000 ; 2. 256 ; 3. 4096 ; 4. 216 ;
5. 2401 ; 6. 1048576 ; 7. 15625 ; 8. 625 ;
9. 63 ; 10. 729 ; 11. 27 ; 12. 9 ;
13. 8 ; 14. (*i*) 6 ; (*ii*) 27 ; 15. 32 ;

16. 120 ; 17. 780 ; 18. (*i*) 54 ; (*ii*) 81 ;
19. (*i*) 28672 ; (*ii*) 12287 ; 20. 120 ; 21. $\frac{1}{2}\lfloor 24$;
22. 362880 ; 23. (*i*) 2520 ; (*ii*) 5040 ; 24. 120 ;
25. একই আকৃতি বিশিষ্ট হইলে 1 ; বিভিন্ন আকৃতি বিশিষ্ট হইলে $5 \times (\lfloor 9)^2$;
26. 25920 27. 432000 ।

প্রশ্নমালা (25 পৃষ্ঠা—238)

1. (*i*) 1001 ; (*ii*) 230230 ; (*iii*) 17550 ; (*iv*) 658008 ;
2. (*i*) 13 ; (*ii*) 14 ; (*iii*) 6 ; (*iv*) 1, 2 ;
(*v*) 5, 7 ; (*vi*) $n-1$.
3. 4060 ; 4. 20 ; 9. 7 ; 10. 1820 ;
11. (*i*) 14190 ; (*ii*) 13244 ; 12. (*i*) 56 ; (*ii*) 252 ;
13. 36 ; 14. 15 ; 15. (*i*) 220 ; (*ii*) 924 ;
16. (*i*) 280600 ; (*ii*) 5533155 ; 17. 990 ; 18. (*i*) 1960 ;
(*ii*) 1540 ; 19. 1008 ; 20. 1260 ; 21. 200 ;
22. (*i*) 120 ; (*ii*) 186 ; 23. 344 ; 24. 200 ;
25. 120 ; 26. 180 ; 27. (*i*) 15840 ; (*ii*) 34320 ;
28. 16 ; 29. 68 ; 30. 300 ; 31. (*i*) 1540 ;
(*ii*) 209 ; 32. (*i*) 421 ; (*ii*) 4040 ;
33. (*i*) $\frac{1}{2}\{n(n-1)-p(p-1)+2\}$;
(*ii*) $\frac{1}{6}\{n(n-1)(n-2)-p(p-1)(p-2)\}$; $n>p>2$. 34. 3টি ;
35. 6188 ; 36. 179 ; 37. 126 ; 38. (*i*) 28 ;
(*ii*) 84.

প্রশ্নমালা 26 (পৃষ্ঠা—250)

1. 1023 ; 2. 4095 ; 3. $2^{25}-1$; 4. 4094 ;
5. 377 ; 6. 461 ; 7. 63 ; 8. 15 ;
9. (*i*) 1 উৎপাদকটি না ধরিলে, নির্ণেয় সংখ্যা = 15 ;
(*ii*) 1 এবং 1155 উৎপাদক দুইটি না ধরিলে, নির্ণেয় সংখ্যা = 14 ;
10. (*i*) 1 উৎপাদকটি না ধরিলে, উৎপাদক সংখ্যা = 71 ; 1 এবং 21600 উৎপাদক দুইটি না ধরিলে, উৎপাদক সংখ্যা = 70.

(*ii*) 1 উৎপাদকটি না ধরিলে, উৎপাদক সংখ্যা = **119** ; **1** এবং 118800 উৎপাদক দুইটি না ধরিলে, উৎপাদক সংখ্যা = **118.**

11. নির্ণেয় গুণফলের সংখ্যা = 18 ; উৎপাদক সংখ্যা = 36 ;

12. 519156 ; **13.** (*i*) 792 ; (*ii*) 462 ; শেষাংশ : **924** ;

14. প্রথমাংশ : 14702688 ; (*i*) 2858856 ; (*ii*) 17153136

15. 89 ; **16.** (*i*) 16383 ; (*ii*) 13671 ;

17. 498841199 ; **18.** 6560 ; **19.** 260865 ;

20. দলের সংখ্যা = 12870 ; প্রত্যেক দলে 8 জন ;

21. (*i*) ব্রাহ্মণ প্রতিবারেই নিমন্ত্রিত হইল, নির্ণেয় উত্তর = $\lfloor 40/(\lfloor 20)^2$

(*ii*) উপরোক্ত শর্ত না থাকিলে, নির্ণেয় উত্তর = $\dfrac{\lfloor 41}{\lfloor 20 \lfloor 21}$.

22. 29791 ; **23.** 2^n.

প্রশ্নমালা 27 (পৃষ্ঠা—254)

1. $n=8,\ r=3$; **2.** 11520 ; **3.** 67200 ; **4.** 5760 ;

5. 1596000 ; **6.** 286 ; **7.** 260 ; **8.** 2550 ;

9. 159 ; **10.** (*i*) 390 ; (*ii*) 350 ; **11.** 3999960 ;

12. সংখ্যার সংখ্যা = 150 ; তাহাদের যোগফল = 3919968. **13.** 1814400

14. 321440 ; **15.** 7775.

প্রশ্নমালা 28 (পৃষ্ঠা—265)

1. (*i*) $1+8x+24x^2+32x^3+16x^4$;

(*ii*) $a^6-12a^5b+60a^4b^2-160a^3b^3+240a^2b^4-192ab^5+64b^6$

(*iii*) $a^4+\dfrac{5a^4}{b}+\dfrac{10a^3}{b^2}+\dfrac{10a^2}{b^3}+\dfrac{5a}{b^4}+\dfrac{1}{b^5}$.

(*iv*) $x^7-14x^5+84x^3-280x+560/x-672/x^3+448/x^5-128/x^7$.

(*v*) $\dfrac{64}{729}x^6-\dfrac{32}{27}x^4+\dfrac{20}{3}x^2-20+\dfrac{135}{4x^2}-\dfrac{243}{8x^4}+\dfrac{729}{64x^6}$.

(*vi*) $1-4x+10x^2-16x^3+19x^4-16x^5+10x^6-4x^7+x^8$.

(*vii*) $1-10x^2+55x^4-200x^6+530x^8-1052x^{10}+1590x^{12}$
$-1800x^{14}+1485x^{16}-810x^{18}+243x^{20}$.

2. $15309x^5y^4/8$; **3.** -252 ; **4.** $760xy^6$;

5. $-2288y^3$; **6.** $126a^{20}b^4$; **7.** $9ab^8$;

8. 1365 ; **9.** -960 ; **10.** $-189/4$;

11. -792 ; **12.** 495 ; **13.** (*i*) 59136 ;

(*ii*) 7920 ; **14.** 1792/9 ;

15. $6561x^8 - 87480x^4 + 510300 - \cdots\cdots$ **16.** 25 ;

17. 154 ; **18.** (*i*) 70 ; (*ii*) 2835/8 ;

(*iii*) -252 ; (*iv*) $326592/x^7$; $-489888/x^{11}$;

(*v*) $\dfrac{\lfloor 2n+1}{\lfloor n \, \lfloor n+1} \cdot \dfrac{b}{a}$;

19. (*i*) $2(1+4x^2-4x^4)$; (*ii*) $2x(16x^4 - 20x^2a^2 + 5a^4)$;

(*iii*) $2(4x+9)(16x^2+504x+81)$, **23.** n ;

26. 1 ; **27.** 10 ; **29.** $a=2$; $x=1$; $n=7$,

33. 59049 ; **34.** (*i*) 92,236,816 ; (*ii*) 997,002, 999 ;

35. (*i*) 1·00802 ; (*ii*) 0·99601 ; (*iii*) 1·00300 ;

প্রশ্নমালা 29 (পৃষ্ঠা—274)

1. (*i*) ${}^{14}C_6.2^6.3^8$; (*ii*) ${}^{15}C_9.3^6.4^9$; (*iii*) $\frac{8505}{128}$;

(*iv*) 2880 ; (*v*) 6048 ; (*vi*) 224/9 ;

(*vii*) $(24)^8$; (*vii*) 5^9 ; (*ix*) 1 ;

(*x*) 1 ; (*xi*) 4×3^{17} ; (*xii*) ${}^{13}C_2 \times 5^{11}$;

(*xiii*) ${}^9C_5.(10/3)^4.(9/2)^5$;

2. (*i*) 4860 ; (*ii*) $\frac{280}{27}$; (*iii*) 47840625/8 ;

(*iv*) 11547360 ; (*v*) 70 ; (*vi*) 1260971712

3. 7 ; 15468750 ; **4.** $\frac{15}{16} < x < \frac{16}{15}$.

প্রশ্নমালা 30 (পৃষ্ঠা—284)

1. (*i*) 5/4 ; (*ii*) 3/2 ; (*iii*) 2 ;

(*iv*) $2\sqrt{2}$; (*v*) $3\sqrt{3}/4$; (*vi*) 9/5 ;

(*vii*) 4/5 ; (*viii*) 5/9 ; (*ix*) 3/11 ;

(*x*) 1/2 ; (*xi*) 192/7 ; (*xii*) $(4+3\sqrt{2})/2$;

(*xiii*) $(5+3\sqrt{3})/2$; (*xiv*) 1/2 ;

(*xv*) 15/28 ; (*xvi*) $(9+5\sqrt{3})/6$; (*xvii*) $\frac{a}{1+r}$;

(*xviii*) $\frac{1}{1-2x}$; (*xix*) $\frac{a-x}{(1-a)(1-x)}$

(*xx*) $\frac{(a+b)^2(a-b)^2}{(a+b-1)}$; (*xxi*) 8 ; (*xxii*) 6 ; (*xxiii*) 1.

2. $\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\cdots=1$; 3. 1/6 ,

4. (*i*) 5/18 ; (*ii*) 3/11 ; (*iii*) 19/36 ; (*iv*) 8/27
(*v*) 3/22 ;

7. (*i*) 9/4 ; (*ii*) 16/25 ; (*iii*) 1/6 ; (*iv*) 1/36 ; (*v*) 2/9 ;

প্রশ্নমালা 31 (পৃষ্ঠা—293)

1. (*i*) $(1+x)^{\frac{3}{2}}=1+\frac{3}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3+\cdots\ \cdots$; $(x^2<1)$;
(*ii*) $(1+2x)^{-4}=1-8x+40x^2-160x^3+\cdots\ \cdots\ \cdots$; $(x^2<\frac{1}{4})$;
(*iii*) $(1+3x)^{-\frac{2}{3}}=1-2x+5x^2-\frac{40}{3}x^3+\cdots\ \cdots$; $(x^2<\frac{1}{9})$;
(*iv*) $(1+x^2)^{-2}=1-2x^2+3x^4-4x^6+\cdots\ \cdots$; $(x^2<1)$;
(*v*) $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\frac{5}{16}x^6+\ldots\ \cdots$ $(x^2<1)$,
(*vi*) $(1-4x)^{-\frac{1}{3}}=1+\frac{4}{3}x+\frac{32}{9}x^2+\frac{896}{81}x^3+\ldots\ \cdots(x^2<\frac{1}{16})$

2. (*i*) $(1+2x)^{-3}=1-6x+24x^2-80x^3+240x^4-\cdots\ \cdots$;
$(x^2<\frac{1}{4})$;
(*ii*) $(2+x)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}\times\left[1+\frac{1}{6}x-\frac{1}{36}x^2+\frac{5}{648}x^3-\frac{5}{1944}x^4+\cdots\right]$
$(x^2<4)$;
(*iii*) $(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a^2}.\left[1+\frac{1}{2}.\frac{x^2}{a^2}-\frac{1}{8}.\frac{x^4}{a^4}+\frac{1}{16}.\frac{x^6}{a^6}-\frac{5}{128}.\frac{x^8}{a^8}+\cdots\right]$;
$(x^2<a^2)$;
(*iv*) $(2-x^2)^{-\frac{3}{2}}=2^{-\frac{3}{2}}.\left[1+\frac{3}{4}x^2+\frac{15}{32}x^4+\frac{35}{128}x^6+\frac{315}{2048}x^8+\cdots\right]$;
$(x^2<2)$;

3. (*i*) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2}}\left[1-\frac{1}{2x^2}+\frac{3}{8x^4}-\frac{5}{16x^6}+\cdots\ \cdots\right]$

(ii) $(1-x)^{-2} = \frac{1}{x^2}\left[1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}+\cdots \quad \cdots\right]$

(iii) $\frac{a-x}{a+x} = 1-\frac{2x}{a}+\frac{2x^2}{a^2}-\frac{2x^3}{a^3}+\cdots \quad \cdots$

(iv) $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+\cdots \quad \cdots$

(v) $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = 1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^3+\cdots \quad \cdots$

4. (i) $\frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{1.2.3}.2^r.x^r.$

(ii) $\frac{1.3.5\ldots(2r-1)}{\lfloor r}.x^r$; (iii) $\frac{3.5.7\cdots\cdots(2r+1)}{\lfloor r}.x^r$;

(iv) $(-1)^{r-1}.\frac{2.5.8.\cdots\cdots(3r-4)}{3^{2r}.\lfloor r}.2^r.3^{\frac{1}{3}}.x^r$;

5. $-\frac{5}{16}$; 6. $-\frac{14}{3}$; 7. $\frac{35}{128}$; 8. 144 ; 9. $2n^2+2n+1$

10. (i) $1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{8}x^4-\frac{3}{8}x^5+\ldots \quad \ldots$;

(ii) $1+4x+8x^2+12x^3+16x^4+20x^5+\ldots \quad \ldots$;

11. (i) x^5 এর সহগ $=1$; x^6 এর সহগ $=0$;

12. 15/8 ; 14. তৃতীয় এবং চতুর্থ বৃহত্তম পদ ; মান $=\frac{54}{25}$;

15. (i) প্রথম পদই বৃহত্তম $=\frac{1}{\sqrt{2}}$;

(ii) পঞ্চম পদই সংখ্যমানে বৃহত্তম পদ $=\frac{413343}{256000}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

16. x এর সীমা : $-\frac{1}{3}<x<1$;

17. এখানে, $x^2<1$; বিস্তৃতি $=2+18x^2+50x^4+\ldots \quad \ldots$;

20. (ii) $1+a+\frac{3}{4}a^2$, (প্রায়) ।

22. (i) 1·1041 ; (ii) 0·9970 ; (iii) 1·0050 ;
(iv) 1·7321 ; (v) 2·2361 ; (vi) 1·0488 ;
(vii) 4·9960 ; (viii) 1·0101 ; (ix) 0·0235 ;
(x) 1·0039.

24. (i) $\sqrt{2}$; (ii) $\sqrt{3}$; (iii) $3\sqrt{3}$; (iv) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$;
(v) $\frac{2}{9}\sqrt{6}$; (vi) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$; (vii) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$;
(viii) $\frac{4}{3}(2\sqrt{3}-3)$.

প্রশ্নমালা 32 (পৃষ্ঠা—302)

1. (i) $\frac{1}{2}(e+e^{-1})$; (ii) $\frac{1}{2}(e-e^{-1})$; (iii) $\frac{1}{2}e^{-1}$;
(iv) e (v) $e^{\frac{1}{3}}$; (vi) $3e$;
(vii) $3e$; (viii) $5e$;

3. 5/2 ; 4. $(-1)^n \frac{1}{\lfloor n} \{a-bn+cn(n-1)\}$:

5. $1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}.\frac{x^2}{\lfloor 2}-\frac{1}{30}.\frac{x^4}{\lfloor 4}+\frac{1}{42}.\frac{x^6}{\lfloor 6}-\cdots$

6. (i) 0·6065 ; (ii) 1·3956 ;

প্রশ্নমালা 33 (পৃষ্ঠা—310)

1. (i) 1·94591 ; (ii) 2·07944 ; (iii) 0·22314 ;
(iv) 3·583,52 ;

2. (i) 0·95424 ; (ii) 0·69897 ; (iii) 1·17609 ;
(iv) 0·00346.

4. (i) $\log_e 2$; (ii) $\frac{3}{2}\log_e 2$; (iii) $\frac{1}{2}\log_e 2$; (iv) $\log_e 2$;

7. (i) $x+\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{6}x^6+\cdots \quad \cdots$
(ii) $2\{x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{7}x^7-\frac{2}{9}x^9+\cdots \quad \cdots\}$

8. $x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{7}x^7-\frac{3}{8}x^8+\cdots \quad \cdots$

$n=$ অযুগ্ম হইলে, x^{2n} এর সহগ $=\frac{1}{2n}$;

$n=$ যুগ্ম হইলে, x^{2n} এর সহগ $=-\frac{3}{2n}$,

9. $-\{(2+3)x+\frac{1}{2}.(2^2+3^2)x^2+\frac{1}{3}(2^3+3^3)x^3+\cdots\cdots\}$

x^n এর সহগ $=-\frac{1}{n}(2^n+3^n)$.

প্রশ্নমালা 34 (পৃষ্ঠা—321)

1. 12625 টাকা 2. 1295·35 টাকা 3. 2722·45 টাকা
4. বার্ষিক 5% 5. 3 বৎসরে 6. 2239·00 টাকা
7. 20 বৎসরে 8. মূলধন 1000 টাকা, সুদের হার বার্ষিক 5%
9. 4530 টাকা 10. 465·80 টাকা 11 বার্ষিক 5·0625%

12. 1 বৎসর 3 মাস 13 1131·50 টাকা 14. 6344·70 টাকা
15. 109·90 টাকা, বার্ষিক 5·09% 16. 916·86 টাকা
17. 30,000 টাকা 18. 10,000 টাকা 19. 98·56 টাকা
20. A অধিক লাভবান হইবে ; 0·625 টাকা 21. 18·6 বৎসর (প্রায়)
22, 11·15% (প্রায়) 23 8690 10 টাকা (প্রায়)
24. 8850·30 টাকা 25. কনিষ্ঠ পুত্র 18,063·5 টাকা, দ্বিতীয় পুত্র 22838·7 টাকা, জ্যেষ্ঠ পুত্র 27566·9 টাকা 26. 5%

প্রশ্নমালা 35 (পৃষ্ঠা—337)

1. 1335·28 টাকা 2. 6814·30 টাকা 3. 6983·50 টাকা
4. 752·57 টাকা 5. 92·39 টাকা 6. 2313 টাকা
7. 2466·00 টাকা 8. 1258 টাকা 9. 610·50 টাকা
10. মোট অর্থ 71175 টাকা, বর্তমান মূল্য 28667 টাকা
11. 5% 12. 4,500 টাকা 13. 9935·60 টাকা
14. 339·62 টাকা 15. 4558·33 টাকা 16. 683·55 টাকা
17. 550·20 টাকা 18. 2860 টাকা (প্রায়)
19. 9653·33 টাকা (প্রায়) 20. দ্বিতীয়টি বেশী লাভজনক
21. 15212 টাকা (প্রায়) 22. 28877 টাকা (প্রায়)
23. 510·70 টাকা 24. 1163·74 টাকা
25. 33·28 টাকা 26. 9050·85 টাকা (প্রায়)
27. 346·67 টাকা (প্রায়) 28. 2742·24 টাকা (প্রায়)
29. 6291·50 টাকা (প্রায়) 30. 2268·12 টাকা (প্রায়)
31. 4·9% 32. 10972·40 টাকা (প্রায়)

প্রশ্নমালা 36 (পৃষ্ঠা 352)

1. 14 2. 3 3. $x^2=27y$ 4. 2
5. 4·2 6. 6 7. ± 6 8. $P=0$
9. $y=13\sqrt{x}-4x$; $x=0$ অথবা, 169/16
10. ab, বা, $1/p$ 23. $68\frac{4}{9}$ বর্গফুট 24. $14\frac{5}{21}$ বর্গফুট
25. 128 ফুট 26. 20 জন 27. 3 মিটার
28. 16 মাইল প্রতি ঘণ্টায় 29. $8(\sqrt{2}-1)$ ইঞ্চি
30. $1\frac{5}{9}$ ফুট 31. 7 ফুট 32. 45 বর্গফুট
33. 1625 টাকা 34. 2050 টাকা 35. 143 খানা
36. d_1 ; $d_2=1$; $\sqrt{2}$ 37. (i) 240·30 টাকা (ii) 25 কি. মি. ঘণ্টায় মোট খরচ 216 টাকা 38. ঘণ্টায় 36,800 কি. মি.

ত্রিকোণমিতি

Important Formulæ and Results

1\. (i) A radian $= 206265''$ or, $57^\circ\,17'\,45''$ (nearly)

(ii) 2 right angles $= 180^\circ = \pi$ radians.

(iii) $\pi = 3{\cdot}1416\ldots$ or, $\frac{22}{7}$ (nearly).

(iv) $\dfrac{1}{\pi} = 0{\cdot}3183\ldots$

2\. (i) $\sin 0^\circ = 0$; $\cos 0^\circ = 1$; $\tan 0^\circ = 0$.

$\sin 90^\circ = 1$; $\cos 90^\circ = 0$; $\tan 90^\circ$ is undefined.

$\sin 180^\circ = 0$; $\cos 180^\circ = -1$ $\tan 180^\circ = 0$.

$\sin 270^\circ = -1$; $\cos 270^\circ = 0$; $\tan 270^\circ$ is undefined.

$\sin 360^\circ = 0$; $\cos 360^\circ = 1$; $\tan 360^\circ = 0$.

(ii) $\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$; $\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan 30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

$\sin 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\tan 45^\circ = 1$.

$\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$; $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$.

$\sin 120^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 120^\circ = -\dfrac{1}{2}$; $\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$,

(iii) $\sin 15^\circ = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$; $\cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$; $\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$.

$\sin 75^\circ = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$; $\cos 75^\circ = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$; $\tan 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$

(iv) $\sin 18^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$; $\cos 18^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

$\sin 36^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$; $\cos 36^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$.

3\. (i) $\sin(-\theta) = -\sin\theta$; $\cos(-\theta) = \cos\theta$.

(ii) $\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$; $\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$.

(iii) $\sin(90^\circ + \theta) = \cos\theta$; $\cos(90^\circ + \theta) = -\sin\theta$.

(iv) $\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$; $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$.

(v) $\sin(180^\circ + \theta) = -\sin\theta$; $\cos(180^\circ + \theta) = -\cos\theta$.

(vi) $\sin(270^\circ - \theta) = -\cos\theta$; $\cos(270^\circ - \theta) = -\sin\theta$.

(vii) $\sin(270^\circ+\theta) = -\cos\theta$; $\cos(270^\circ+\theta) = \sin\theta$.

(viii) $\sin(360^\circ-\theta) = -\sin\theta$; $\cos(360^\circ-\theta) = \cos\theta$.

4. (i) $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$.

(ii) $\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$.

(iii) $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$.

(iv) $\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$.

(v) $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$.

(vi) $\tan(A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}$.

5. (i) $\sin C + \sin D = 2\sin\dfrac{C+D}{2}\cos\dfrac{C-D}{2}$.

(ii) $\sin C - \sin D = 2\cos\dfrac{C+D}{2}\sin\dfrac{C-D}{2}$.

(iii) $\cos C + \cos D = 2\cos\dfrac{C+D}{2}\cos\dfrac{C-D}{2}$.

(iv) $\cos C - \cos D = 2\sin\dfrac{C+D}{2}\sin\dfrac{D-C}{2}$.

6. (i) $\sin 2A = 2\sin A\cos A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$.

(ii) $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$.

(iii) $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$.

(iv) $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$.

7. (i) If $\sin\theta = \sin\alpha$, then $\theta = n\pi + (-1)^n\alpha$.

(ii) If $\cos\theta = \cos\alpha$, then $\theta = 2n\pi \pm \alpha$.

(iii) If $\tan\theta = \tan\alpha$, then $\theta = n\pi + \alpha$.

(iv) If $\sin\theta = 0$, $\theta = n\pi$; if $\cos\theta = 0$, $\theta = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$.

(v) If $\sin\theta = 1$; $\theta = (4n+1)\dfrac{\pi}{2}$; if $\cos\theta = 1$; $\theta = 2n\pi$.

(vi) If $\sin\theta = -1$; $\theta = (4n-1)\dfrac{\pi}{2}$; if $\cos\theta = -1$; $\theta = (2n+1)\pi$.

8. (i) $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \pi/2$; $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \pi/2$;

$\sec^{-1}x + \operatorname{cosec}^{-1}x = \pi/2.$

(ii) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy}.$

$\tan^{-1}x - \tan^{-1}y = \tan^{-1}\dfrac{x-y}{1+xy}.$

9. (i) $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R.$

(ii) $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, etc.

(iii) $a = b\cos C + c\cos B$, etc.

(iv) $\tan\dfrac{B-C}{2} = \dfrac{b-c}{b+c}\cot\dfrac{A}{2}$, etc.

(v) $\sin\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}}$; $\cos\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}}.$

10. (i) $\triangle = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$

$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$

(ii) $r = \dfrac{\triangle}{s}$; $r_1 = \dfrac{\triangle}{s-a}$; $r_2 = \dfrac{\triangle}{s-b}$; $r_3 = \dfrac{\triangle}{s-c}.$

(iii $r = 4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}.$

ত্রিকোণমিতি

প্রথম অধ্যায়

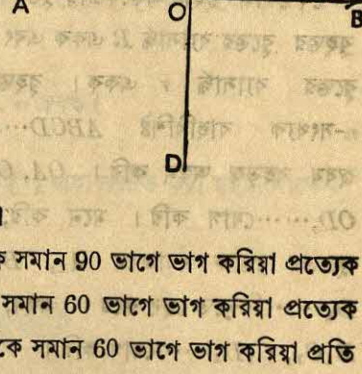
কোণ পরিমাপে এককাবলী

(Units of measurement of angles)

1-1. কোণ পরিমাপ ঃ ষষ্টিক পদ্ধতি ও বৃত্তীয় পদ্ধতি।

(a) ষষ্টিক পদ্ধতি ঃ

একটি সরলরেখা অপর কোন একটি সরলরেখার উপর দণ্ডায়মান হইলে, উহাদের দ্বারা উৎপন্ন সন্নিহিত কোণদ্বয়ের পরিমাপ যদি সমান হয়, তাহা হইলে, উহাদের প্রত্যেকটির পরিমাপকে **এক সমকোণ** (One right angle) বলা হয়।



পার্শ্ববর্তী চিত্রে, CD সরলরেখা, AB সরলরেখার উপর এমনভাবে দণ্ডায়মান যে, উহাদের দ্বারা উৎপন্ন সন্নিহিত কোণদ্বয় $\widehat{AOC}$ এবং $\widehat{BOC}$ এর প্রত্যেকটির পরিমাপ সমান। স্থতরাং $\widehat{BOC}$ এর পরিমাপ এক সমকোণ। এইরূপ ক্ষেত্রে, CD এবং AB সরলরেখাদ্বয় পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত বলা হয়।

এই পদ্ধতিতে এক সমকোণের পরিমাপকে সমান 90 ভাগে ভাগ করিয়া প্রত্যেক ভাগকে এক **ডিগ্রী** (Degree), এক ডিগ্রীকে সমান 60 ভাগে ভাগ করিয়া প্রত্যেক ভাগকে এক **মিনিট** (Minute) এবং এক মিনিটকে সমান 60 ভাগে ভাগ করিয়া প্রতি ভাগকে এক **সেকেণ্ড** (Second) বলা হয়।

এক ডিগ্রী, এক মিনিট এবং এক সেকেণ্ডকে যথাক্রমে $1^\circ, 1', 1''$ লেখা হয়। স্থতরাং,

1 সমকোণ = 90 ডিগ্রী = 90° ;

1 ডিগ্রী = 60 মিনিট = $60'$;

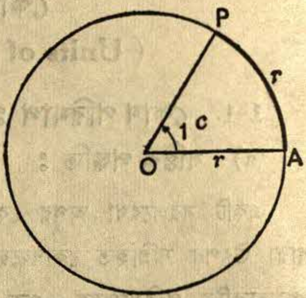
1 মিনিট = 60 সেকেণ্ড = $60''$.

এইভাবে কোণ পরিমাপের পদ্ধতিকে **ষষ্টিক পদ্ধতি** (Sexagesimal system) বলা হয়। ষষ্টিক পদ্ধতিতে কোণ পরিমাপের একক **এক সমকোণ**।

মন্তব্য : এক সমকোণ একটি ধ্রুবক কোণ; কারণ, উহা কোন বিশেষ এককের উপর নির্ভর করে না।

(b) বৃত্তীয় পদ্ধতি :

বৃত্তীয় পদ্ধতিতে (Circular system) কোণ পরিমাপের একক **এক রেডিয়ান্‌**।



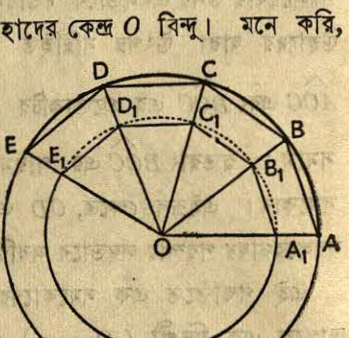
যে কোন বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধের সমান দৈর্ঘ্য-বিশিষ্ট ঐ বৃত্তের একটি চাপ উহার কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে তাহার পরিমাপকে এক **রেডিয়ান্‌** (Radian) বলা হয়।

এক রেডিয়ান্‌কে সংক্ষেপে 1^c লেখা হইয়া থাকে।

পার্শ্ববর্তী চিত্রে, O-কেন্দ্রীয় বৃত্তের AP চাপের দৈর্ঘ্য উহার ব্যাসার্দ্ধ OA এর দৈর্ঘ্যের সমান। সুতরাং, সংজ্ঞানুসারে, $\widehat{AOP}$ এর পরিমাপ এক রেডিয়ান্‌।

1-2. যে কোন বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত ধ্রুবক।

যে কোন দুইটি এককেন্দ্রীয় বৃত্ত অঙ্কন করি, যাহাদের কেন্দ্র O বিন্দু। মনে করি,



বৃহত্তর বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ R একক এবং ক্ষুদ্রতর বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ r একক। বৃহত্তর বৃত্তে n-সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট $ABCD$……একটি সুষম বহুভুজ অঙ্কন করি। $OA, OB, OC, OD,$……যোগ করি। মনে করি, উহারা ক্ষুদ্রতর বৃত্তকে যথাক্রমে A_1, B_1, C_1, D_1…… বিন্দুতে ছেদ করে। এখন, A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1……যোগ করি।

তাহা হইলে, $A_1B_1C_1D_1$……একটি n-সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট সুষম বহুভুজ উৎপন্ন হইল।

একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া,

$$OA = OB = OC = OD = \cdots\cdots = R;$$

$$OA_1 = OB_1 = OC_1 = OD_1 = \cdots\cdots = r.$$

এখন, ΔOAB এবং ΔOA_1B_1 সদৃশ বলিয়া,

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{OA}{OA_1}.$$

$$\therefore \frac{ABCD\cdots\cdots \text{সুষম বহুভুজের পরিসীমা}}{A_1B_1C_1D_1\cdots\cdots \text{সুষম বহুভুজের পরিসীমা}} = \frac{n.AB}{n.A_1B_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{OA}{OA_1} = \frac{2.OA}{2.OA_1};$$

$$= \frac{\text{বৃহত্তর বৃত্তের ব্যাস}}{\text{ক্ষুদ্রতর বৃত্তের ব্যাস}}.$$

n যে কোন ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা ($n \geqslant 3$) হইলে, উপরোক্ত সমতাটি সর্বদাই সত্য। এখন, সুষম বহুভুজের বাহু সংখ্যা যত বেশী হইবে, উহাদের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য ততই ছোট হইতে থাকিবে। n এর মান যখন প্রায় অসীম হইবে, বহুভুজদ্বয়ের বাহুগুলির সমষ্টি উহাদের অনুরূপ পরিলিখিত বৃত্তের পরিধির সহিত প্রায় সম্পূর্ণ মিলিয়া যাইবে; এবং তখন,

$$\frac{\text{বৃহত্তর বৃত্তের পরিধি}}{\text{ক্ষুদ্রতর বৃত্তের পরিধি}} = \frac{\text{বৃহত্তর বৃত্তের ব্যাস}}{\text{ক্ষুদ্রতর বৃত্তের ব্যাস}}, \quad (\text{যখন, } n \to \infty).$$

$$\text{অর্থাৎ, } \frac{\text{বৃহত্তর বৃত্তের পরিধি}}{\text{বৃহত্তর বৃত্তের ব্যাস}} = \frac{\text{ক্ষুদ্রতর বৃত্তের পরিধি}}{\text{ক্ষুদ্রতর বৃত্তের ব্যাস}}.$$

সুতরাং, বৃত্তের আকার যত বড় অথবা যত ছোটই হউক না কেন, উহার পরিধি এবং ব্যাসের অনুপাত ধ্রুবক ; অর্থাৎ,

$$\frac{\text{যে কোন বৃত্তের পরিধি}}{\text{সেই বৃত্তের ব্যাস}} = \text{ধ্রুবক।}$$

এই ধ্রুবক রাশিটিকে গ্রীক অক্ষর π ('পাই') দ্বারা সূচিত করা হইয়া থাকে।

$$\therefore \frac{\textbf{বৃত্তের পরিধি}}{\textbf{বৃত্তের ব্যাস}} = \pi.$$

সুতরাং, কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধ r একক হইলে, ঐ

$$\textbf{বৃত্তের পরিধি} = 2\pi r.$$

π একটি নির্দিষ্ট রাশি হইলেও, উহা কোন পূর্ণ সংখ্যাকে প্রকাশ করে না, আবার উহাকে কোন সঠিক ভগ্নাংশেও প্রকাশ করা সম্ভব নহে; ইহা একটি অমেয় রাশি। দেখা গিয়াছে, $\pi = 3{\cdot}1415926536$ (প্রায়)।

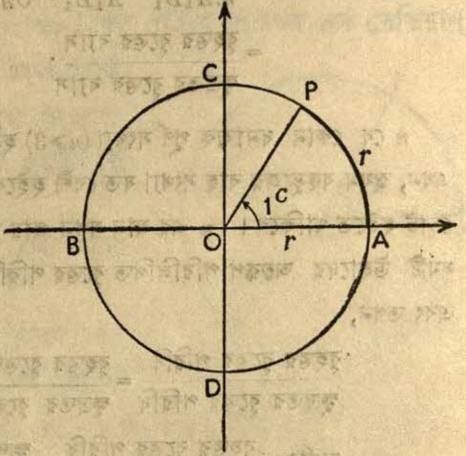
$\therefore \pi = 3{\cdot}1416$, (আসন্ন চার দশমিক স্থান পর্যন্ত)।

স্থূলভাবে সাধারণতঃ, $\pi = \frac{22}{7}$ ধরা হয়।

অন্য কোনরূপ কিছু বলা না থাকিলে $\pi = \frac{22}{7}$, অথবা, $\pi = 3{\cdot}1416$ কে বুঝাইবে।

1-3. এক রেডিয়ান্ একটি ধ্রুবক কোণ।

মনে করি, AB এবং CD সরলরেখাদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে O বিন্দুতে ছেদ করে। তাহা হইলে, $\angle AOC$ এর পরিমাপ এক সমকোণ।



O কে কেন্দ্র করিয়া r একক দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন করি; মনে করি, উহা AB কে A ও B এবং CD কে C ও D বিন্দুতে ছেদ করে। এখন, এই বৃত্তের পরিধি $= 2\pi r$ একক।

যেহেতু, $\angle AOC$, $\angle COB$, $\angle BOD$, $\angle DOA$ এর প্রত্যেকের পরিমাপ এক সমকোণ, সুতরাং, AC চাপ, CB চাপ, BD চাপ, DA চাপের দৈর্ঘ্য পরস্পর সমান।

$$\therefore \quad AC \text{ চাপ} = \tfrac{1}{4} \times \text{বৃত্তের পরিধি} = \tfrac{1}{4} \times 2\pi r = \frac{\pi r}{2}.$$

মনে করি, AP চাপের দৈর্ঘ্য $= r$ একক।

তাহা হইলে, $\angle AOP$ এর পরিমাপ এক রেডিয়ান্।

এখন, কোন বৃত্তের দুইটি চাপের দৈর্ঘ্যের অনুপাত এবং উহাদের সম্মুখস্থ কেন্দ্রস্থ অনুরূপ কোণদ্বয়ের পরিমাপের অনুপাত সমান বলিয়া,

$$\frac{AP \text{ চাপ}}{AC \text{ চাপ}} = \frac{\angle AOP \text{ এর পরিমাপ}}{\angle AOC \text{ এর পরিমাপ}} = \frac{1 \text{ রেডিয়ান}}{1 \text{ সমকোণ}}.$$

$$\therefore \quad 1 \text{ রেডিয়ান্} = \frac{AP \text{ চাপ}}{AC \text{ চাপ}} \times 1 \text{ সমকোণ}$$

$$= \frac{r}{\pi r/2} \times 1 \text{ সমকোণ} = 2 \times \frac{1}{\pi} \times 1 \text{ সমকোণ।}$$

সুতরাং, 1 রেডিয়ান্ কোণের পরিমাপ কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধের উপর নির্ভরশীল নহে। আবার যেহেতু, π একটি ধ্রুবক রাশি এবং এক সমকোণ একটি ধ্রুবক কোণ, সুতরাং,

1 রেডিয়ান্ = ধ্রুবক কোণ।

বিশেষ দ্রষ্টব্য :

$$1^c = \frac{2}{\pi} \times 1 \text{ সমকোণ} = \frac{2}{\pi} \times 90^\circ = \frac{180^\circ}{\pi}.$$

$$\therefore \quad \pi^c = 180^\circ.$$

আবার, $1^c = \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ}{3 \cdot 14159} = 57^\circ\ 17'\ 45'' = 206265''$ (প্রায়)।

মন্তব্য : কোন কোন স্থলে, 'রেডিয়ান্' বা উহার প্রতীক 'c' না লিখিয়া কেবল মাত্র π অক্ষরটি ব্যবহৃত হইয়া থাকে। এইরূপ ক্ষেত্রে π দ্বারা কোন কোণের পরিমাপকে বুঝাইলে, π এর অর্থ 180° কে বুঝাইবে।

কিন্তু, বৃত্তের পরিধি $= 2\pi r$ এর ক্ষেত্রে π দ্বারা কেবলমাত্র একটি সংখ্যাকে বুঝাইবে ; এবং তখন π এর মান $\frac{22}{7}$ (বা, $3 \cdot 1416$) ধরা হইবে।

1-4. r একক ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট কোন বৃত্তের s একক দৈর্ঘ্য-বিশিষ্ট একটি চাপ উহার কেন্দ্রে θ রেডিয়ান্ পরিমিত কোণ উৎপন্ন করিলে,

$$s = r \times \theta,$$

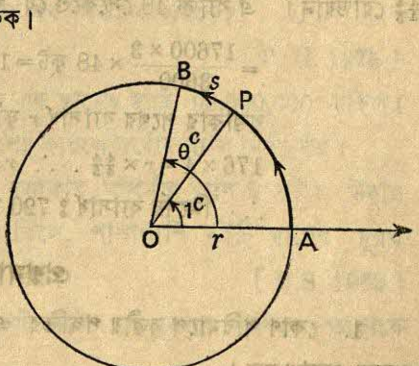
যেখানে r এবং s একই এককে প্রকাশিত।

প্রমাণ :

r একক ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত অঙ্কন করি, যাহার কেন্দ্র O. মনে করি, AB চাপের দৈর্ঘ্য $= s$ একক এবং $\angle AOB$ এর পরিমাপ $= \theta$ রেডিয়ান্।

ধরি, $\angle AOP$ এর পরিমাপ $= 1$ রেডিয়ান্।

তাহা হইলে, AP চাপের দৈর্ঘ্য $= r$ একক।



যেহেতু, কোন বৃত্তের যে কোন দুইটি চাপের দৈর্ঘ্যের অনুপাত উহাদের সম্মুখস্থ কেন্দ্রস্থ অনুরূপ কোণদ্বয়ের অনুপাতের সমান,

$$\therefore \frac{AB \text{ চাপের দৈর্ঘ্য}}{AP \text{ চাপের দৈর্ঘ্য}} = \frac{\angle AOB \text{ এর পরিমাপ}}{\angle ACP \text{ এর পরিমাপ}}.$$

$$\therefore \quad \frac{s}{r} = \frac{\theta}{1}\ ; \text{ অর্থাৎ, } s = r \times \theta.$$

উদাহরণ 1. একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণের বৃত্তীয় মান $\frac{1}{2}$ এবং $\frac{1}{3}$. তৃতীয় কোণটিকে ষষ্টিক মানে প্রকাশ কর। [$\pi = 3{\cdot}1416$]

$$\frac{1^c}{2}+\frac{1^c}{3}=\frac{5^c}{6}=\frac{5}{6}\times\frac{180^\circ}{\pi}$$

$$=\frac{150^\circ}{3{\cdot}1416}=47^\circ{\cdot}7464,\text{ (প্রায়)}$$

$$=47^\circ\ 44'\ 47''{\cdot}04$$

$\therefore$ তৃতীয় কোণের পরিমাপ $=180^\circ-47^\circ\ 44'\ 47''{\cdot}04=132^\circ\ 15'\ 13''{\cdot}0$ (প্রায়)

উদাহরণ 2. পৃথিবীকে 3960 মাইল ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট একটি গোলক ধরিলে উহার উপরিভাগের যে চাপ উহার কেন্দ্রে $1'$ কোণ উৎপন্ন করে তাহার দৈর্ঘ্য কত ?

$$1'=\frac{1}{60}\text{ ডিগ্রী}=\frac{\pi}{60\times180}\text{ রেডিয়ান্।}$$

$$\therefore\ \text{ নির্ণেয় চাপের দৈর্ঘ্য}=3960\text{ মাইল}\times\frac{\pi}{60\times180}$$

$$=3960\times\frac{22}{7\times60\times180}\text{ মাইল।}$$

$$=1\tfrac{16}{105}\text{ মাইল, }\rightarrow1{\cdot}15\text{ মাইল (প্রায়)।}$$

উদাহরণ 3. একটি বৃত্তাকার পথে ঘণ্টায় 10 মাইল গতিতে দৌড়াইলে এক ব্যক্তি 48 সেকেণ্ডে যে পথ অতিক্রম করে, তাহা ঐ বৃত্তের কেন্দ্রে 56° কোণ উৎপন্ন করে, ঐ বৃত্তাকার পথের ব্যাসার্ধ কত ?

1 ঘণ্টা $=3600$ সেকেণ্ড ; 10 মাইল $=17600\times3$ ফুট , $56^\circ=\frac{56\pi}{180}$ রেডিয়ান্ $=\frac{44}{45}$ রেডিয়ান্। ঐ ব্যক্তি 48 সেকেণ্ডে যে পথ অতিক্রম করে তাহার দৈর্ঘ্য

$$=\frac{17600\times3}{3600}\times48\text{ ফুট}=176\times4\text{ ফুট।}$$

বৃত্তাকার পথের ব্যাসার্ধ r ফুট হইলে,

$176\times4=r\times\frac{44}{45}$. $\therefore\ r=720.$

$\therefore$ নির্ণেয় ব্যাসার্ধ ঃ 720 ফুট বা $\frac{3}{22}$ মাইল।

প্রশ্নমালা 1

1. কোণ পরিমাপে বৃত্তীয় পদ্ধতির এককের সংজ্ঞা দাও এবং $37^\circ27'$ কে ঐ এককে প্রকাশ কর। [P. U. 1975]

2. প্রমাণ কর যে, এক রেডিয়ান্ একটি ধ্রুবক কোণ। ষষ্টিক এককে এক রেডিয়ানের মান নির্ণয় কর। ($\pi=\frac{22}{7}$). [H. S. 1960]

3. দুইটি কোণের অন্তর 40° এবং সমষ্টি $\frac{11}{7}$ রেডিয়ান্। কোণ দুইটিকে ষষ্টিক মানে প্রকাশ কর। $(\pi = \frac{22}{7})$.

4. কোন ত্রিভুজের কোণগুলির অনুপাত 2 : 3 : 5 হইলে বৃহত্তম কোণটিকে বৃত্তীয় মানে প্রকাশ কর।

5. কোন ত্রিভুজের কোণগুলি সমান্তর শ্রেণীভুক্ত। ক্ষুদ্রতম কোণের ডিগ্রীর সংখ্যা এবং বৃহত্তম কোণের রেডিয়ানের সংখ্যার অনুপাত $60 : \pi$ হইলে কোণগুলিকে ডিগ্রীতে প্রকাশ কর। **[H.S. Comp. 1975]**

6. কোন চতুর্ভুজের কোণগুলি সমান্তর প্রগতিতে আছে। ক্ষুদ্রতম কোণের ডিগ্রী সংখ্যা এবং বৃহত্তম কোণের রেডিয়ান্-সংখ্যার অনুপাত $90 : \pi$ হইলে, কোণগুলিকে ডিগ্রীতে প্রকাশ কর।

7. সমান দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট দুইটি বৃত্তচাপ উহাদের কেন্দ্রে যথাক্রমে 60° এবং 75° কোণ উৎপন্ন করে। তাহাদের ব্যাসার্ধের অনুপাত নির্ণয় কর।

8. R_1 এবং R_2 ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট দুইটি বৃত্তের S_1 এবং S_2 দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট দুইটি বৃত্তচাপ উহাদের কেন্দ্রে যথাক্রমে θ_1 এবং θ_2 কোণ উৎপন্ন করে। যে বৃত্তের $S_1 + S_2$ দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট চাপ উহার কেন্দ্রে $\theta_1 + \theta_2$ কোণ উৎপন্ন করে তাহার ব্যাস কত ?

9. পৃথিবীর বিষুবরেখার ব্যাসার্ধ 3963·35 মাইল এবং $\pi = 3{\cdot}14159265$ ধরিয়া বিষুব রেখার যে চাপ পৃথিবীর কেন্দ্রে 1 মিনিট কোণ উৎপন্ন করে তাহার দৈর্ঘ্য আসন্ন ফুটে নির্ণয় কর। (এই দৈর্ঘ্যকে এক **সামুদ্রিক মাইল** বলে)।

10. একটি ঘোড়া 27 ফুট ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি বৃত্তাকার পথে সমান গতিতে দৌড়াইয়া 3 সেকেণ্ডে যে পথ অতিক্রম করে তাহা ঐ বৃত্তাকার পথের কেন্দ্রে 70° কোণ উৎপন্ন করে। ঘোড়াটি অর্ধ মিনিটে কত পথ অতিক্রম করিবে ?

[P. U. 1975]

11. সূর্য হইতে পৃথিবীর উপরিস্থ কোন এক স্থানের দূরত্ব 93,000,000 মাইল। সূর্য্যের ব্যাস পৃথিবীর ঐ স্থানে $32'$ কোণ উৎপন্ন করিলে সূর্য্যের ব্যাস নির্ণয় কর।

12. একটি মাত্রাঙ্কিত (graduated) বৃত্তাকার মাপনীর ব্যাস 6 ফুট। উহার প্রান্তভাগের মাত্রাঙ্কিত দাগ $15'$ অন্তর থাকিলে, পাশাপাশি দুইটি দাগের দূরত্ব আসন্ন দুই দশমিক স্থান পর্য্যন্ত ইঞ্চিতে নির্ণয় কর। **[H.S. 1962]**

13. সকাল 9 টা 30 মিনিটে ঘড়ির দুইটি কাঁটা যে কোণে থাকিবে, তাহাকে বৃত্তীয় মানে প্রকাশ কর।

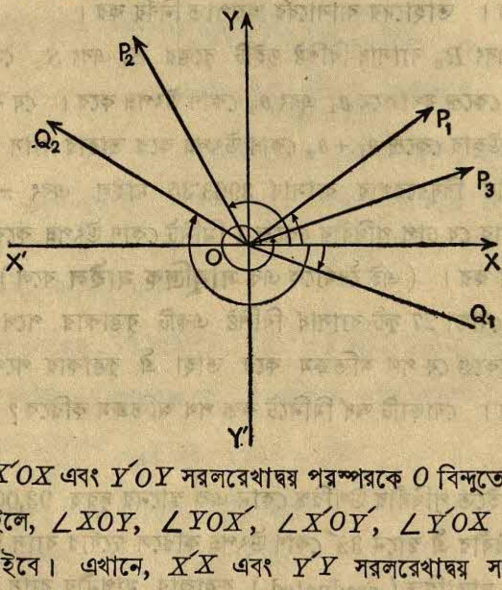
14. 4 টা এবং 5 টার মধ্যে কখন ঘড়ির কাঁটা দুইটির ব্যবধান 60° হইবে ?

ত্রিকোণমিতিক কোণ ও কোণানুপাত
(Trigonometrical Angles and Ratios)

2-1. উপস্থাপন।

গণিতশাস্ত্রের যে শাখায় ত্রিভুজের কোণ ও বাহুর মধ্যে পরস্পর সম্বন্ধ এবং তাহাদের পরিমাপ জানা যায় সাধারণতঃ তাহাকে **ত্রিকোণমিতি** (Trigonometry) বলা হয়। গ্রীকরা সর্ব প্রথম ইহার আবিষ্কার ও ব্যবহার করেন। বর্তমানে ত্রিকোণমিতিতে শুধু যে ত্রিভুজ সম্বন্ধীয় নানাবিধ প্রশ্নাবলী আলোচিত হয় তাহা নহে, ইহার ব্যবহার আরও ব্যাপক। ইহাতে সকলপ্রকার ধনাত্মক ও ঋণাত্মক কোণ এবং তাহাদের কোণানুপাত বিশদভাবে আলোচিত হয়।

2-2. ত্রিকোণমিতিক কোণ।



মনে করি, $X'OX$ এবং $Y'OY$ সরলরেখাদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে লম্বভাবে ছেদ করে ; তাহা হইলে, $\angle XOY$, $\angle YOX'$, $\angle X'OY'$, $\angle Y'OX$ এর প্রত্যেকটির পরিমাপ $90°$ হইবে। এখানে, $X'X$ এবং $Y'Y$ সরলরেখাদ্বয় সমগ্র সমতলটিকে XOY, YOX', $X'OY'$, $Y'OX$—এই চারিটি অংশে বিভক্ত করে। ইহাদিগকে যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় ও চতুর্থ **পাদ** (Quadrant) বলা হয়।

[1] ত্রিকোণমিতিক ধনাত্মক কোণ।

কোন একটি ঘূর্ণায়মান সরলরেখা O বিন্দুতে সর্বদা যুক্ত থাকিয়া OX এর অবস্থান হইতে আরম্ভ করিয়া ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীতক্রমে (anti-clockwise sense)

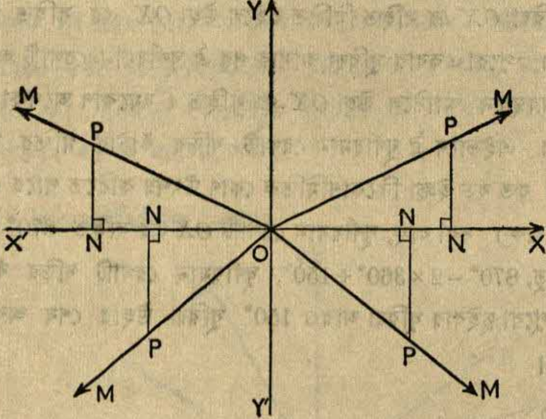
ঘুরিতে থাকিয়া উহার শেষ অবস্থান OX এর সহিত যে কোণ উৎপন্ন করিবে তাহা ত্রিকোণমিতিক ধনাত্মক কোণ এবং এই কোণের পরিমাপ 360° এর বেশীও হইতে পারে। ঘূর্ণায়মান সরলরেখার অবস্থান OP_1 প্রথমে প্রথমপাদে আসিয়া $\angle XOP_1$ একটি ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে ; OY এর সহিত মিলিত হইলে, $\angle XOY$ এর পরিমাপ 90° হইবে। প্রথমবারে (in the first revolution), দ্বিতীয় পাদে OP_2 অবস্থান হইলে, $\angle XOP_2$ এর পরিমাপ ধনাত্মক স্থূলকোণ হইবে। এই ঘূর্ণায়মান রেখা পূর্ণ একবার ঘুরিয়া OX এর সহিত মিলিত হইলে উহা OX এর সহিত 360° কোণ উৎপন্ন করিবে। পুরো একবার ঘুরিয়া আসার পর ঐ ঘূর্ণায়মান রেখাটি আবারও প্রথম পাদে OP_3 অবস্থানে আসিলে উহা OX এর সহিত 4 সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর কোণ উৎপন্ন করিবে। এইভাবে ঐ ঘূর্ণায়মান রেখাটি ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীতক্রমে ঘুরিয়া আরও যত বড় ইচ্ছা ত্রিকোণমিতিক কোণ উৎপন্ন করিতে পারে এবং ইহাদের প্রত্যেকটি ধনাত্মক। ধরা যাক্, ঘূর্ণায়মান রেখাটি OX এর সহিত 870° কোণ উৎপন্ন করে। যেহেতু, $870° = 2 \times 360° + 150°$, ঘূর্ণায়মান রেখাটি ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীতক্রমে পুরো দুইবার ঘুরিয়া আরও 150° ঘুরিয়া উহার শেষ অবস্থান দ্বিতীয় পাদে থাকিবে।

[2] ত্রিকোণমিতিক ঋণাত্মক কোণ।

ঘূর্ণায়মান রেখাটি O বিন্দুতে সর্বদা যুক্ত থাকিয়া OX এর অবস্থান হইতে আরম্ভ করিয়া ঘড়ির কাঁটার গতিক্রমে (clockwise sense) ঘুরিতে থাকিলে উহার শেষ অবস্থান OX এর সহিত যে কোণ উৎপন্ন করে তাহা প্রচলিত প্রথানুযায়ী ত্রিকোণমিতিক ঋণাত্মক কোণ। এইরূপ ক্ষেত্রে, ঘূর্ণায়মান রেখার অবস্থান OQ_1 প্রথমে চতুর্থপাদে থাকিলে $\angle XOQ_1$ একটি ঋণাত্মক সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন হইবে ; প্রথমবারে (in the first revolution), দ্বিতীয় পাদে OQ_2 অবস্থানে আসিলে, $\angle XOQ_2$ একটি ঋণাত্মক প্রবৃদ্ধকোণ উৎপন্ন হইবে। এইভাবে ঘূর্ণায়মান রেখাটি OX অবস্থান হইতে ঘড়ির কাঁটার গতিক্রমে ঘুরিতে থাকিয়া OX' অবস্থানে আসিলে $-180°$ কোণ, OX এর অবস্থানে আসিলে $-360°$ কোণ, OX এর সহিত উৎপন্ন করিবে ; পুরো একবার ঘুরিবার পর আরও ঘুরিতে থাকিলে, উহার শেষ অবস্থান OX এর সহিত যে কোণ উৎপন্ন করিবে তাহা $-360°$-এর চেয়ে ছোট হইবে। এইভাবে ঐ ঘূর্ণায়মান রেখাটি ঘড়ির কাঁটার গতিক্রমে ঘুরিতে থাকিয়া OX এর সহিত যে কোন ঋণাত্মক কোণ উৎপন্ন করিতে পারে।

ধরা যাক্, ঘূর্ণায়মান রেখাটি OX এর সহিত $-870°$ কোণ উৎপন্ন করে। যেহেতু, $-870° = -2 \times 360° - 150°$, ঘূর্ণায়মান রেখাটি ঘড়ি কাঁটার গতিক্রমে পুরো দুইবার ঘুরিবার পর আরও ঘুরিয়া OX এর সহিত $-150°$ কোণ উৎপন্ন করিবে অর্থাৎ ঘূর্ণায়মান রেখার শেষ অবস্থায় তৃতীয় পাদে থাকিবে।

2-3. (a) কোণানুপাতের সংজ্ঞা।



মনে করি, $X'X$ এবং $Y'Y$ সরলরেখাদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে O বিন্দুতে ছেদ করে। একটি ঘূর্ণায়মান সরলরেখা O বিন্দুর সহিত সর্বদা যুক্ত থাকিয়া উহার প্রথম অবস্থান OX হইতে ঐ সমতলে ঘুরিতে থাকিয়া OM অবস্থানে আসিয়া OX এর সহিত $\angle XOM$ উৎপন্ন করে। মনে করি, $\angle XOM = \theta$, যেখানে θ ধনাত্মক বা ঋণাত্মক বা 0 (শূন্য) হইতে পারে।

মনে করি, OM এর উপর P যে কোন একটি বিন্দু। P বিন্দু হইতে OX এর উপর PN লম্ব টানি, যেখানে N বিন্দুটি OX অথবা OX' এর উপরে অবস্থিত। তাহা হইলে, $\angle PNO$ এর পরিমাপ এক সমকোণ বা $90°$. সুতরাং, ONP একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

***OP*, *ON* এবং *PN*-কে যথাক্রমে $\triangle PON$ এর অতিভুজ** (hypotenuse), **সংলগ্ন বাহু** (adjacent side), এবং **বিপরীত বাহু** (opposite side) বলা হয়।

$\frac{PN}{OP}, \frac{ON}{OP}, \frac{PN}{ON}, \frac{ON}{PN}, \frac{OP}{ON}, \frac{OP}{PN}$ অনুপাতগুলিকে যথাক্রমে $\angle PON$ অর্থাৎ θ কোণের sine, cosine, tangent, cotangent, secant এবং cosecant বলা হয় এবং সংক্ষেপে লেখা হয় :

$$\sin\theta=\frac{PN}{OP}=\frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}}; \qquad \cos\theta=\frac{ON}{OP}=\frac{\text{সংলগ্ন বাহু}}{\text{অতিভুজ}};$$

$$\tan\theta=\frac{PN}{ON}=\frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{সংলগ্ন বাহু}}; \qquad \cot\theta=\frac{ON}{PN}=\frac{\text{সংলগ্ন বাহু}}{\text{বিপরীত বাহু}};$$

$$\sec\theta=\frac{OP}{ON}=\frac{\text{অতিভুজ}}{\text{সংলগ্ন বাহু}}; \qquad \operatorname{cosec}\theta=\frac{OP}{PN}=\frac{\text{অতিভুজ}}{\text{বিপরীত বাহু}}।$$

$\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\cot\theta$, $\sec\theta$, $\operatorname{cosec}\theta$ কে θ কোণের কোণানুপাত (Trigonometrical ratios) বলা হয় এবং ইহাদের প্রত্যেকটি এক একটি বিশুদ্ধ সংখ্যা।

মন্তব্য ঃ $0°<A<B<90°$ হইলে, চিত্রের সাহায্যে দেখানো যায় যে, $\sin B>\sin A$; $\cos B<\cos A$; $\tan B>\tan A$; ইত্যাদি।

(b) কোণানুপাতগুলির পারস্পারিক সম্বন্ধ।

কোণানুপাতের সংজ্ঞা হইতে,

$$\operatorname{cosec}\theta=\frac{1}{\sin\theta};\ \sec\theta=\frac{1}{\cos\theta};\ \cot\theta=\frac{1}{\tan\theta};$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta};\quad \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}.$$

এখন, PON একটি সমকোণী ত্রিভুজ বলিয়া,

$$PN^2+ON^2=OP^2. \qquad \cdots \qquad (A)$$

$$\therefore\ \left(\frac{PN}{OP}\right)^2+\left(\frac{ON}{OP}\right)^2=1.$$

$$\therefore\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1.$$

আবার, (A) হইতে,

$$\left(\frac{OP}{ON}\right)^2=1+\left(\frac{PN}{ON}\right)^2$$

$$\therefore\ \sec^2\theta=1+\tan^2\theta.$$

আবার, (A) হইতে পাই,

$$\left(\frac{OP}{PN}\right)^2=1+\left(\frac{ON}{PN}\right)^2$$

$$\therefore\ \operatorname{cosec}^2\theta=1+\cot^2\theta.$$

সুতরাং, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$

$\operatorname{cosec}^2\theta=1+\cot^2\theta.$

(c) কোণানুপাতসমূহের মানের সীমা।

θ-এর যে কোন মানের জন্য $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$;

অর্থাৎ, $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$.

যেহেতু, $\cos^2\theta$ এবং $\sin^2\theta$ এর মান 0 শূন্য অথবা ধনাত্মক বাস্তব রাশি হইবে, $\therefore\ 0\leqslant\sin^2\theta\leqslant1$, অর্থাৎ, $-1\leqslant\sin\theta\leqslant1$. সেইরূপ, $-1\leqslant\cos\theta\leqslant1$.

কাজেই, θ-এর মান যাহাই হউক না কেন, $\sin\theta$ এবং $\cos\theta$ উভয়েরই মানের সীমা -1 এবং $+1$ হইবে।

আবার, $\operatorname{cosec}\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}$ এবং $\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$ বলিয়া, উহাদের সাংখ্যমান (Numerical values) 1 অপেক্ষা ছোট হইতে পারে না। কিন্তু $\tan\theta$ এবং $\cot\theta$-এর মান যে কোন বাস্তব রাশি হইতে পারে; উহাদের মানের কোন সীমা নাই।

(d) কোণানুপাতসমূহের চিহ্ন।

প্রচলিত প্রথা অনুযায়ী OX এবং OY বরাবর দূরত্বকে ধনাত্মক এবং OX' এবং OY' বরাবর দূরত্বকে ঋণাত্মক ধরা হইয়া থাকে। ঘূর্ণায়মান সরলরেখা OP যে পাদেই অবস্থিত হউক না কেন, উহার দৈর্ঘ্য সর্বদাই ধনাত্মক ধরা হয়।

(*i*) ঘূর্ণায়মান সরলরেখা OP প্রথম পাদে অবস্থিত হইলে, OP, ON, PN-এর প্রত্যেকটি ধনাত্মক। সুতরাং, এইরূপক্ষেত্রে, কোণানুপাতসমূহ সকলেই ধনাত্মক হইবে।

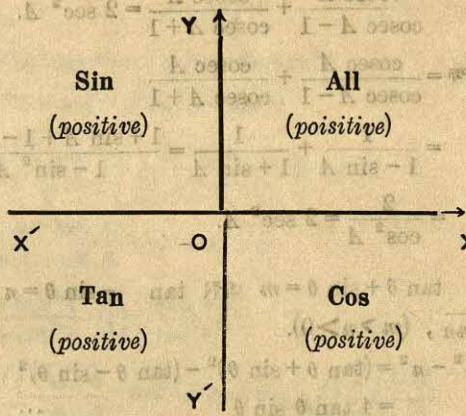
(*ii*) OP দ্বিতীয় পাদে থাকিলে, OP এবং PN ধনাত্মক, কিন্তু ON ঋণাত্মক। সুতরাং, এইরূপক্ষেত্রে, কোণানুপাতগুলির কেবলমাত্র sine এবং উহার অন্যোন্যক cosecant ধনাত্মক হইবে এবং বাকিগুলি ঋণাত্মক হইবে।

(*iii*) OP তৃতীয় পাদে থাকিলে, OP ধনাত্মক এবং ON ও PN ঋণাত্মক। এইরূপক্ষেত্রে কোণানুপাতগুলির কেবলমাত্র tangent এবং ইহার অন্যোন্যক cotangent ধনাত্মক এবং বাকিগুলি ঋণাত্মক।

(*iv*) OP চতুর্থপাদে থাকিলে, OP এবং ON ধনাত্মক, কিন্তু PN ঋণাত্মক। সুতরাং, এইরূপক্ষেত্রে, কোণানুপাতগুলির কেবলমাত্র cosine এবং ইহার অন্যোন্যক secant ধনাত্মক এবং বাকিগুলি ঋণাত্মক।

নিম্নলিখিত চিত্রের সাহায্যে কোণানুপাতসমূহের চিহ্নগুলি মনে রাখা সহজ হইবে।

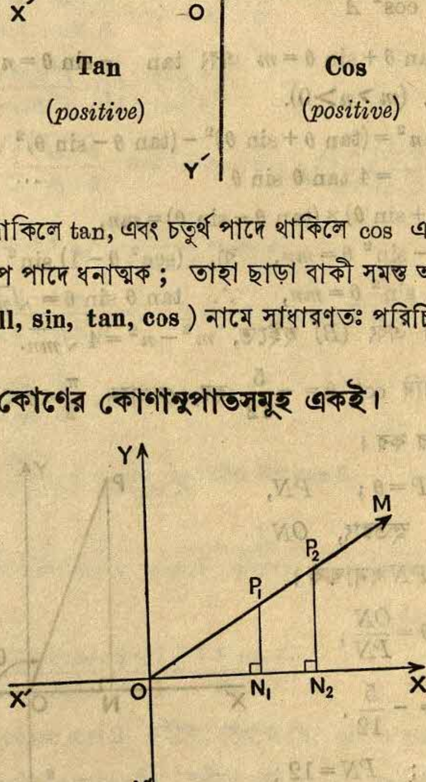
OP প্রথমপাদে থাকিলে সকল কোণানুপাতই ধনাত্মক ; দ্বিতীয়পাদে থাকিলে



sin, তৃতীয় পাদে থাকিলে tan, এবং চতুর্থ পাদে থাকিলে cos এবং উহাদের অনুরূপ অন্যোন্যকগুলি অনুরূপ পাদে ধনাত্মক ; তাহা ছাড়া বাকী সমস্ত অনুপাত ঋণাত্মক।

এই নিয়মটি (**all, sin, tan, cos**) নামে সাধারণতঃ পরিচিত।

2-4. একই কোণের কোণানুপাতসমূহ একই।



মনে করি, $\angle XOM = \theta$; এবং OM-এর উপর P_1 এবং P_2 যে কোন দুইটি বিন্দু ; OX-এর উপর P_1N_1 এবং P_2N_2 লম্ব টানি। এখন, OP_1N_1 এবং OP_2N_2 ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ। সুতরাং, উহাদের অনুরূপ বহুগুলি সমানুপাতী। সুতরাং, $\angle XOM$ এর অর্থাৎ θ কোণের কোণানুপাতসমূহ একই থাকিবে। যেমন,

$$\sin\theta = \frac{P_1N_1}{OP_1} = \frac{P_2N_2}{OP_2}\ ;\ \cos\theta = \frac{ON_1}{OP_1} = \frac{ON_2}{OP_2}\ ;$$ ইত্যাদি।

উদাহরণ 1. দেখাও যে,

$$\frac{\operatorname{cosec} A}{\operatorname{cosec} A-1}+\frac{\operatorname{cosec} A}{\operatorname{cosec} A+1}=2\sec^2 A.$$

$$\text{বাম পক্ষ}=\frac{\operatorname{cosec} A}{\operatorname{cosec} A-1}+\frac{\operatorname{cosec} A}{\operatorname{cosec} A+1}$$

$$=\frac{1}{1-\sin A}+\frac{1}{1+\sin A}=\frac{1+\sin A+1-\sin A}{1-\sin^2 A}$$

$$=\frac{2}{\cos^2 A}=2\sec^2 A.$$

উদাহরণ 2. $\tan\theta+\sin\theta=m$ এবং $\tan\ \ -\sin\theta=n$ হইলে, দেখাও যে, $m^2-n^2=4\sqrt{mn}$, $(m>n>0)$.

এখন, $m^2-n^2=(\tan\theta+\sin\theta)^2-(\tan\theta-\sin\theta)^2$

$=4\tan\theta\sin\theta$ ... ... (A)

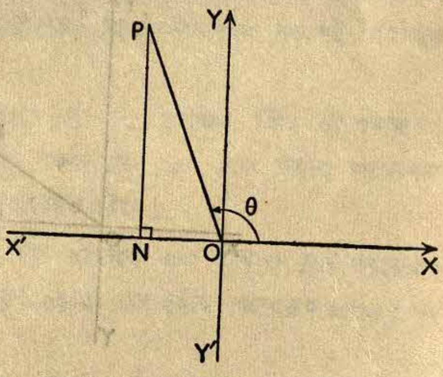
এবং, $(\tan\theta+\sin\theta)\times(\tan\theta-\sin\theta)=mn$,

বা, $\tan^2\theta-\sin^2\theta=mn$, বা, $(\sec^2\theta-1)\sin^2\theta=mn$,

বা, $\tan^2\theta\ \sin^2\theta=mn$, $\therefore\ \tan\theta\sin\theta=\sqrt{mn}$ ... (B)

সুতরাং, (A) এবং (B) হইতে, $m^2-n^2=4\sqrt{mn}$.

উদাহরণ 3. যদি $\cot\theta=-\frac{5}{12}$ হয়, যেখানে, $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$, $\operatorname{cosec}\theta$ এবং $\sec\theta$ এর মান বাহির কর।



চিত্রে, $\angle XOP=\theta$; PN, OX'-এরউপর লম্ব। সুতরাং, ON ঋণাত্মক; OP এবং PN ধনাত্মক।

এখন, $\cot\theta=\frac{ON}{PN}$;

কিন্তু $\cot\theta=-\frac{5}{12}$.

$\therefore\ ON=-5$; $PN=12$; ধরা যায়।

আবার, যেহেতু, $OP^2=ON^2+PN^2=(-5)^2+12^2=169$;

$\therefore\ OP=+13$.

$$\therefore\ \sin\theta=\frac{PN}{OP}=+\frac{12}{13};\quad \cos\theta=\frac{ON}{OP}=\frac{-5}{13}.$$

সুতরাং, $\operatorname{cosec}\theta=\frac{1}{\sin\theta}=+\frac{13}{12}$; $\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=-\frac{13}{5}$.

প্রশ্নমালা 2

1. দেখাও যে,

(i) $\tan^4\theta + \sec^4\theta = 1 + 2\sec^2\theta\tan^2\theta$.

(ii) $\tan^4\theta + \tan^2\theta = \sec^4\theta - \sec^2\theta$

(iii) $\sqrt{\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} + \sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = 2\sec\theta$

(iv) $\dfrac{\cot\alpha + \tan\beta}{\tan\alpha + \cot\beta} = \cot\alpha\tan\beta$

(v) $\dfrac{1+\tan^2\theta}{1+\cot^2\theta} = \left(\dfrac{1-\tan\theta}{1-\cot\theta}\right)^2$

(vi) $\sqrt{\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} - \sec\theta = \text{sce}\ \theta - \sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}$.

(vii) $\tan\theta + \sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sec\theta$; [H. S. 1976]

(viii) $\dfrac{\sec\theta - \tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta} = 1 - 2\sec\theta\tan\theta + 2\tan^2\theta$. [H. S. 1975]

(ix) $\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta} = (\sec\theta - \tan\theta)^2$. [P. U. 1973]

(x) $\dfrac{\cos\theta}{1-\tan\theta} + \dfrac{\sin\theta}{1-\cot\theta} = \sin\theta + \cos\theta$. [P. U. 1975]

(xi) $\dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta} - \dfrac{1}{\sin\theta} = \dfrac{1}{\sin\theta} - \dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta}$

[Joint Ent. Ex. 1969]

(xii) $\dfrac{\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta - 1}{\cot\theta - \operatorname{cosec}\theta + 1} = \dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$.

2. $\sin\alpha + \operatorname{cosec}\alpha = 2$ হইলে, দেখাও যে, $\sin^n\alpha + \operatorname{cosec}^n\alpha = 2$.

3. $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \tan^2\beta$ হইলে দেখাও যে, $\cos^2\beta - \sin^2\beta = \tan^2\alpha$.

[Joint Ent. Ex. 1970]

4. যদি $\tan\theta + \sec\theta = x$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$\sin\theta + \frac{x^2-1}{x^2+1}.$$ [H. S. 1964]

5. যদি $\tan\theta - \cot\theta = a$ এবং $\cos\theta + \sin\theta = b$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$(a^2+4)(b^2-1)^2 = 4.$$ [P. U. 1973]

6. যদি $x \sin^3\alpha + y \cos^3\alpha = \sin\alpha \cos\alpha$ এবং $x \sin\alpha - y \cos\alpha = 0$ হয়, তবে প্রমাণ কর, $x^2 + y^2 = 1$, [P. U. 1968]

7. $5 \tan A = 4$ হইলে, $\dfrac{5 \sin A - 3 \cos A}{\sin A + 2 \cos A}$ এর মান নির্ণয় কর, যেখানে A ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ।

8. $\sin A = \frac{3}{5}$ এবং $\cos B = \frac{12}{13}$ হইলে, $\dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$ এর মান বাহির কর, যেখানে, A এবং B ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ।

9. θ ধনাত্মক স্থূলকোণ হইলে, $\cos\theta$ এর সংজ্ঞা দাও। $\tan\theta = -2$ হইলে, $\cos\theta$ এর মান বাহির কর, যদি θ কোণের ঘূর্ণিত বাহু (*i*) দ্বিতীয়, (*ii*) চতুর্থ পাদে থাকে। [H. S. 1975]

10. যদি $\cot\theta = -\frac{4}{3}$ হয়, এবং θ এর মান $\pi/2$ এবং π এর মধ্যবর্তী হয়, তবে $\sin\theta$ এবং $\sec\theta$ এর মান বাহির কর। [H. S. 1976]

11. যদি $\cos\theta = -\frac{3}{5}$ হয়, $\sin\theta$ এবং $\tan\theta$ এর মান বাহির কর, যেখানে θ কোণের ঘূর্ণিত বাহু (*i*) দ্বিতীয় পাদে, (*ii*) তৃতীয় পাদে অবস্থান করে। [P. U. 1973]

12. $15 \sin^2\theta + 2 \cos\theta = 7$ হইলে, $\tan\theta$ এর মান বাহির কর।

13. $4x \sec\theta = 1 + 4x^2$ হইলে দেখাও যে, $\sec\theta + \tan\theta = 2x$, বা, $1/2x$.

14. $(a^2 - b^2) \sin\theta + 2ab \cos\theta = a^2 + b^2$ হইলে, $\tan\theta$ এবং $\operatorname{cosec}\theta$ এর মান বাহির কর।

15. $\tan\theta = \dfrac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2} \cos\theta.$ [Joint. Ent. Ex. 1971]

16. $\tan^2\theta = 1 - e^2$ হইলে, দেখাও যে,

$$\sec\theta + \tan^3\theta \operatorname{cosec}\theta = (2 - e^2)^{3/2}.$$

17. $(1 + \sin x)(1 + \sin y)(1 + \sin z) = (1 - \sin x)(1 - \sin y)(1 - \sin z)$ হইলে, প্রমাণ কর যে, প্রত্যেক পক্ষের মান $\pm \cos x \cos y \cos z$.

18. $\dfrac{\cos^4\alpha}{\cos^2\beta} + \dfrac{\sin^4\alpha}{\sin^2\beta} = 1$ হইলে, দেখাও যে, $\dfrac{\cos^4\beta}{\cos^2\alpha} + \dfrac{\sin^4\beta}{\sin^2\alpha} = 1.$

19. $\dfrac{\sin^4\alpha}{a} + \dfrac{\cos^4\alpha}{b} = \dfrac{1}{a+b}$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$\dfrac{\sin^8\alpha}{a^3} + \dfrac{\cos^8\alpha}{b^3} = \dfrac{1}{(a+b)^3}.$ [Joint Ent. Ex. 1971]

20. যদি $0° < A < B < 90°$ হয়, তবে দেখাও যে, $\sin B > \sin A$.

তৃতীয় অধ্যায়

θ এর সহযোগে উৎপন্ন কোণের কোণানুপাত সমূহ

(Trigonometrical ratios of angles associated with θ)

3-1. $90^\circ - \theta$ এবং θ-এর কোণানুপাতের মধ্যে সম্পর্ক।

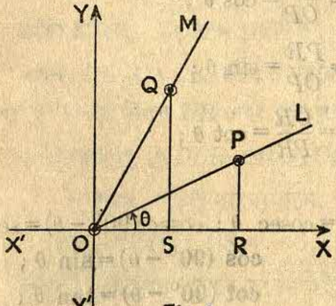


Fig-1

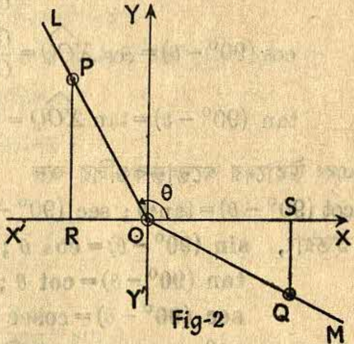


Fig-2

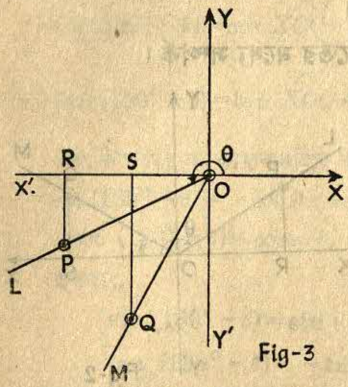


Fig-3

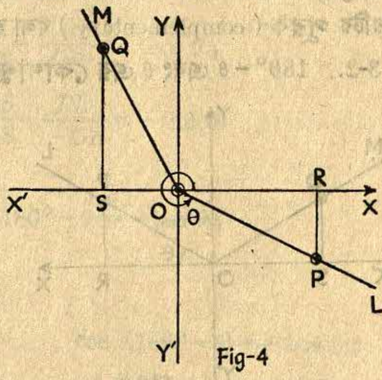


Fig-4

মনে করি, একটি ঘূর্ণায়মান সরলরেখা উহার প্রথম অবস্থান OX হইতে বাম আবর্তে ঘুরিতে থাকিয়া θ কোণের সমান $\widehat{XOL}$ উৎপন্ন করিল; এবং অপর একটি ঘূর্ণায়মান সরলরেখা উহার প্রথম অবস্থান OX হইতে বাম আবর্তে ঘুরিয়া $\widehat{XOY} = 90^\circ$ উৎপন্ন করিবার পর দক্ষিণ আবর্তে ঘুরিয়া θ কোণের সমান $\widehat{YOM}$ উৎপন্ন করিল। তাহা হইলে, $\widehat{XOM} = 90^\circ + (-\theta) = 90^\circ - \theta$.

এখন, OL এবং OM হইতে যথাক্রমে সমান দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট OP এবং OQ লইলাম এবং $X'X$ এর উপর PR এবং QS লম্ব টানিলাম। তাহা হইলে, $\triangle OPR$ এবং $\triangle QOS$ সর্বসম।

সুতরাং, সাংখ্যমানে, $OQ = OP$; $OS = PR$; $QS = OR$.

অবশ্য, প্রত্যেক চিত্রে, OP এবং OQ উভয়েই ধনাত্মক; প্রথম এবং দ্বিতীয় চিত্রে, OS এবং PR উভয়েই ধনাত্মক কিন্তু তৃতীয় এবং চতুর্থ চিত্রে তাহাদের উভয়েই ঋণাত্মক।

প্রথম এবং চতুর্থ চিত্রে, QS এবং OR উভয়েই ধনাত্মক কিন্তু দ্বিতীয় এবং তৃতীয় চিত্রে তাহাদের উভয়েই ঋণাত্মক।

সুতরাং, কোণানুপাতের সংজ্ঞা হইতে,

$$\sin\,(90^\circ-\theta)=\sin\widehat{XOQ}=\frac{QS}{OQ}=\frac{OR}{OP}=\cos\theta\;;$$

$$\cos\,(90^\circ-\theta)=\cos\widehat{XOQ}=\frac{OS}{OQ}=\frac{PR}{OP}=\sin\theta\;;$$

$$\tan\,(90^\circ-\theta)=\tan\widehat{XOQ}=\frac{QS}{OS}=\frac{OR}{PR}=\cot\theta\;;$$

এবং উহাদের অন্যোন্যকগুলির জন্য

$\cot\,(90^\circ-\theta)=\tan\theta$; $\sec\,(90^\circ-\theta)=\operatorname{cosec}\theta$; $\operatorname{cosec}\,(90^\circ-\theta)=\sec\theta$.

সুতরাং, $\sin\,(90^\circ-\theta)=\cos\theta$; $\cos\,(90^\circ-\theta)=\sin\theta$;

$\tan\,(90^\circ-\theta)=\cot\theta$; $\cot\,(90^\circ-\theta)=\tan\theta$;

$\sec\,(90^\circ-\theta)=\operatorname{cosec}\theta$; $\operatorname{cosec}\,(90^\circ-\theta)=\sec\theta$;

মন্তব্য : $90^\circ-\theta$ এবং θ এর সমষ্টি 90° বলিয়া উহাদের যে কোন একটিকে অপরটির **পূরক** (complementary) বলা হয়।

3-2. $180^\circ-\theta$ এবং θ এর কোণানুপাতের মধ্যে সম্পর্ক।

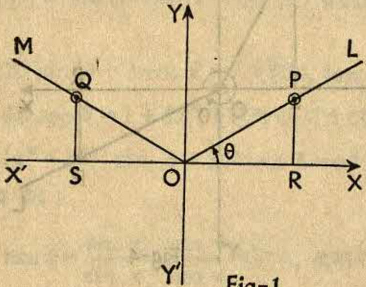


Fig-1

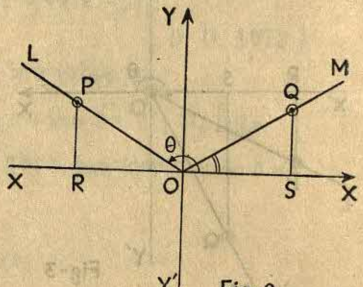


Fig-2

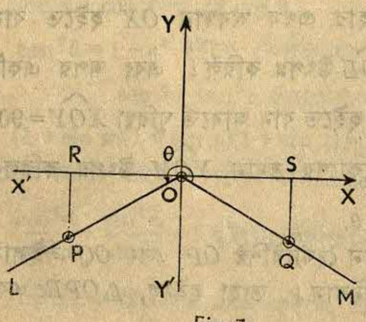


Fig-3

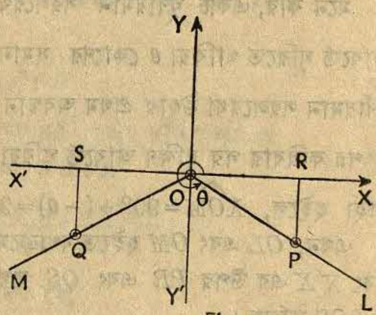


Fig-4

মনে করি, একটি ঘূর্ণায়মান সরলরেখা উহার প্রথম অবস্থান OX হইতে বাম আবর্তে ঘুরিতে থাকিয়া θ কোণের সমান $\widehat{XOL}$ উৎপন্ন করিল; এবং অপর একটি

ঘূর্ণায়মান সরলরেখা উহার প্রথম অবস্থান OX হইতে বাম আবর্তে ঘুরিয়া OX' অবস্থানে আসিয়া 180° কোণ উৎপন্ন করিবার পর দক্ষিণ আবর্তে ঘুরিতে থাকিয়া θ এর সমান $\widehat{X'OM}$ উৎপন্ন করিল।

তাহা হইলে, $\widehat{XOM} = 180^\circ + (-\theta) = 180^\circ - \theta$.

এখন, OL এবং OM হইতে যথাক্রমে সমান দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট OP এবং OQ লইলাম এবং $X'X$ এর উপর PR এবং QS লম্ব টানিলাম।

তাহা হইলে, $\triangle OPR$ এবং $\triangle OQS$ সর্বসম।

স্থতরাং, সচিহ্ন সাংখ্যমানে,

$OQ = OP$; $OS = -OR$; $QS = PR$

স্থতরাং, কোণানুপাতের সংজ্ঞা হইতে,

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \widehat{XOQ} = \frac{QS}{OQ} = \frac{PR}{OP} = \sin\theta;$$

$$\cos(180^\circ - \theta) = \cos \widehat{XOQ} = \frac{OS}{OQ} = \frac{-OR}{OP} = -\cos\theta;$$

$$\tan(180^\circ - \theta) = \tan \widehat{XOQ} = \frac{QS}{OS} = \frac{PR}{-OR} = -\tan\theta.$$

এবং উহাদের অন্যোন্যকগুলির জন্য,

$\cot(180^\circ - \theta) = -\cot\theta$; $\sec(180^\circ - \theta) = -\sec\theta$;

$\operatorname{cosec}(180^\circ - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$.

স্থতরাং,

$$\mathbf{\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta; \quad \cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta;}$$

$$\mathbf{\tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta; \quad \cot(180^\circ - \theta) = -\cot\theta;}$$

$$\mathbf{\sec(180^\circ - \theta) = -\sec\theta; \quad \operatorname{cosec}((180^\circ - \theta) = \operatorname{cosec}\theta;}$$

মন্তব্য : $180^\circ - \theta$ এবং θ এর সমষ্টি 180° বলিয়া উহাদের যে কোন একটিকে অপরটির **সম্পূরক** (supplementary) বলা হয়।

3-3. θ এবং $-\theta$ এর কোণানুপাতের মধ্যে পারস্পরিক সম্পর্ক।

$$\begin{aligned}\sin(-\theta) &= \sin(90^\circ - \overline{90^\circ + \theta}) \\ &= \cos(90^\circ + \theta) = \cos(180^\circ - \overline{90^\circ - \theta}) \\ &= -\cos(90^\circ - \theta) = -\sin\theta.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(-\theta) &= \cos(90^\circ - \overline{90^\circ + \theta}) \\ &= \sin(90^\circ + \theta) = \sin(180^\circ - \overline{90^\circ - \theta}) \\ &= \sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta\end{aligned}$$

$$\tan(-\theta)=\frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)}=\frac{-\sin\theta}{\cos\theta}=-\tan\theta.$$

$\therefore\ \ \sin(-\theta)=-\sin\theta\ ;\ \cos(-\theta)=\cos\theta\ ;$

$\tan(-\theta)=-\tan\theta\ ;\ \cot(-\theta)=-\cot\theta\ ;$

$\sec(-\theta)=\sec\theta\ ;\ \operatorname{cosec}(-\theta)=-\operatorname{cosec}\theta.$

মন্তব্য: জ্যামিতিক চিত্রের সাহায্যে উপরোক্ত কোণানুপাতসমূহের পারস্পরিক সম্পর্ক স্থাপন অতি সহজেই করা যাইবে।

প্রয়োজনীয় সিদ্ধান্ত :

(*a*) **$(90°+\theta)$ এবং θ এর কোণানুপাতসমূহের মধ্যে পারস্পরিক সম্পর্ক :**

$\sin(90°+\theta)=\sin\{90°-(-\theta)\}=\cos(-\theta)=\cos\theta,$

$\cos(90°+\theta)=\cos\{90°-(-\theta)\}=\sin(-\theta)=-\sin\theta,$

$\therefore\ \ \tan(90°+\theta)=-\cot\theta\ ;\ \cot(90°+\theta)=-\tan\theta\ ;$

$\sec(90°+\theta)=-\operatorname{cosec}\theta\ ;\ \operatorname{cosec}(90°+\theta)=\sec\theta$

(*b*) **$(180°+\theta)$ এবং θ এর কোণানুপাতসমূহের মধ্যে পারস্পরিক সম্পর্ক।**

$\sin(180°+\theta)=\sin(90°+\overline{90°+\theta})=\cos(90°+\theta)=-\sin\theta,$

$\cos(180°+\theta)=\cos(90°+\overline{90°+\theta})=-\sin(90°+\theta)=-\cos\theta,$

$\therefore\ \ \tan(180°+\theta)=\tan\theta\ ;\ \cot(180°+\theta)=\cot\theta$

$\sec(180°+\theta)=-\sec\theta\ ;\ \operatorname{cosec}(180°+\theta)=-\operatorname{cosec}\theta.$

3-4. (i) $(n\times360°+\theta)$ এবং (ii) $(n\times360°-\theta)$ এর কোণানুপাতসমূহ নির্ণয় পদ্ধতি।

(*i*) n যে কোন একটি নির্দিষ্ট ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইলে, $(n\times360°+\theta)$ এবং θ এর সীমারেখা একই হইবে।

সুতরাং তখন,

$\sin(n\times360°+\theta)=\sin\theta\ ;\ \cos(n\times360°+\theta)=\cos\theta\ ;$

$\tan(n\times360°+\theta)=\tan\theta\ ;\ \cot(n\times360°+\theta)=\cot\theta\ ;$

$\sec(n\times360°+\theta)=\sec\theta\ ;\ \operatorname{cosec}(n\times360°+\theta)=\operatorname{cosec}\theta\ ;$

(*ii*) n যে কোন একটি নির্দিষ্ট ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হইলে, $(n\times360°-\theta)$ এবং $(-\theta)$ এর সীমারেখা একই হইবে।

সুতরাং, তখন,

$\sin(n\times 360^\circ-\theta)=\sin(-\theta)=-\sin\theta$;

$\cos(n\times 360^\circ-\theta)=\cos(-\theta)=\cos\theta$;

$\tan(n\times 360^\circ-\theta)=\tan(-\theta)=-\tan\theta$;

$\cot(n\times 360^\circ-\theta)=\cot(-\theta)=-\cot\theta$;

$\sec(n\times 360^\circ-\theta)=\sec(-\theta)=\sec\theta$;

$\operatorname{cosec}(n\times 360^\circ-\theta)=\operatorname{cosec}(-\theta)=-\operatorname{cosec}\theta$.

প্রয়োজনীয় সিদ্ধান্তঃ

(a) $(270^\circ-\theta)$ এবং θ এর কোণানুপাতসমূহের পারস্পরিক সম্পর্ক।

$\sin(270^\circ-\theta)=\sin(360^\circ-\overline{90^\circ+\theta})=-\sin(90^\circ+\theta)=-\cos\theta$;

$\cos(270^\circ-\theta)=\cos(360^\circ-\overline{90^\circ+\theta})=\cos(90^\circ+\theta)=-\sin\theta$;

$\therefore\ \tan(270^\circ-\theta)=\cot\theta$; $\cot(270^\circ-\theta)=\tan\theta$;

$\sec(270^\circ-\theta)=-\operatorname{cosec}\theta$; $\operatorname{cosec}(270^\circ-\theta)=-\sec\theta$.

(b) $(270^\circ+\theta)$ এবং θ-এর কোণানুপাতসমূহের পারস্পরিক সম্পর্ক।

$\sin(270^\circ+\theta)=\sin(360^\circ-\overline{90^\circ-\theta})=-\sin(90^\circ-\theta)=-\cos\theta$;

$\cos(270^\circ+\theta)=\cos(360^\circ-\overline{90^\circ-\theta})=\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$;

$\therefore\ \tan(270^\circ+\theta)=-\cot\theta$; $\cot(270^\circ+\theta)=-\tan\theta$;

$\sec(270^\circ+\theta)=\operatorname{cosec}\theta$; $\operatorname{cosec}(270^\circ+\theta)=-\sec\theta$.

সাধারণ মন্তব্য ঃ

মনে করি, n যে কোন একটি নির্দিষ্ট ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

[1] $\alpha=90^\circ\times(2n)\pm\theta$ হইলে, সাংখ্যমানে, α কোণের sin, cos, tan, cot, sec, cosec যথাক্রমে θ কোণের sin, cos, tan, cot, sec, cosec থাকিবে এবং α কোণের অনুরূপ কোণানুপাতের চিহ্ন নির্ণয়ের জন্য α কোণের সীমারেখা কোন পাদে অবস্থিত তাহা লক্ষ্য করিতে হইবে এবং (all, sin, tan, cos) এই নিয়মানুসারে উহার চিহ্ন ঠিক করিতে হইবে।

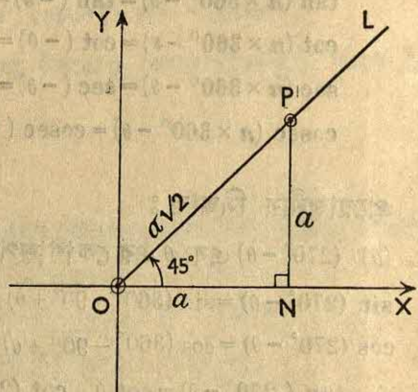
[2] $\alpha=90^\circ\times(2n+1)\pm\theta$ হইলে,

সাংখ্যমানে, α কোণের sin, cos, tan, cot, sec, cosec যথাক্রমে θ কোণের cos, sin, cot, tan, cosec, sec হইবে এবং α কোণের অনুরূপ কোণানুপাতের চিহ্ন নির্ণয়ের জন্য α কোণের সীমারেখা কোন পাদে অবস্থিত তাহা লক্ষ্য করিতে হইবে।

3·4. কতিপয় বিশেষ কোণের কোণানুপাত।

[1] 45° কোণের কোণানুপাত :

মনে করি, একটি ঘূর্ণায়মান সরলরেখা উহার প্রথম অবস্থান OX হইতে বাম আবর্তে ঘুরিতে থাকিয়া 45° এর পরিমাপ $\angle XOL$ উৎপন্ন করিল। OL এর উপরিস্থিত যে কোন বিন্দু P হইতে OX এর উপর PN লম্ব টানি। তাহা হইলে, $PN=ON$. ধরি, $ON=a$ একক; তাহা হইলে, $PN=a$ একক, এবং $OP=a\sqrt{2}$ একক; কারণ, $\angle PNO=90°$.



এখন, কোণানুপাতের সংজ্ঞা হইতে,

$$\sin 45° = \frac{PN}{OP} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\cos 45° = \frac{ON}{OP} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\therefore \tan 45° = 1; \qquad \cot 45° = 1;$$

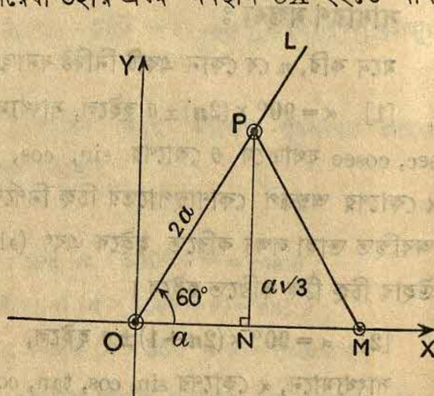
$$\sec 45° = \operatorname{cosec} 45° = \sqrt{2}.$$

[2] 30° এবং 60° এর কোণানুপাত :

(*i*) মনে করি, একটি ঘূর্ণায়মান সরলরেখা উহার প্রথম অবস্থান OX হইতে বাম আবর্তে ঘুরিতে থাকিয়া 60° এর পরিমাপ $\angle XOL$ উৎপন্ন করিল।

OL এর উপরিস্থিত যে কোন বিন্দু P হইতে OX এর উপর PN লম্ব টানি।

এখন, NX হইতে $NM=ON$ লইয়া PM যোগ করি। তাহা হইলে, PON এবং PMN ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। সুতরাং,



$$\angle PMN = \angle PON = 60°.$$

$$\therefore OM = PM = OP.$$

ধরি, $ON=a$ একক; তাহা হইলে, $OP=OM=2a$ একক; $PN=a\sqrt{3}$ একক।

এখন, কোণানুপাতের সংজ্ঞানুসারে,

$$\sin 60^\circ = \frac{PN}{OP} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 60^\circ = \frac{ON}{OP} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2};$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \sqrt{3}; \ \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\sec 60^\circ = 2; \qquad \operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

(*ii*) 60° এবং 30° পরস্পর পূরক।

$$\therefore \ \sin 30^\circ = \sin(90^\circ - 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2};$$

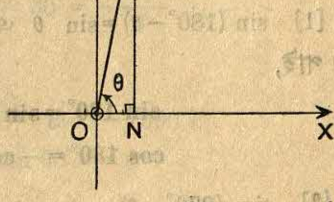
$$\cos 30^\circ = \cos(90^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\therefore \ \tan 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \ \cot 30^\circ = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3},$$

$$\sec 30^\circ = \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}; \quad \operatorname{cosec} 30^\circ = \frac{1}{\sin 30^\circ} = 2.$$

[3] 0° এবং 90° এর কোণানুপাত :

মনে করি, একটি ঘূর্ণায়মান সরলরেখা O বিন্দুর সহিত সর্বদা যুক্ত থাকিয়া উহার প্রথম অবস্থান OX হইতে বাম আবর্তে ঘুরিতে থাকিয়া $\angle XOL = \theta$ কোণ উৎপন্ন করিল, যেখানে θ, 90° এর বেশী নয় অথচ উহার খুব নিকটবর্তী। এখন, OL এর উপরিস্থিত যে কোন বিন্দু P হইতে OX এর উপর PN লম্ব টানি।



$$\therefore \ \left.\begin{aligned} \cos(90^\circ - \theta) &= \sin\theta = \frac{PN}{OP}; \\ \sin(90^\circ - \theta) &= \cos\theta = \frac{ON}{OP}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \ldots \quad (A)$$

এখন, OL সরলরেখা যতই OY এর নিকটবর্তী হইতে থাকিবে, ON ততই ছোট হইতে থাকিবে এবং চরম অবস্থায় যখন $\theta = 90^\circ$ হইবে, তখন, $ON = 0$ এবং $PN = OP$ হইবে ; এবং সেইরূপক্ষেত্রে, (A) হইতে,

$$\cos(90^\circ - 90^\circ) = \sin\ 90^\circ = \frac{OP}{OP} = 1\ ;$$

$$\sin\ (90^\circ - 90^\circ) = \cos\ 90^\circ = \frac{0}{OP} = 0\ ;$$

অর্থাৎ $\cos 0^\circ = \sin 90^\circ = 1$,

এবং $\sin 0^\circ = \cos 90^\circ = 0$.

$$\therefore\quad \tan 0^\circ = \frac{\sin 0^\circ}{\cos 0^\circ} = \frac{0}{1} = 1.$$

0, 1, 2, 3, 4 সংখ্যাগুলিকে 4 দ্বারা ভাগ করিয়া ভাগফলগুলির বর্গমূলগুলিকে অনুরূপ সংখ্যার নিচে বসাই। তাহা হইলে সেই অনুরূপ বর্গমূলগুলি যথাক্রমে $\sin 0^\circ$ $\sin 30^\circ$, $\sin 45^\circ$, $\sin 60^\circ$, $\sin 90^\circ$ অথবা $\cos 90^\circ$, $\cos 60^\circ$, $\cos 45^\circ$, $\cos 30^\circ$, $\cos 0^\circ$ এর মান হইবে। উহাদের মান নির্ণয়ের তালিকাটি নিম্নে দেওয়া হইল। $\sin\theta$ এবং $\cos\theta$ এর মান হইতে অন্যান্য কোণানুপাতগুলির মান (প্রায়শঃ) অতি সহজেই পাওয়া যাইবে।

	0	1	2	3	4
$\theta =$	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\theta =$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta =$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0

কতিপয় প্রয়োজনীয় ফলাফল :

[1] $\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$ এবং $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$ হইতে $\theta = 0^\circ$ জন্য পাই,

$$\sin 180^\circ = \sin 0^\circ = 0\ ;$$
$$\cos 180^\circ = -\cos 0^\circ = -1.$$

[2] $\sin(270^\circ - \theta) = -\cos\theta$ এবং $\cos(270^\circ - \theta) = -\sin\theta$ হইতে $\theta = 0^\circ$ এর জন্য পাই,

$$\sin 270^\circ = -\cos 0^\circ = -1,$$
$$\cos 270^\circ = -\sin 0^\circ = 0.$$

[3] 360° এবং 0° পরিমাপ কোণের সীমারেখা একই বলিয়া,

$$\sin 360° = \sin 0° = 0,$$
$$\cos 360° = \cos 0° = 1.$$

[4] n এর মান 0 (শূন্য) অথবা যে কোন পূর্ণসংখ্যা হইলে, $(\pi = 180°)$,

(i) $\sin (n\pi) = 0,$

(ii) $\cos (2n\pi) = 1,$

(iii) $\cos (2n+1)\pi = -1.$

[5] n এর মান 0 (শূন্য) অথবা যে কোন পূর্ণ সংখ্যা হইলে, $(\pi = 180°)$,

(i) $\sin (4n+1)\frac{\pi}{2} = 1,$

(ii) $\sin (4n-1)\frac{\pi}{2} = -1,$

(iii) $\cos (2n+1)\frac{\pi}{2} = 0.$

বিশেষ দ্রষ্টব্য :

(1) $\sin 120° = \sin (180° - 60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

$\cos 120° = \cos (180° - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}.$

(2) $\sin 135° = \sin (180° - 45°) = \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

$\cos 135° = \cos (180° - 45°) = -\cos 45° = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$

(3) $\sin 150° = \sin (180° - 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}.$

$\cos 150° = \cos (180° - 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

উদাহরণ 1. মান নির্ণয় কর।

(i) $\tan 300°$, (ii) $\cot (1575°)$, (iii) $\tan (-1590°)$.

(i) $\tan 300° = \tan (360° - 60°) = -\tan 60°$

$$= -\frac{\sin 60°}{\cos 60°} = -\frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = -\sqrt{3}.$$

(ii) $\cot (1575°) = \cot (4 \times 360° + 135°)$

$$= \cot 135° = = \cot (180° - 45°)$$
$$= -\cot 45° = -1.$$

(*iii*) $\tan(-1590^\circ) = -\tan(1590^\circ)$

$$= -\tan(4\times 360^\circ + 150^\circ)$$
$$= -\tan 150^\circ = -\tan(180^\circ - 30^\circ)$$
$$= +\tan 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

উদাহরণ 2. 45° অপেক্ষা ছোট ধনাত্মক কোণের কোণানুপাতে $\cot(-2075^\circ)$ কে প্রকাশ কর।

$$\cot(-2075^\circ) = \cot(-6\times 360^\circ + 85^\circ)$$
$$= \cot(85^\circ) = \cot(90^\circ - 5^\circ)$$
$$= \tan 5^\circ.$$

উদাহরণ 3. সরল কর :

$$\sin 780^\circ \cos 750^\circ + \sin(-690^\circ)\cos(-660^\circ)$$

প্রদত্ত রাশিমালা

$$= \sin(2\times 360^\circ + 60^\circ)\times\cos(2\times 360^\circ + 30^\circ)$$
$$+ \sin(-2\times 360^\circ + 30^\circ)\times\cos(-2\times 360^\circ + 60^\circ)$$
$$= \sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + +\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 1.$$

উদাহরণ 4. মান বাহির কর :—

$$\tan\frac{3\pi}{20}\ \tan\frac{4\pi}{20}\ \tan\frac{5\pi}{20}\ \tan\frac{6\pi}{20}\ \tan\frac{7\pi}{20}.$$

প্রদত্ত রাশিমালা

$$= \tan 27^\circ\ \tan 36^\circ\ \tan 45^\circ\ \tan 54^\circ\ \tan 63^\circ$$
$$= \tan 27^\circ\ \tan 36^\circ\ \tan 45^\circ\ \cot 36^\circ\ \cot 27^\circ$$
$$= (\tan 27^\circ \cot 27^\circ)\times(\tan 36^\circ \cot 36^\circ)\times\tan 45^\circ$$
$$= 1\,.\,1\,.\,1. = 1$$

উদাহরণ 5. n যে কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইলে, $\cos\left\{n\pi + (-1)^n.\frac{\pi}{3}\right\}$ এর মান বাহির কর।

(*i*) মনে করি, $n = 2k$, যেখানে k যে কোন পূর্ণসংখ্যা। তাহা হইলে,

$$\cos\left\{n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{3}\right\} = \cos\left\{2k\pi + \frac{\pi}{3}\right\}$$
$$= \cos\frac{\pi}{3} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

(*ii*) মনে করি, $n=2k+1$, যেখানে k যে কোন পূর্ণসংখ্যা। তাহা হইলে,

$$\cos\left\{n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{3}\right\}=\cos\left\{2k\pi+\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$

$$=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}$$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $=\frac{1}{2}$ অথবা $-\frac{1}{2}$.

উদাহরণ 6. θ-এর মান বাহির কর, যদি $\sin\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$,

যেখানে, $-2\pi<\theta<2\pi$.

(*i*) $\sin\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\sin 45^\circ$

$=\sin(-45^\circ)=\sin(360^\circ-45^\circ)$

$\therefore\ \theta=-45^\circ,\ 360^\circ-45^\circ$ বা, 315°.

(*ii*) $\sin\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\sin 45^\circ$

$=-\sin(180^\circ-45^\circ)=-\sin(135^\circ)$

$=\sin(-135^\circ)=\sin(360^\circ-135^\circ)$

$\therefore\ \theta=-135^\circ;\ 360^\circ-135^\circ$, বা, 225°.

$\therefore$ নির্ণেয় উত্তর : $\theta=-45^\circ,\ -135^\circ,\ 225^\circ,\ 315^\circ$.

উদাহরণ 7. সমাধান কর :—

$2\sec^2\theta-\tan^2\theta=5,\ 0^\circ<\theta<360^\circ$.

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই, $2(1+\tan^2\theta)-\tan^2\theta=5$;

বা, $\tan^2\theta=3$, $\therefore\ \tan\theta=\pm\sqrt{3}$.

(*i*) $\tan\theta=+\sqrt{3}$ হইলে, θ পরিমাপ কোণের সীমারেখা প্রথম পাদে অথবা তৃতীয় পাদে থাকিবে এবং তখন,

$\tan\theta=+\sqrt{3}=\tan 60^\circ=\tan(180^\circ+60^\circ)$

$\therefore\ \theta=60^\circ$ বা, 240°.

(*ii*) $\tan\theta=-\sqrt{3}$ হইলে, θ পরিমাপ কোণের সীমারেখা দ্বিতীয় পাদে অথবা চতুর্থ পাদে থাকিবে এবং তখন,

$\tan\theta=-\sqrt{3}=-\tan 60^\circ$

$=\tan(-60^\circ)=\tan(360^\circ-60^\circ)$

বা, $=\tan(180^\circ-60^\circ)$. $\therefore\ \theta=120^\circ$ বা, 300°.

$\therefore$ θ এর নির্ণেয় মান $=60^\circ,\ 120^\circ,\ 240^\circ,\ 300^\circ$.

প্রশ্নমালা 3

1. মান নির্ণয় কর :—

(i) $\sin 150°$, (ii) $\cos 300°$, (iii) $\tan 840°$, (iv) $\sec 780°$,
(v) $\cos(-210°)$, (vi) $\tan(-300°)$, (vii) $\operatorname{cosec}(-1140°)$,
(viii) $\cot(-1485°)$, (ix) $\sec(-1230°)$ (x) $\tan\frac{17\pi}{3}$,
(xi) $\cot\left(\frac{-11\pi}{4}\right)$; (xii) $\operatorname{cosec}\left(\frac{-17\pi}{3}\right)$.

2. সরল কর :—

(i) $\sin(780°)\cos(390°)+\sin(-330°)\cos(-300°)$
(ii) $\sin(420°)\cos(390°)+\cos(-300°)\sin(-330°)$, **(H. S. 1962)**
(iii) $\sin^2 60°+\cos^2 150°+\tan^2 120°+\cos 180°-\tan 135°$
(iv) $\sin 300°+\tan 45°-4\sin^2 120°+2\cos^2 135°+\sec^2 180°$
[H. S. 1961]
(v) $\sin^2\frac{\pi}{4}+\sin^2\frac{3\pi}{4}+\sin^2\frac{5\pi}{4}+\sin^2\frac{7\pi}{4}$
(vi) $\tan 25°\tan 35°\tan 45°\tan 55°\tan 65°$
(vii) $\tan\frac{\pi}{20}\tan\frac{3\pi}{20}\tan\frac{5\pi}{20}\tan\frac{7\pi}{20}\tan\frac{9\pi}{20}$.

3. মান বাহির কর :—

(i) $\sin\left\{n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}\right\}$; (ii) $\cos\left\{2n\pi\pm\frac{\pi}{3}\right\}$;
(iii) $\tan\left\{\frac{n\pi}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{4}\right\}$; (iv) $\operatorname{cosec}\left\{\frac{n\pi}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{6}\right\}$

4. সরল কর :—

$$\frac{\cos(90°+\theta)\sec(-\theta)\tan(180°-\theta)}{\sec(360°+\theta)\sin(180°+\theta)\cot(90°-\theta)}.$$

5. সরল কর :—

$$\frac{\sin^3(\pi-\theta)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}\;\frac{\tan^4\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)}{\operatorname{cosec}^2(\pi+\theta)}\;\frac{\sec^2(\pi-\theta)}{\sin(\pi+\theta)};$$

এবং মান নির্ণয় কর যদি $\theta=240°$ হয়।

6. $\tan\theta=\frac{5}{12}$ এবং $\cos\theta$ এর মান ঋণাত্মক হইলে,

$$\frac{\sin\theta+\cos(-\theta)}{\sec\theta+\tan(-\theta)}$$ এর মান কত ?

7. 45° অপেক্ষা ছোট ধনাত্মক কোণের কোণানুপাতে নিম্নলিখিতগুলিকে প্রকাশ কর :

(i) $\cos(1145^c)$, (ii) $\tan(-1054°)$,

(iii) $\operatorname{cosec}(-1491°)$, (iv) $\sec\dfrac{35\pi}{9}$.

8. θ এর মান নির্ণয় কর :

(i) $\tan\theta = -\sqrt{3},\ 270° < \theta < 360°$

(ii) $\sin\theta = -\frac{1}{2},\ 450° < \theta < 590°$

(iii) $\sec\theta = -2,\ -2\pi < \theta < 2\pi$.

9. θ-এর মান বাহির কর, $(0° < \theta < 360°)$:

(i) $2\tan^2\theta + \sec^2\theta = 2$

(ii) $2\cos^2\theta + \sin\theta = 2$

(iii) $\cot\theta + \tan\theta = 2\sec\theta$.

10. ত্রিভুজের কোণগুলির পরিমাপ A, B, C হইলে দেখাও যে,

(i) $\sin(A+B) - \cos C = \cos(A+B) + \sin C$

(ii) $\tan(A+B) + \tan(B+C) + \tan(C+A)$
$= \tan(\pi - A) + \tan(2\pi - B) + \tan(3\pi - C)$

11. চতুর্ভুজের কোণগুলির পরিমাপ A, B, C, D হইলে দেখাও যে,

(i) $\sin(A+B) + \sin(C+D) = 0$

(ii) $\cos\frac{1}{2}(A+C) + \cos\frac{1}{2}(B+D) = 0$

12. একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের কোণগুলির পরিমাপ A, B, C, D হইলে দেখাও যে,

(i) $\cos A + \cos B + \cos C + \cos D = 0$

(ii) $\tan A + \tan B + \tan C + \tan D = 0$

13. $5\sin^2\theta + 3\cos^2\theta = 4$ এবং θ এর মান $\pi/2$ এবং π এর মধ্যবর্তী হইলে $\sin 2\theta$ এর মান বাহির কর।

14. জ্যামিতিক চিত্রের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, A এর সকল মানের জন্য

(i) $\cos(180° + A) = -\cos A$, (ii) $\tan(90° + A) = -\cot A$

15. $0° < \theta < 90°$ হইলে $\cos(90° + \theta)$ এর মান কেবল বিবৃত কর এবং ইহার সত্যতা প্রমাণ কর।

$\theta = 100°$ হইলে, $\sin\theta + \cos\theta$ এর চিহ্ন কি হইতে পারে ? যুক্তি দেখাও।

চতুর্থ অধ্যায়

মিশ্র কোণের কোণানুপাত

(Trigonometrical ratios of Compound angles)

4–1. ***A* এবং *B* যে কোন ত্রিকোণমিতিক কোণ হইলে,**

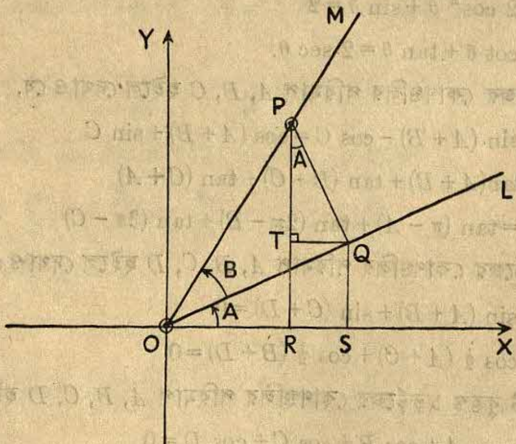
[a] (*i*) $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

(*ii*) $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

[b] (*i*) $\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$

(*ii*) $\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$

[*a*] মনে করি, A, B এবং $A+B$ ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ।



মনে করি, একটি ঘূর্ণায়মান সরলরেখা উহার প্রথম অবস্থান OX হইতে বাম আবর্তে ঘুরিতে থাকিয়া A এর পরিমাপ $X\widehat{O}L$ উৎপন্ন করিয়াছে; এবং উহা বাম আবর্তে আরও ঘুরিয়া B এর পরিমাপ $L\widehat{O}M$ উৎপন্ন করিয়াছে। তাহা হইলে, $X\widehat{O}M=A+B$.

এখন, OM এর উপর যে কোন একটি বিন্দু P লইয়া, OL এর উপর PQ লম্ব টানি। তারপর, PR এবং QS, OX এর উপর লম্ব টানি, এবং পরে PR এর উপর QT লম্ব টানি।

তাহা হইলে,

$$T\widehat{P}Q=90^\circ-P\widehat{Q}T=T\widehat{Q}O=Q\widehat{O}X=A.$$

সুতরাং,

$$\sin(A+B)=\sin\widehat{POR}=\frac{PR}{OP}=\frac{TR+PT}{OP}$$

$$=\frac{QS+PT}{OP}=\frac{QS}{OP}+\frac{PT}{OP}$$

$$=\frac{QS}{OQ}\cdot\frac{OQ}{OP}+\frac{PT}{PQ}\cdot\frac{PQ}{OP}$$

$$=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

আবার,

$$\cos(A+B)=\cos\widehat{POR}=\frac{OR}{OP}=\frac{OS-RS}{OP}$$

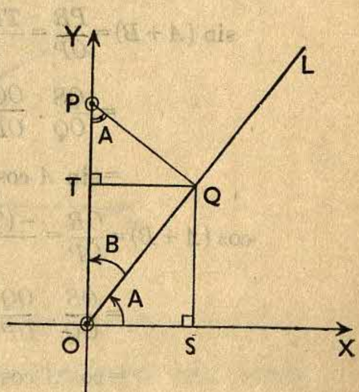
$$=\frac{OS-TQ}{OP}=\frac{OS}{OP}-\frac{TQ}{OP}$$

$$=\frac{OS}{OQ}\cdot\frac{OQ}{OP}-\frac{TQ}{PQ}\cdot\frac{PQ}{OP}$$

$$=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

দ্রষ্টব্য : (1) মনে করি, A, B ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ, কিন্তু $A+B=90^\circ$;

পাশ্ববর্তী চিত্রে, $\widehat{XOL}=A$; $\widehat{LOY}=B$; $\widehat{XOY}=90^\circ$;



PQ, QT, QS যথাক্রমে, OL, OY, OX এর উপর লম্ব।

$$\widehat{QPT}=90^\circ-\widehat{PQT}=\widehat{TQO}=\widehat{QOS}=A.$$

$$\therefore\ \sin(A+B)=\sin 90^\circ=1=\frac{OP}{OP}$$

$$=\frac{OT+PT}{OP}=\frac{QS+PT}{OP}$$

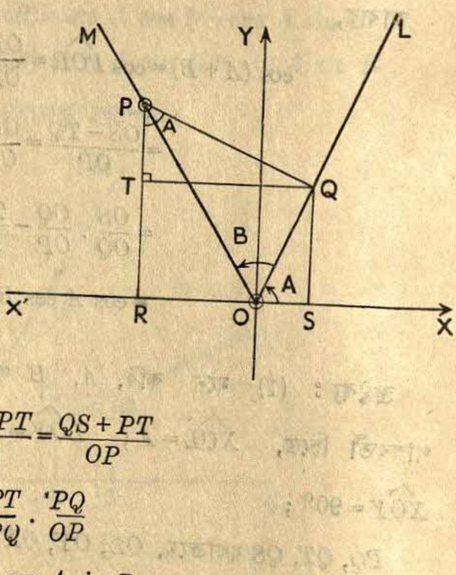
$$=\frac{QS}{OQ}\cdot\frac{OQ}{OP}+\frac{PT}{PQ}\cdot\frac{PQ}{OP}$$

$$=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

$$\cos(A+B)=\cos 90^\circ=0=\frac{0}{OP}$$
$$=\frac{OS-OS}{OP}=\frac{OS-QT}{OP}$$
$$=\frac{OS}{OQ}\cdot\frac{OQ}{OP}-\frac{QT}{PQ}\cdot\frac{PQ}{OP}$$
$$=\cos A\cos B-\sin A\sin B.$$

(2) মনে করি, A, B ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ কিন্তু $A+B>90^\circ$.

পার্শ্ববর্তী চিত্রে, $\widehat{LOX}=A$; $\widehat{LOM}=B$; PQ, PR যথাক্রমে OL ও OX'-এর উপর লম্ব; আবার, QS ও QT যথাক্রমে OX ও PR এর উপর লম্ব। এখানে, OR ঋণাত্মক; সুতরাং,



$OR=-(RS-OS)=-(TQ-OS)$.

$$\widehat{TPQ}=90^\circ-\widehat{PQT}$$
$$=\widehat{TQO}=\widehat{QOS}=A.$$

$$\sin(A+B)=\frac{PR}{OP}=\frac{TR+PT}{OP}=\frac{QS+PT}{OP}$$
$$=\frac{QS}{OQ}\cdot\frac{OQ}{OP}+\frac{PT}{PQ}\cdot\frac{PQ}{OP}$$
$$=\sin A\cos B+\cos A\sin B;$$

$$\cos(A+B)=\frac{OR}{OP}=\frac{-(TQ-OS)}{OP}=\frac{OS}{OP}-\frac{TQ}{OP}$$
$$=\frac{OS}{OQ}\cdot\frac{OQ}{OP}-\frac{TQ}{PQ}\cdot\frac{PQ}{OP}$$
$$=\cos A\cos B-\sin A\sin B.$$

মন্তব্য : এইভাবে A এবং B-এর যে কোন মানের জন্য চিত্রের মাধ্যমে $\sin(A+B)$ এবং $\cos(A+B)$-এর সূত্রদ্বয় সংস্থাপন করা যাইবে।

দ্রষ্টব্য : মনে করি A_1 এবং B_1 ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ এবং $A_1+B_1<90^\circ$,

(i) ধরি, $A=90^\circ+A_1$; $B=B_1$

$$\therefore \quad \sin(A+B)=\sin(90^\circ+A_1+B_1)=\cos(A_1+B_1)$$
$$=\cos A_1 \cos B_1-\sin A_1 \sin B_1$$
$$=\sin(90^\circ+A_1)\cos B_1+\cos(90^\circ+A_1)\sin B_1$$
$$=\sin A \cos B+\cos A \sin B$$
$$\cos(A+B)=\cos(90^\circ+A_1+B_1)=-\sin(A_1+B_1)$$
$$=-\sin A_1 \cos B_1-\cos A_1 \sin B_1$$
$$=\cos(90^\circ+A_1)\cos B_1-\sin(90^\circ+A_1)\sin B_1$$
$$=\cos A \cos B-\sin A \sin B.$$

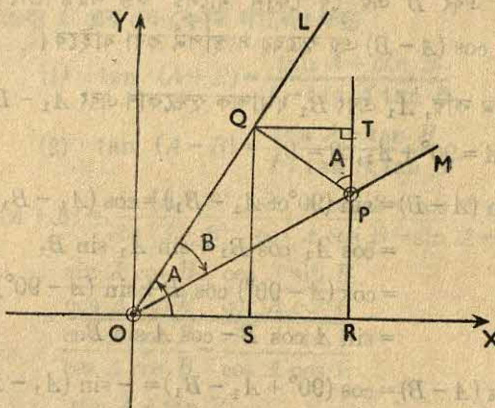
এইভাবে, (ii) $A=A_1,\ B=90^\circ+B_1,$

(iii) $A=90^\circ+A_1,\ B=90^\circ+B_1,$

(iv) $A=180^\circ+A_1,\ B=90^\circ+B_1,$ ইত্যাদি,

অথবা, (v) $A=-A_1,\ B=B_1$ ইত্যাদি, বসাইলে একই নিয়মে সূত্রাবলী সিদ্ধ হয়।

(b) মনে করি, A এবং B ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ এবং $A>B$.



মনে করি, একটি ঘূর্ণায়মান সরলরেখা উহার প্রথম অবস্থান OX হইতে বাম-আবর্তে ঘুরিতে থাকিয়া A এর পরিমাপ $\widehat{XOL}$ উৎপন্ন করিয়াছে ; এবং তারপর ডান আবর্তে ঘুরিয়া B এর পরিমাপ $\widehat{LOM}$ উৎপন্ন করিয়াছে। তাহা হইলে, $\widehat{XOM}=A-B$. এখন OM এর উপর যে কোন একটি বিন্দু P লইয়া OL এর উপর PQ লম্ব টানি ; তারপর PR এবং QS, OX এর উপর লম্ব টানি এবং পরে বর্ধিত, RP এর উপর, QT লম্ব টানি। তাহা হইলে,

$$\widehat{TPQ}=90^\circ-\widehat{PQT}=\widehat{LQT}=\widehat{LOX}=A.$$

সুতরাং,

$$\sin(A-B)=\sin\widehat{POR}=\frac{PR}{OP}=\frac{TR-PT}{OP}$$
$$=\frac{QS-PT}{OP}=\frac{QS}{OP}-\frac{PT}{OP}$$
$$=\frac{QS}{OQ}.\frac{OQ}{OP}-\frac{PT}{PQ}.\frac{PQ}{OP}$$
$$=\sin A\cos B-\cos A.\sin B.$$

আবার,

$$\cos(A-B)=\cos\widehat{POR}=\frac{OR}{OP}=\frac{OS+SR}{OP}=\frac{OS}{OP}+\frac{QT}{OP}$$
$$=\frac{OS}{OQ}\cdot\frac{OQ}{OP}+\frac{QT}{PQ}\cdot\frac{PQ}{OP}$$
$$=\cos A\cos B+\sin A\sin B.$$

মন্তব্য : A এবং B এর যে কোন মানের জন্য অনুরূপভাবে চিত্রের মাধ্যমে $\sin(A-B)$ এবং $\cos(A-B)$ এর সূত্রদ্বয় সংস্থাপন করা যাইবে।

দ্রষ্টব্য : মনে করি, A_1 এবং B_1 ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ এবং $A_1-B_1<90°$.

(i) ধরি, $A=90°+A_1$, $B=B_1$

$$\therefore\ \sin(A-B)=\sin(90°+A_1-B_1)=\cos(A_1-B_1)$$
$$=\cos A_1\cos B_1+\sin A_1\sin B_1$$
$$=\cos(A-90°)\cos B+\sin(A-90°)\sin B$$
$$=\sin A\cos B-\cos A\sin B.$$

$$\cos(A-B)=\cos(90°+A_1-B_1)=-\sin(A_1-B_1)$$
$$=-\sin A_1\cos B_1+\cos A_1\sin B_1$$
$$=-\sin(A-90°)\cos B+\cos(A-90°)\sin B$$
$$=\cos A\cos B+\sin A\sin B.$$

অনুরূপভাবে, (ii) $A=A_1$, $B=90°+B_1$ (iii) $A=90°+A_1$, $B=90°+B_1$; (iv) $A=180°+A_1$, $B=90°+B_1$ ইত্যাদি,

অথবা, (v) $A=-A_1$, $B=B_1$ ইত্যাদি, মান লইয়া একই নিয়মে সূত্রদ্বয় সংস্থাপন করা যাইবে।

4-2. A এবং B এর যে কোন মানের জন্য

(1) $\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2 A-\sin^2 B$

(2) $\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2 A-\sin^2 B.$
$=\cos^2 A+\cos^2 B-1.$

(1) $\sin(A+B)\sin(A-B)$

$=(\sin A\cos B+\cos A\sin B)(\sin A\cos B-\cos A\sin B)$

$=\sin^2 A\cos^2 B-\cos^2 A\sin^2 B$

$=\sin^2 A.(1-\sin^2 B)-(1-\sin^2 A).\sin^2 B$

$=\sin^2 A-\sin^2 B=\cos^2 B-\cos^2 A.$

(2) $\cos(A+B)\cos(A-B)$

$=(\cos A\cos B-\sin A\sin B)(\cos A\cos B+\sin A\sin B)$

$=\cos^2 A\cos^2 B-\sin^2 A\sin^2 B$

$=\cos^2 A.(1-\sin^2 B)-(1-\cos^2 A).\sin^2 B$

$=\cos^2 A-\sin^2 B=\cos^2 B-\sin^2 A=\cos^2 A+\cos^2 B-1.$

4-3. A এবং B এর যে কোন মানের জন্য

$$(1)\quad \tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$

$$(2)\quad \tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}.$$

(1) $\tan(A+B)=\dfrac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}=\dfrac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B-\sin A\sin B}$

$$=\frac{\dfrac{\sin A\cos B}{\cos A\cos B}+\dfrac{\cos A\sin B}{\cos A\cos B}}{\dfrac{\cos A\cos B}{\cos A\cos B}-\dfrac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}}$$

$$=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$

(2) $\tan(A-B)=\dfrac{\sin(A-B)}{\cos(A-B)}=\dfrac{\sin A\cos B-\cos A\sin B}{\cos A\cos B+\sin A\sin B}$

$$=\frac{\dfrac{\sin A\cos B}{\cos A\cos B}-\dfrac{\cos A\sin B}{\cos A\cos B}}{\dfrac{\cos A\cos B}{\cos A\cos B}+\dfrac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}}$$

$$=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$$

4-4. A এবং B এর যে কোন মানের জন্য

$$(1)\quad \cot(A+B)=\frac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B}$$

$$(2)\quad \cot(A-B)=\frac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}$$

(1) $\cot(A+B)=\dfrac{\cos(A+B)}{\sin(A+B)}=\dfrac{\cos A\cos B-\sin A\sin B}{\sin A\cos B+\cos A\sin B}$

ডান পক্ষের লব এবং হরকে $\sin A\sin B$ দ্বারা ভাগ করিয়া পাই

$$\cot(A+B)=\frac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B}.$$

(2) $\cot(A-B)=\dfrac{\cos(A-B)}{\sin(A-B)}=\dfrac{\cos A\cos B+\sin A\sin B}{\sin A\cos B-\cos A\sin B}.$

ডান পক্ষের লব এবং হরকে $\sin A\sin B$ দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

$$\cot(A-B)=\frac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}.$$

4-5. A, B, C এর যে কোন মানের জন্য

$$\tan(A+B+C)=\frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan A\tan B-\tan B\tan C-\tan C\tan A}$$

$$\tan(A+B+C)=\tan\{A+(B+C)\}$$

$$=\frac{\tan A+\tan(B+C)}{1-\tan A\tan(B+C)}$$

$$=\frac{\tan A+\dfrac{\tan B+\tan C}{1-\tan A\tan C}}{1-\tan A\times\dfrac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}}$$

$$=\frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan A\tan B-\tan B\tan C-\tan C\tan A}$$

4-6. (i) $\sin 15^\circ$; $\cos 15^\circ$; $\tan 15^\circ$; এবং (ii) $\sin 75^\circ$; $\cos 75^\circ$; $\tan 75^\circ$ এর মান নির্ণয়।

(*i*) $\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ$

$$=\frac{1}{\sqrt2}\cdot\frac{\sqrt3}{2}-\frac{1}{\sqrt2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt3-1}{2\sqrt2}$$

$$\therefore\quad \sin 15^\circ=\frac{\sqrt3-1}{2\sqrt2}.$$

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad \mathbf{\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}$$

$$\tan 15^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ}$$

$$= \frac{1 - 1/\sqrt{3}}{1 + 1.1/\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2 - \sqrt{3}.$$

$$\therefore \quad \mathbf{\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}.}$$

(ii) $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad \mathbf{\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}.$$

$$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad \mathbf{\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}$$

$$\tan 75^\circ = \tan(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ}$$

$$= \frac{1 + 1/\sqrt{3}}{1 - 1.1/\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = 2 + \sqrt{3}$$

$$\therefore \quad \mathbf{\tan 75^\circ = 2 + \sqrt{3}.}$$

উদাহরণ 1. দেখাও যে,

$$\sin A \sin(B - C) + \sin B \sin(C - A) + \sin C \sin(A - B) = 0.$$

বাম পক্ষ

$$= \sin A \times \{\sin B \cos C - \cos B \sin C\}$$
$$+ \sin B \times \{\sin C \cos A - \cos C \sin A\}$$
$$+ \sin C \times \{\sin A \cos B - \cos A \sin B\}$$
$$= \cos A \times \{\sin B \sin C - \sin C \sin B\}$$
$$+ \cos B \times \{-\sin A \sin C + \sin C \sin A\}$$
$$+ \cos C \times \{\sin A \sin B - \sin B \sin A\}$$
$$= \cos A \times 0 + \cos B \times 0 + \cos C \times 0 = 0.$$

উদাহরণ 2. দেখাও যে,

$$\cot 2A + \tan A = \operatorname{cosec} 2A.$$

$$\cot 2A + \tan A = \frac{\cos 2A}{\sin 2A} + \frac{\sin A}{\cos A}$$

$$= \frac{\cos 2A \cos A + \sin 2A \sin A}{\sin 2A \cos A}$$

$$= \frac{\cos (2A - A)}{\sin 2A \cos A} = \frac{\cos A}{\sin 2A \cos A} = \operatorname{cosec} 2A.$$

উদাহরণ 3. দেখাও যে,

$$\cot (45° - A) = \frac{\cot A + 1}{\cot A - 1}.$$

$$\cot (45° - A) = \frac{\cos (45° - A)}{\sin (45° - A)}$$

$$= \frac{\cos 45° \cos A + \sin 45° \sin A}{\sin 45° \cos A - \cos 45° \sin A}$$

$$= \frac{\cos A + \sin A}{\cos A - \sin A}, \quad [\because \sin 45° = \cos 45°]$$

$$= \frac{\cot A + 1}{\cot A - 1}.$$

উদাহরণ 4. দেখাও যে,

$$\frac{\cos 8° + \sin 8°}{\cos 8° - \sin 8°} = \tan 53°.$$

$$\frac{\cos 8° + \sin 8°}{\cos 8° - \sin 8°} = \frac{1 + \tan 8°}{1 - \tan 8°}$$

$$= \frac{\tan 45° + \tan 8°}{1 - \tan 45° \tan 8°}$$

$$= \tan (45° + 8°) = \tan 53°.$$

উদাহরণ 5. দেখাও যে,

$$\tan 10° + \tan 35° + \tan 10° \tan 35° = 1$$

$\because$ $\tan (45°) = 1$;

$\therefore$ $\tan (10° + 35°) = 1$.

বা, $\dfrac{\tan 10° + \tan 35°}{1 - \tan 10° \tan 35°} = 1,$

বা, $\tan 10° + \tan 35° = 1 - \tan 10° \tan 35°$;

$\therefore$ $\tan 10° + \tan 35° + \tan 10° \tan 35° = 1.$

উদাহরণ 6. দেখাও যে,

$$\sin 105^\circ + \cos 105^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\sin 105^\circ + \cos 105^\circ$$
$$= \sin (90^\circ + 15^\circ) + \cos (90^\circ + 15^\circ)$$
$$= \cos 15^\circ - \sin 15^\circ$$
$$= \cos (45^\circ - 30^\circ) - \sin (45^\circ - 30^\circ)$$
$$= \{\cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ\}$$
$$- \{\sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ\}$$
$$= \left\{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}\right\} - \left\{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}\right\}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

উদাহরণ 7. $A + B + C = \pi$ এবং $\cos A = \cos B \cos C$ হইলে দেখাও যে, $\tan B + \tan C = \tan A$.

$$\tan B + \tan C = \frac{\sin B}{\cos B} + \frac{\sin C}{\cos C}$$
$$= \frac{\sin B \cos C + \cos B \sin C}{\cos B \cos C}$$
$$= \frac{\sin (B + C)}{\cos A} = \frac{\sin (\pi - A)}{\cos A}$$
$$= \frac{\sin A}{\cos A} = \tan A.$$

উদাহরণ 8. $a \cos (x + \alpha) = b \cos (x - \alpha)$ হইলে,

দেখাও যে, $\tan x = \dfrac{a - b}{a + b} \cot \alpha$.

$a \cos (x + \alpha) = b \cos (x - \alpha)$ হইতে পাই,

$a\{\cos x \cos \alpha - \sin x \sin \alpha\} = b\{\cos x \cos \alpha + \sin x \sin \alpha\}$,

বা, $(a - b) \cos x \cos \alpha = (a + b) \sin x \sin \alpha$,

বা, $(a - b) \cot \alpha = (a + b) \tan x$;

$\therefore \quad \tan x = \dfrac{a - b}{a + b} \cot \alpha$.

উদাহরণ 9. $1+\cos\alpha\cos\beta=\sin\alpha\sin\beta$ হইলে দেখাও যে, $1+\cot\alpha\tan\beta=0$.

$1+\cos\alpha\cos\beta=\sin\alpha\sin\beta$ হইতে পাই,

$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=-1$;

বা, $\cos(\alpha+\beta)=-1$; $\quad\therefore\ \sin(\alpha+\beta)=0$.

এখন, $1+\cot\alpha\tan\beta=1+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta}$$

$$=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}=0.$$

উদাহরণ 10. $\cos(\alpha-\beta)+\cos(\beta-\gamma)+\cos(\gamma-\alpha)=-3/2$ হইলে দেখাও যে, $\Sigma\cos\alpha=0$ এবং $\Sigma\sin\alpha=0$.

$\cos(\alpha-\beta)+\cos(\beta-\gamma)+\cos(\gamma-\alpha)=-3/2$ হইতে পাই,

$$2\{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\}+2\{\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\}+2\{\cos\gamma\cos\alpha+\sin\gamma\sin\alpha\}+3=0.$$

বা, $2\Sigma\cos\alpha\cos\beta+2\Sigma\sin\alpha\sin\beta+3=0$;

বা, $2\Sigma\cos\alpha\cos\beta+2\Sigma\sin\alpha\sin\beta+(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+(\sin^2\beta+\cos^2\beta)+(\sin^2\gamma+\cos^2\gamma)=0$;

বা, $(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2+(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^2=0$

$\therefore\ \Sigma\sin\alpha=0$, এবং, $\Sigma\cos\alpha=0$.

উদাহরণ 11. প্রমাণ কর যে,

(*i*) $\mathbf{\sin(A+B+C)}$

$\mathbf{=\cos A\cos B\cos C(\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C)}$

(*ii*) $\mathbf{\cos(A+B+C)}$

$\mathbf{=\cos A\cos B\cos C(1-\tan B\tan C-\tan C\tan A-\tan A\tan B)}$.

(*i*) এখানে, $\sin(A+B+C)=\sin\{A+(B+C)\}$

$=\sin A\cos(B+C)+\cos A\sin(B+C)$

$=\sin A(\cos B\cos C-\sin B\sin C)+\cos A(\sin B\cos C+\cos B\sin C)$

$=\cos A\cos B\cos C\left(\frac{\sin A}{\cos A}-\frac{\sin A\sin B\sin C}{\cos A\cos B\cos C}+\frac{\sin B}{\cos B}+\frac{\sin C}{\cos C}\right)$

$=\cos A\cos B\cos C(\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C)$.

(ii) এখানে, $\cos(A+B+C)=\cos\{A+(B+C)\}$

$$=\cos A\cos(B+C)-\sin A\sin(B+C)$$

$$=\cos A(\cos B\cos C-\sin B\sin C)$$

$$-\sin A(\sin B\cos C+\cos B\sin C)$$

$$=\cos A\cos B\cos C\left\{1-\frac{\sin B\sin C}{\cos B\cos C}-\frac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}-\frac{\sin A\sin C}{\cos A\cos C}\right\}$$

$$=\cos A\cos B\cos C(1-\tan B\tan C-\tan C\tan A-\tan A\tan B).$$

প্রশ্নমালা 4

1. মান নির্ণয় কর :—

(i) $\sin 17^\circ 36'\cos 12^\circ 24'+\cos 17^\circ 36'\sin 12^\circ 24'$;

(ii) $\cos 67^\circ 20'\cos 7^\circ 20'+\sin 67^\circ 20'\sin 7^\circ 20'$;

(iii) $\cos 50^\circ 23'\sin 39^\circ 37'+\cos 39^\circ 37'\sin 50^\circ 23'$.

2. দেখাও যে,

(i) $\cos A\sin(B-C)+\cos B\sin(C-A)+\cos C\sin(A-B)=0$;

(ii) $\sin(A+B)\sin(A-B)+\sin(B+C)\sin(B-C)+\sin(C+A)\sin(C-A)=0$;

(iii) $\sin(A+B)\sin(A-B)+\cos(A+B)\cos(A-B)=1-2\sin^2 B$, [H. S. Sup. 1973]

(iv) $\cos(A+B)\sin(A-B)+\cos(B+C)\sin(B-C)+\cos(C+A)\sin(C-A)=0$;

(v) $\cos(\alpha+\beta)\sin\beta+\cos(\alpha-\gamma)\sin\gamma=\sin(\alpha+\beta)\cos\beta-\sin(\alpha-\gamma)\cos\gamma$; [H. S. 1973]

(vi) $\dfrac{\sin(B-C)}{\sin B\sin C}+\dfrac{\sin(C-A)}{\sin C\sin A}+\dfrac{\sin(A-B)}{\sin A\sin B}=0$;

(vii) $\dfrac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B}+\dfrac{\sin(B-C)}{\cos B\cos C}+\dfrac{\sin(C-A)}{\cos C\cos A}=0$; [P. U. 1965]

3. দেখাও যে,

(i) $1+\tan A\tan 2A=\sec 2A$; (ii) $\cot A-\cot 2A=\operatorname{cosec} 2A$;

(iii) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}$; (iv) $\sec(\alpha+\beta)=\dfrac{\sec\alpha\sec\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$;

(v) $\tan(\alpha+\beta)\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}$.

(vi) $\tan(45^\circ + A) = \dfrac{\cos A + \sin A}{\cos A - \sin A}$;

(vii) $\cot(45^\circ - \theta) = \dfrac{\cot\theta + 1}{\cot\theta - 1}$. [C. U. 1943]

4. দেখাও যে,

(i) $\tan 20^\circ + \tan 25^\circ + \tan 20^\circ \tan 25^\circ = 1$;

(ii) $(1 - \tan 25^\circ)\tan 70^\circ = 1 + \tan 25^\circ$;

(iii) $\cot 20^\circ \cot 25^\circ - \cot 20^\circ - \cot 25^\circ = 1$;

(iv) $\tan(45^\circ + \theta)\tan(45^\circ - \theta) = 1$;

(v) $\cos A + \cos(120^\circ + A) + \cos(120^\circ - A) = 0$ **[C. Int. 1953]**

(vi) $\cos^2\left(A - \dfrac{\pi}{3}\right) + \cos^2 A + \cos^2\left(A + \dfrac{\pi}{3}\right) = 3/2$;

(vii) $\cos^2(A + 120^\circ) + \cos^2 A + \cos^2(120^\circ - A) = 3/2$. **[H. S. 1973]**

5. দেখাও যে,

(i) $\dfrac{\cos 8^\circ + \sin 8^\circ}{\cos 8^\circ - \sin 8^\circ} = \cot 37^\circ$,

(ii) $\tan 70^\circ = 2\tan 50^\circ + \tan 20^\circ$,

(iii) $\tan 20^\circ \tan 40^\circ \tan 80^\circ = \tan 60^\circ$,

(iv) $\sin 65^\circ + \cos 65^\circ = \sqrt{2}\cos 20^\circ$

(v) $\sin 18^\circ + \cos 18^\circ = \sqrt{2}\cos 27^\circ$.

6. কোন tables ব্যবহার না করিয়া দেখাও যে,

$\sin 10^\circ \sin 50^\circ + \sin 50^\circ \sin 250^\circ + \sin 250^\circ \sin 10^\circ = -\frac{3}{4}$.

[Joint Ent. Ex. 1971]

7. দেওয়া আছে, A এবং B ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ ;

(a) $\sin A = \frac{4}{5}$ এবং $\cos B = \frac{12}{13}$ হইলে,

(i) $\sin(A + B)$ এবং (ii) $\cos(A - B)$ এর মান বাহির কর।

(b) $\tan A = \frac{5}{12}$ এবং $\tan B = \frac{9}{40}$ হইলে,

(i) $\sin(A - B)$ এবং (ii) $\sec(A + B)$ এর মান বাহির কর।

8. $\sec x = \frac{17}{8}$ এবং $\operatorname{cosec} y = \frac{5}{4}$ হইলে,

(i) $\sec(x + y)$ এবং (ii) $\cot(x - y)$ এর মান নির্ণয় কর।

9. যদি $\sin A = -\frac{4}{5}$, $\pi < A < 3\pi/2$; এবং $\cos B = -\frac{24}{25}$, $\pi/2 < B < \pi$, হইলে, (i) $\cos(A + B)$ এবং (ii) $\sin(A - B)$ এর মান বাহির কর।

10. দেওয়া আছে θ একটি স্থূলকোণের পরিমাপ এবং ϕ একটি সূক্ষ্মকোণের পরিমাপ। যদি $\sin\theta = 3/5$ এবং $\tan\phi = 5/12$ হয়, তবে $\sin(\theta+\phi)$ এর মান বাহির কর। **[Joint Ent. Ex. 1970]**

11. (*i*) $A = 10^\circ$ এবং $B = 20^\circ$ হইলে মান নির্ণয় কর :

$$\cos(60^\circ - A)\cos(30^\circ - B) - \sin(60^\circ - A)\sin(30^\circ - B).$$

(*ii*) $x = 30^\circ$ হইলে মান বাহির কর :

$$\sin(n+1)x\cos(n-1)x - \cos(n+1)x\sin(n-1)x.$$

12. $A + B + C = \pi$ হইলে, দেখাও যে,

$$\frac{\cos A}{\sin B\sin C} + \frac{\cos B}{\sin C\sin A} + \frac{\cos C}{\sin A\sin B} = 2$$ **(C.U. Int 1949)**

13. $A + B + C = 0$ অথবা π হইলে, দেখাও যে,

$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B\tan C$ **[C.U. Int. 1951]**

14. $A + B = 45^\circ$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$(1 + \tan A)(1 + \tan B) = 2.$

এইখান হইতে $\tan 22\frac{1}{2}^\circ$ এর মান বাহির কর।

[Joint Ent Ex. 1973]

15. $\theta + \phi + \psi = 90^\circ$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$\cot\theta + \cot\phi + \cot\psi = \cot\theta\cot\phi\cot\psi.$

এখানে, $\theta = 15^\circ$ এবং $\phi = 30^\circ$ লইয়া $\cot 15^\circ$ এর মান বাহির কর।

16. $A + B + C = \pi$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{\tan A}{\tan B\tan C} + \frac{\tan B}{\tan C\tan A} + \frac{\tan C}{\tan A\tan B}$$
$$= \tan A + \tan B + \tan C - 2(\cot A + \cot B + \cot C).$$

[Joint Ent. Ex. 1971]

17. $1 + \sin\alpha\sin\beta = \cos\alpha\cos\beta$ হইলে দেখাও যে,

$1 + \cot\alpha\tan\beta = 0.$

18. $\sqrt{2}\cos A = \cos B + \cos^3 B$ এবং

$\sqrt{2}\sin A = \sin B - \sin^3 B$ হইলে, দেখাও যে,

$\sin(A - B) = \pm\frac{1}{3}.$ **[Joint Ent Ex. 1974]**

19. দেখাও যে,

$$\sin(\alpha - \theta)\sin(\beta - \gamma) + \sin(\beta - \theta)\sin(\gamma - \alpha)$$
$$+ \sin(\gamma - \theta)\sin(\alpha - \beta) = 0.$$

20. প্রমাণ কর যে,

$\sin^2(\theta+\alpha)+\sin^2(\theta+\beta)$

$-2\cos(\alpha-\beta)\sin(\theta+\alpha)\sin(\theta+\beta)=\sin^2(\alpha-\beta)$

21. $x=r\sin(\theta+45^\circ)$ এবং $y=r\sin(\theta-45^\circ)$ হইলে দেখাও যে,

$x^2+y^2=r^2$.

22. দেখাও যে, A এর যে কোন মানের জন্য

$\dfrac{\cot A}{1+\cot A}\times\dfrac{\cot(45^\circ-A)}{1+\cot(45^\circ-A)}$ এর মান একই।

23. $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$ হইলে, A, B, C এর মধ্যে কিরূপ সম্বন্ধে থাকিতে পারে ?

24. $\cot(A+B+C)$ কে $\cot A$, $\cot B$, $\cot C$ তে প্রকাশ কর।

25. $a\cos(\alpha-\beta)=b\cos(\alpha+\beta)$ হইলে

দেখাও যে, $(a-b)\cot\alpha+(a+b)\tan\beta=0$

26. $\cos(\alpha-\beta)=-1$ হইলে দেখাও যে

(i) $\sin\alpha+\sin\beta=0$; (ii) $\cos\alpha+\cos\beta=0$.

27. $\tan\beta=\dfrac{n\sin\alpha\cos\alpha}{1-n\sin^2\alpha}$ হইলে দেখাও যে,

$\tan(\alpha-\beta)=(1-n)\tan\alpha$,

28. কোনও কোণ θ এমন দুইটি অংশ α, β-তে বিভক্ত যে,

$\tan\alpha : \tan\beta=x : y$;

প্রমাণ কর, $\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{x-y}{x+y}\sin\theta$. **[Joint Ent Ex. 1968]**

29. কোন কোণ α কে এমন দুইটি অংশে বিভক্ত করা হইল যে অংশদ্বয়ের tangent এর অনুপাত λ এর সমান। দেখাও যে, অংশদ্বয়ের অন্তরফল x হইলে

$\sin x=\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}\sin\alpha$. **[H. S. 1975]**

30. $2\cos\theta=a+\dfrac{1}{a}$ এবং $2\cos\phi=b+\dfrac{1}{b}$ হইলে, দেখাও যে,

$2\cos(\theta-\phi)=\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$. **[Joint Ent. Ex. 1974]**

31. $\cos(A+B)\sin(C+D)=\cos(A-B)\sin(C-D)$ হইলে দেখাও যে, $\cot A\cot B\cot C=\cot D$.

32. $\frac{\tan(\alpha-\beta)}{\tan\alpha}+\frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\alpha}=1$ হইলে দেখাও যে, $\tan\alpha.\tan\beta=\tan^2\gamma$,

[**Joint Ent. Ex. 1975**]

33. দেখাও যে,

$\sin^2(\theta+\alpha)+\sin^2(\theta+\beta)-2\cos(\alpha-\beta)\sin(\theta+\alpha)\sin(\theta+\beta)$

রাশিমালাটির মান θ নিরপেক্ষ।

34. $\cos(\theta-\alpha)=p$ এবং $\sin(+\theta\beta)=q$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$p^2+q^2-2pq\sin(\alpha+\beta)=\cos^2(\alpha+\beta)$ [**Joint Ent. Ex. 1966**]

35. α এবং β দুইটি নির্দিষ্ট কোণ $a\cos\theta+b\sin\theta=c$ কে সিদ্ধ করিলে, যেখানে, a, b, c ধ্রুবক, প্রমাণ কর যে,

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

36. $\sin\alpha=A\sin(\alpha+\beta)$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin\beta}{\cos\beta-A}$. ইহা সর্বদাই কি সত্য ?

α, β, A এর উপর কিরূপ সর্ত থাকা দরকার ? [**Joint Ent. Ex. 1976**]

37. যদি $\cot y=\frac{\sin(z+x)}{\cos(z-x)-\cos(z+x)}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$\tan x$, $\tan y$, $\tan z$, *H. P.* তে থাকিবে। [**H. S. 1972**]

38. $(a+b)\tan(\theta-\phi)=(a-b)\tan(\theta+\phi)$ এবং $a\cos 2\phi+b\cos 2\theta=c$ হইলে প্রমাণ কর,

$a^2-b^2+c^2=2ac\cos 2\phi.$ [**Joint Ent. Ex. 1972**]

4-7. A এবং B এর যে কোন মানের জন্য :

I. $2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$

II. $2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)$

III. $2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$

IV. $2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$

পূর্ব আলোচনা হইতে পাই,

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B \quad\cdots\quad (1)$$
$$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B \quad\cdots\quad (2)$$
$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B \quad\cdots\quad (3)$$
$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B \quad\cdots\quad (4)$$

(1) এবং (2) যোগ করিয়া পাই,

$$2 \sin A \cos B = \sin (A+B) + \sin (A-B) \quad \cdots \quad (5)$$

(1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া পাই,

$$2 \cos A \sin B = \sin (A+B) - \sin (A-B) \quad \cdots \quad (6)$$

(3) এবং (4) যোগ করিয়া পাই,

$$2 \cos A \cos B = \cos (A+B) + \cos (A-B) \quad \cdots \quad (7)$$

(4) হইতে (3) বিয়োগ করিয়া পাই,

$$2 \sin A \sin B = \cos (A-B) - \cos (A+B) \quad \cdots \quad (8)$$

4·8. C এবং D এর যে কোন মানের জন্য :

I. $\mathbf{\sin C + \sin D = 2 \sin \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2}}$

II. $\mathbf{\sin C - \sin D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2}}$

III. $\mathbf{\cos C + \cos D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2}}$

IV. $\mathbf{\cos C - \cos D = -2 \sin \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2}}$.

$$\mathbf{= 2 \sin \frac{C+D}{2} \sin \frac{D-C}{2}}$$

$\because$ $2 \sin A \cos B = \sin (A+B) + \sin (A-B) \quad \cdots \quad$ (i)

$2 \cos A \sin B = \sin (A+B) - \sin (A-B) \quad \cdots \quad$ (ii)

$2 \cos A \cos B = \cos (A+B) + \cos (A-B) \quad \cdots \quad$ (iii)

$2 \sin A \sin B = \cos (A-B) - \cos (A+B) \quad \cdots \quad$ (iv)

$A+B=C$ এবং $A-B=D$ ধরিলে

$$A = \frac{C+D}{2}; \text{ এবং } B = \frac{C-D}{2}.$$

এখন A এবং B-এর মান (i), (ii), (iii), (iv) এতে বসাইয়া পাই,

$$\sin C + \sin D = 2 \sin \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2} \quad \cdots \quad (v)$$

$$\sin C - \sin D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2} \quad \cdots \quad (vi)$$

$$\cos C + \cos D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2} \quad \cdots \quad (vii)$$

$$\cos C - \cos D = -2 \sin \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2} \quad \cdots \quad (viii)$$

দ্রষ্টব্য : (viii) এর ক্ষেত্রে চিহ্ন পরিবর্তন করা হইয়াছে।

উদাহরণ 1. দেখাও যে,

(*i*) $\sin 15^\circ \cos 45^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{3}-1)$; (*ii*) $\cos 15^\circ - \cos 105^\circ = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$;

(*iii*) $\dfrac{\sin 3\theta - \sin\theta}{\cos 3\theta + \cos\theta} = \tan\theta$

(*i*) বাম পক্ষ $= \frac{1}{2}(2 \sin 45^\circ \sin 15^\circ)$

$$= \tfrac{1}{2}\{\cos(45^\circ - 15^\circ) - \cos(45^\circ + 15^\circ)\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\{\cos 30^\circ - \cos 60^\circ\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{4}(\sqrt{3}-1).$$

(*ii*) বাম পক্ষ $= \cos 15^\circ - \cos 105^\circ$

$$= 2 \sin \tfrac{1}{2}(15^\circ + 105^\circ) . \sin \tfrac{1}{2}(105^\circ - 15^\circ)$$

$$= 2 \sin 60^\circ \sin 45^\circ$$

$$= 2 . \frac{\sqrt{3}}{2} . \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

(*iii*) বাম পক্ষ $= \dfrac{2 \cos \frac{1}{2}(3\theta + \theta) . \sin \frac{1}{2}(3\theta - \theta)}{2 \cos \frac{1}{2}(3\theta + \theta) . \cos \frac{1}{2}(3\theta - \theta)}$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta.$$

উদাহরণ 2. দেখাও যে,

(*i*) $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{16}$

(*ii*) $\cos 70^\circ + \cos 50^\circ - \cos 100^\circ = \sqrt{2} \cos 35^\circ$

(*iii*) $\dfrac{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}.$

(*i*) বাম পক্ষ $= \cos 60^\circ \cos 20^\circ . (\cos 80^\circ \cos 40^\circ)$

$$= \tfrac{1}{4} \cos 20^\circ . (2 \cos 80^\circ \cos 40^\circ)$$

$$= \tfrac{1}{4} \cos 20^\circ . (\cos 120^\circ + \cos 40^\circ)$$

$$= \tfrac{1}{4} \cos 20^\circ . (-\tfrac{1}{2} + \cos 40^\circ)$$

$$= -\tfrac{1}{8} \cos 20^\circ + \tfrac{1}{8}(2 \cos 40^\circ \cos 20^\circ)$$

$$= -\tfrac{1}{8} \cos 20^\circ + \tfrac{1}{8}(\cos 60^\circ + \cos 20^\circ)$$

$$= \tfrac{1}{8} \cos 60^\circ = \tfrac{1}{8} \times \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{16}.$$

(ii) বাম পক্ষ $= (\cos 70^\circ + \cos 50^\circ) - \cos 100^\circ$

$= 2\cos 60^\circ \cos 10^\circ - \cos 100^\circ$

$= 2 \times \frac{1}{2}\cos 10^\circ - \cos 100^\circ$

$= \cos 10^\circ - \cos 100^\circ = 2\sin 55^\circ \sin 45^\circ$

$= \sqrt{2}\sin 55^\circ = \sqrt{2}\cos 35^\circ$

(iii) বাম পক্ষ $= \dfrac{\cos(90^\circ - 75^\circ) - \sin 15^\circ}{\cos(90^\circ - 75^\circ) + \sin 15^\circ} = \dfrac{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}{\sin 75^\circ + \sin 15^\circ}$

$= \dfrac{2\cos 45^\circ \sin 30^\circ}{2\sin 45^\circ \cos 30^\circ} = \cot 45^\circ \tan 30^\circ = 1 \times \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}.$

উদাহরণ 3. দেখাও যে,

$$\frac{\cos\theta + \cos 2\theta + \cos 4\theta + \cos 5\theta}{\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 4\theta + \sin 5\theta} = \cot 3\theta.$$

বাম পক্ষ $= \dfrac{(\cos 4\theta + \cos 2\theta) + (\cos 5\theta + \cos\theta)}{(\sin 4\theta + \sin 2\theta) + (\sin 5\theta + \sin\theta)}$

$= \dfrac{2\cos 3\theta \cos\theta + 2\cos 3\theta \cos 2\theta}{2\sin 3\theta \cos\theta + 2\sin 3\theta \cos 2\theta}$

$= \dfrac{2\cos 3\theta \times (\cos\theta + \cos 2\theta)}{2\sin 3\theta \times (\cos\theta + \cos 2\theta)}$

$= \dfrac{\cos 3\theta}{\sin 3\theta} = \cot 3\theta.$

উদাহরণ 4. $4\cos A\cos B\cos C$ কে চারিটি cosine এর যোগফলে প্রকাশ কর।

$4\cos A\cos B\cos C$

$= 2\cos A\{2\cos B\cos C\}$

$= 2\cos A\{\cos(B+C) + \cos(B-C)\}$

$= 2\cos A\cos(B+C) + 2\cos A\cos(B-C)$

$= \cos(A+B+C) + \cos(A-B-C)$

$+ \cos(A+B-C) + \cos(A-B+C)$

উদাহরণ 5. দেখাও যে,

$\sin(B+C-A) + \sin(C+A-B)$

$+ \sin(A+B-C) - \sin(A+B+C) = 4\sin A\sin B\sin C.$

বাম পক্ষ

$$=\{\sin (B+C-A)+\sin (C+A-B)\}$$
$$+\{\sin (A+B-C)-\sin (A+B+C)\}$$
$$=2\sin C\cos (B-A)+2\cos (A+B)\sin (-C)$$
$$=2\sin C\{\cos (B-A)-\cos (B+A)\}$$
$$=2\sin C\{2\sin B\sin A\}$$
$$=4\sin A\sin B\sin C.$$

উদাহরণ 6. $\operatorname{cosec} A+\sec A=\operatorname{cosec} B+\sec B$ হইলে, প্রমাণ কর, $\tan A\tan B=\cot \frac{1}{2}(A+B)$.

$\because\ \operatorname{cosec} A+\sec A=\operatorname{cosec} B+\sec B$,

$$\therefore\ \frac{1}{\cos A}-\frac{1}{\cos B}=\frac{1}{\sin B}-\frac{1}{\sin A};$$

বা, $$\frac{\cos B-\cos A}{\cos A\cos B}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin A\sin B};$$

বা, $$\frac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}=\frac{\sin A-\sin B}{\cos B-\cos A};$$

বা, $$\tan A\tan B=\frac{2\cos \frac{1}{2}(A+B)\sin \frac{1}{2}(A-B)}{2\sin \frac{1}{2}(A+B)\sin \frac{1}{2}(A-B)}$$
$$=\frac{\cos \frac{1}{2}(A+B)}{\sin \frac{1}{2}(A+B)}=\cot \frac{1}{2}(A+B).$$

উদাহরণ 7. $\sin\theta=k\sin\phi$ হইলে দেখাও যে,

$$\tan \tfrac{1}{2}(\theta-\phi)=\frac{k-1}{k+1}\tan \tfrac{1}{2}(\theta+\phi).$$

$\because\ \sin\theta=k\sin\phi$,

$$\therefore\ \frac{k}{1}=\frac{\sin\theta}{\sin\phi};$$

বা, $$\frac{k-1}{k+1}=\frac{\sin\theta-\sin\phi}{\sin\theta+\sin\phi}$$
$$=\frac{2\cos \frac{1}{2}(\theta+\phi)\sin \frac{1}{2}(\theta-\phi)}{2\sin \frac{1}{2}(\theta+\phi)\cos \frac{1}{2}(\theta-\phi)}$$
$$=\frac{\tan \frac{1}{2}(\theta-\phi)}{\tan \frac{1}{2}(\theta+\phi)}$$

$$\therefore\ \tan \tfrac{1}{2}(\theta-\phi)=\frac{k-1}{k+1}\tan \tfrac{1}{2}(\theta+\phi)$$

উদাহরণ 8. $x \cos \alpha + y \sin \alpha = x \cos \beta + y \sin \beta$ হইলে দেখাও যে,

$$\tan \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{y}{x}.$$

$x \cos \alpha + y \sin \alpha = x \cos \beta + y \sin \beta = k$ হইলে,

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - k = 0 ; \quad \cdots \quad (1)$$

$$x \cos \beta + y \sin \beta - k = 0. \quad \cdots \quad (2)$$

এখন, (1) এবং (2) হইতে বজ্রগুণনের দ্বারা পাই,

$$\frac{x}{\sin \beta - \sin \alpha} = \frac{y}{\cos \alpha - \cos \beta} = \frac{k}{\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta}.$$

$$\therefore \quad \frac{x}{y} = \frac{\sin \beta - \sin \alpha}{\cos \alpha - \cos \beta} = \frac{2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\beta - \alpha)}{2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\beta - \alpha)}.$$

বা, $\frac{x}{y} = \cot \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$.

$$\therefore \quad \tan \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{y}{x}.$$

প্রশ্নমালা 5

1. দেখাও যে,

(i) $\cos 15^\circ \cos 75^\circ = \frac{1}{4}$; (ii) $\sin 15^\circ \sin 45^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{3} - 1)$;

(iii) $\cos 105^\circ + \cos 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$; (iv) $\sin 65^\circ - \cos 35^\circ = \sin 5^\circ$.

2. দেখাও যে,

(i) $\frac{\sin A + \sin 3A}{\cos A + \cos 3A} = \tan 2A$; (ii) $\frac{\sin 3A - \sin A}{\cos 3A + \cos A} = \tan A$;

(iii) $\frac{\cos \theta - \cos 2\theta}{\sin \theta + \sin 2\theta} = \tan \frac{\theta}{2}$; (iv) $\frac{\cos 9^\circ + \sin 9^\circ}{\cos 9^\circ - \sin 9^\circ} = \tan 54^\circ$

3. দেখাও যে,

(i) $(\sin 3\theta + \sin \theta) \sin \theta + (\cos 3\theta - \cos \theta) \cos \theta = 0$;

(ii) $\cos \theta \cos (60^\circ - \theta) \cos (60^\circ + \theta) = \frac{1}{4} \cos 3\theta$.

4. দেখাও যে,

(i) $\frac{\sin \theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta + \sin 7\theta}{\cos \theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta} = \tan 4\theta$;

(ii) $\frac{\sin 7\theta - \sin 3\theta - \sin 5\theta + \sin \theta}{\cos 7\theta + \cos 3\theta - \cos 5\theta - \cos \theta} = \tan 2\theta$;

(iii) $\dfrac{\sin(A+B)-2\sin A+\sin(A-B)}{\cos(A+B)-2\cos A+\cos(A-B)}=\tan A$;

(iv) $\dfrac{\sin(A-C)+2\sin A+\sin(A+C)}{\sin(B-C)+2\sin B+\sin(B+C)}=\dfrac{\sin A}{\sin B}$;

(v) $\dfrac{\sin A+\sin 3A+\sin 5A}{\cos A+\cos 3A+\cos 5A}=\tan 3A.$ [P. U. 1975]

5. প্রমাণ কর যে,

(i) $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ=\frac{1}{8}$;

(ii) $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ=\frac{3}{16}$;

(iii) $\cos 20^\circ+\cos 100^\circ+\cos 140^\circ=0$;

(iv) $\sin 40^\circ-\sin 80^\circ+\sin 20^\circ=0.$

6. Tables ব্যবহার না করিয়া দেখাও যে,

$\frac{1}{2}\cos\frac{3\pi}{13}+\frac{1}{2}\cos\frac{5\pi}{13}-\cos\frac{9\pi}{13}\cos\frac{12\pi}{13}=0$. [H. S. 1976]

7. Tables বাবহার না করিয়া মান নির্ণয় কর :

$\dfrac{1}{2\sin 10^\circ}-2\sin 70^\circ$, [Joint Ent. Ex. 1976]

8. প্রমাণ কর, $2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$ এবং এখান থেকে দেখাও যে,

$\sin 80^\circ \cos 20^\circ+\sin 45^\circ \cos 145^\circ+\sin 55^\circ \cos 245^\circ=0$

[P. U. 1974]

9. দেখাও যে,

$\cos 32^\circ \sin 20^\circ+\cos 144^\circ \cos 2^\circ+\sin 68^\circ \cos 56^\circ=0$

[H. S. 1975]

10. প্রমাণ কর যে,

$\sin 19^\circ+\sin 41^\circ+\sin 83^\circ=\sin 23^\circ+\sin 37^\circ+\sin 79^\circ$

[Joint Ent. Ex. 1974]

11. $\sin 2\alpha=k\sin 2\beta$ হইলে দেখাও যে,

$(k+1)\tan(\alpha-\beta)=(k-1)\tan(\alpha+\beta).$

12. $\sin A=m\sin B$ হইলে দেখাও যে,

$\tan\frac{1}{2}(A-B)=\dfrac{m-1}{m+1}\tan\frac{1}{2}(A+B)$, [H. S. 1966]

13. $\cos\theta = k\cos\phi$ হইলে দেখাও যে,

$$\tan\tfrac{1}{2}(\theta+\phi) = \frac{1-k}{1+k}\cot\tfrac{1}{2}(\theta-\phi).$$

14. $\sin\alpha + \sin\beta = \frac{2}{3}$ এবং $\cos\alpha + \cos\beta = \frac{5}{6}$ হইলে দেখাও যে,

$\cot\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{5}{4}$.

15. $x\cos\alpha + y\sin\alpha = x\cos\beta + y\sin\beta = k$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{x}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = \frac{y}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = \frac{k}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}.$$

16. $\sin A = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ এবং $\sin B = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ হইলে

$\tan\frac{1}{2}(A+B)\cot\frac{1}{2}(A-B)$ এর মান বাহির কর

17. $\sin A + \sin B = a$ এবং $\cos A + \cos B = b$ হইলে দেখাও যে,

$$\tan\tfrac{1}{2}(A-B) = \pm\sqrt{\frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}}.$$

18. দেখাও যে,

$$\cos 2\theta\cos\frac{\theta}{2} - \cos 3\theta\cos\frac{9\theta}{2} = \sin 5\theta\sin\frac{5\theta}{2}$$

[H. S. 1975]

19. $\cos\theta : \cos\phi = a : b$ হইলে দেখাও যে,

$$(a+b)\tan\tfrac{1}{2}(\theta+\phi) = a\tan\theta + b\tan\phi$$

20. $\tan(A+B) = 3\tan A$ হইলে দেখাও যে,

$$\sin(2A+2B) + \sin 2A = 2\sin 2B$$

21. $\cos B\cos(C-A) = \cos(A-B+C)$ হইলে দেখাও যে,

$$\cot A + \cot C = 2\cot B.$$

22. প্রমাণ কর যে,

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C - \sin 2(A+B+C)$$
$$= 4\sin(B+C)\sin(C+A)\sin(A+B)$$

23. প্রমাণ কর যে,

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos(\alpha+\beta+\gamma)$$
$$= 4\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha)$$

24. প্রমাণ কর যে,

$$\left(\frac{\sin A + \sin B}{\cos A - \cos B}\right)^n + \left(\frac{\cos A + \cos B}{\sin A - \sin B}\right)^n = 2\cot^n\tfrac{1}{2}(A-B)$$

অথবা 0 (শূন্য), n এর মান যুগ্ম অথবা অযুগ্ম পূর্ণ সংখ্যা হইলে।

গুণিত কোণের কোণানুপাত

(Trigonometrical ratics of multiple angles)

5-1. 2A পরিমাপ কোণের কোণানুপাত।

আমরা জানি, A এবং B এর যে কোন মানের জন্য :

$$\sin (A+B)=\sin A \cos B+\cos A \sin B, \quad \cdots \quad (1)$$

$$\cos (A+B)=\cos A \cos B-\sin A \sin B, \quad \cdots \quad (2)$$

$$\tan (A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A \tan B} \quad \cdots \quad (3)$$

$B=A$ হইলে, (1) হইতে পাই

$$\sin 2A=\sin A \cos A+\cos A \sin A=2 \sin A \cos A$$

$$\therefore \quad \mathbf{\sin 2A=2 \sin A \cos A} \quad \cdots \quad (4)$$

এখন, (4) হইতে,

$$\sin 2A=2 \sin A \cos A=2 \tan A \cdot \cos^2 A$$

$$=\frac{2 \tan A}{\sec^2 A}=\frac{2 \tan A}{1+\tan^2 A}$$

$$\therefore \quad \mathbf{\sin 2A=\frac{2 \tan A}{1+\tan^2 A}} \quad \cdots \quad (5)$$

$B=A$ হইলে, (2) হইতে পাই,

$$\cos 2A=\cos A \cos A-\sin A \sin A=\cos^2 A-\sin^2 A$$

$$\therefore \quad \mathbf{\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A}$$

$$\mathbf{=2 \cos^2 A-1=1-2 \sin^2 A} \quad \cdots \quad (6)$$

(6) হইতে পাই,

$$\mathbf{1+\cos 2A=2 \cos^2 A} \quad \cdots \quad (7)$$

$$\mathbf{1-\cos 2A=2 \sin^2 A} \quad \cdots \quad (8)$$

(7) এবং (8) হইতে পাই,

$$\mathbf{\frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}=\tan^2 A} \quad \cdots \quad (9)$$

(6) হইতে পাই,

$$\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A=\cos^2 A\,(1-\tan^2 A)$$

$$=\frac{1-\tan^2 A}{\sec^2 A}=\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

$$\therefore \quad \mathbf{\cos 2A=\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}} \quad \cdots \quad (10)$$

$B = A$ হইলে, (3) হইতে পাই,

$$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}. \qquad \ldots \qquad (11)$$

দ্রষ্টব্য :

(i) $1 + \sin 2A = (\sin^2 A + \cos^2 A) + 2 \sin A \cos A$
$= (\sin A + \cos A)^2$;

(ii) $1 - \sin 2A = (\sin^2 A + \cos^2 A) - 2 \sin A \cos A$
$= (\sin A - \cos A)^2$.

মন্তব্য : cosec $2A$, sec $2A$, cot $2A$ এর মান যথাক্রমে sin $2A$, cos $2A$, tan $2A$ এর মান হইতে জানা যাইবে।

5-2. 3A পরিমাপ কোণের কোণানুপাত।

(i) $\sin 3A = \sin (A + 2A)$

$= \sin A \cos 2A + \cos A \sin 2A$

$= \sin A (1 - 2 \sin^2 A) + \cos A (2 \sin A \cos A)$

$= \sin A - 2 \sin^3 A + 2 \sin A (1 - \sin^2 A)$

$= 3 \sin A - 4 \sin^3 A$.

$\therefore$ **sin 3A = 3 sin A − 4 sin³A.**

(i) $\cos 3A = \cos (A + 2A)$

$= \cos A \cos 2A - \sin A \sin 2A$

$= \cos A (2 \cos^2 A - 1) - \sin A (2 \sin A \cos A)$

$= 2 \cos^3 A - \cos A - 2 \cos A (\sin^2 A)$

$= 2 \cos^3 A - \cos A - 2 \cos A (1 - \cos^2 A)$

$= 4 \cos^3 A - 3 \cos A$.

$\therefore$ **cos 3A = 4 cos³A − 3 cos A.**

(iii) $\tan 3A = \tan (A + 2A)$

$$= \frac{\tan A + \tan 2A}{1 - \tan A \tan 2A}$$

$$= \frac{\tan A + \dfrac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}}{1 - \tan A . \dfrac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}}$$

$$=\frac{\tan A(1-\tan^2 A)+2\tan A}{(1-\tan^2 A)-2\tan^2 A}$$

$$=\frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$$

$$\therefore\ \tan 3A=\frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$$

5-3. $\sin 18^\circ$ এবং $\cos 36^\circ$ এর মান নির্ণয়।

মনে করি, $\theta=18^\circ$.

$\therefore\ 5\theta=90^\circ.\quad \therefore\ 3\theta=90^\circ-2\theta.$

$\therefore\ \cos 3\theta=\cos(90^\circ-2\theta)=\sin 2\theta.$

$\therefore\ 4\cos^3\theta-3\cos\theta=2\cos\theta\sin\theta.$

$\therefore\ \cos\theta(4\cos^2\theta-3-2\sin\theta)=0$ ... (1)

কিন্তু, $\cos\theta=\cos 18^\circ\neq 0$ ... (2)

$\therefore\ 4\cos^2\theta-3-2\sin\theta=0$

$\therefore\ 1-4\sin^2\theta-2\sin\theta=0.$

$\therefore\ 4\sin^2\theta+2\sin\theta-1=0$;

$\sin\theta=\sin 18^\circ>0.$ ... (3)

$\therefore\ 16\sin^2\theta+8\sin\theta=4.$

$\therefore\ (4\sin\theta+1)^2=5$

$\therefore\ 4\sin\theta+1=+\sqrt{5}$; (3) হইতে।

$\therefore\ \sin 18^\circ=\sin\theta=\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$ ... (4)

$\therefore\ \cos 36^\circ=\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$; $(\theta=18^\circ)$

$=1-2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2$; (4) হইতে

$=1-2\left(\frac{6-2\sqrt{5}}{16}\right)=1-\frac{3-\sqrt{5}}{4}$

$\therefore\ \cos 36^\circ=\frac{\sqrt{5}+1}{4}.$ ... (5)

উদাহরণ 1. (*i*) $\cos A=\frac{2}{3}$ হইলে, $\cos 2A$ এর মান কত?

(*ii*) $\sin 2A=\frac{12}{13}$ হইলে, $\tan A$ এর মান কত?

(*i*) $\cos 2A=2\cos^2 A-1=2\times(\frac{2}{3})^2-1=-\frac{1}{9}.$

(*ii*) $\sin 2A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$.

$\therefore \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A} = \dfrac{12}{13}$.

বা, $6\tan^2 A - 13\tan A + 6 = 0$;

বা, $(2\tan A - 3)(3\tan A - 2) = 0$.

$\therefore \tan A = \frac{2}{3}$, বা, $\frac{3}{2}$.

উদাহরণ 2. দেখাও যে,

$$\frac{\sin\theta + \sin 2\theta}{1+\cos\theta+\cos 2\theta} = \tan\theta.$$

$$\text{বাম পক্ষ} = \frac{\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta}{(1+\cos 2\theta)+\cos\theta} = \frac{(1+2\cos\theta)\sin\theta}{2\cos^2\theta+\cos\theta}$$

$$= \frac{(1+2\cos\theta)\sin\theta}{(1+2\cos\theta)\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

উদাহরণ 3. দেখাও যে,

$$\frac{1-\tan^2(45^\circ-\theta)}{1+\tan^2(45^\circ-\theta)} = \sin 2\theta$$

ধরি, $45^\circ - \theta = A$. তাহা হইলে,

$$\text{বাম পক্ষ} = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

$$= \cos 2A = \cos 2(45^\circ - \theta)$$

$$= \cos(90^\circ - 2\theta) = \sin 2\theta.$$

উদাহরণ 4. α এবং β ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ

এবং $\cos 2\alpha = \dfrac{3\cos 2\beta - 1}{3-\cos 2\beta}$ হইলে দেখাও যে,

$\tan\alpha = \sqrt{2}\tan\beta$

যোগ ও ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা,

$\dfrac{\cos 2\alpha}{1} = \dfrac{3\cos 2\beta - 1}{3-\cos 2\beta}$ হইতে পাই,

$$\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \frac{3-\cos 2\beta)-(3\cos 2\beta-1)}{(3-\cos 2\beta)+(3\cos 2\beta-1)}$$

বা, $\dfrac{2\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha} = \dfrac{4(1-\cos 2\beta)}{2(1+\cos 2\beta)}$

বা, $\tan^2\alpha = 2\tan^2\beta$

$\therefore \tan\alpha = \sqrt{2}\tan\beta$.

উদাহরণ 5. দেখাও যে,

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin 20^\circ} - \frac{1}{\cos 20^\circ} = 4$$

$$\text{বাম পক্ষ} = \frac{\sqrt{3}\cos 20^\circ - \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ \cos 20^\circ}$$

$$= \frac{4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20^\circ - \frac{1}{2}\sin 20^\circ\right)}{2\sin 20^\circ \cos 20^\circ}$$

$$= \frac{4(\cos 30^\circ \cos 20^\circ - \sin 30^\circ \sin 20^\circ)}{\sin 40^\circ}$$

$$= \frac{4\cos 50^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{4\sin 40^\circ}{\sin 40^\circ} = 4.$$

উদাহরণ 6. দেখাও যে,

$$\cos^2 A + \cos^2\left(A + \frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(A - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}.$$

$$\text{বাম পক্ষ} = \tfrac{1}{2}\left\{2\cos^2 A + 2\cos^2\left(A + \frac{\pi}{3}\right) + 2\cos^2\left(A - \frac{\pi}{3}\right)\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\{1 + \cos 2A + 1 + \cos(2A + 120^\circ) + 1 + \cos(2A - 120^\circ)\}$$

$$= \tfrac{1}{2}[3 + \cos 2A + \{\cos(2A + 120^\circ) + \cos(2A - 120^\circ)\}]$$

$$= \tfrac{1}{2}[3 + \cos 2A + 2\cos 2A \cos 120^\circ]$$

$$= \tfrac{1}{2}[3 + \cos 2A - \cos 2A] = \tfrac{3}{2}.$$

উদাহরণ 7. $\cos 5\theta$ কে $\cos\theta$ তে প্রকাশ কর।

$$\cos 5\theta = \cos(2\theta + 3\theta)$$

$$= \cos 2\theta \cos 3\theta - \sin 2\theta \sin 3\theta$$

$$= (2\cos^2\theta - 1)(4\cos^3\theta - 3\cos\theta)$$
$$\quad - 2\sin\theta\cos\theta(3\sin\theta - 4\sin^3\theta)$$

$$= 8\cos^5\theta - 10\cos^3\theta + 3\cos\theta$$
$$\quad - 2\cos\theta\sin^2\theta(3 - 4\sin^2\theta)$$

$$= 8\cos^5\theta - 10\cos^3\theta + 3\cos\theta$$
$$\quad - 2\cos\theta(1 - \cos^2\theta)\{3 - 4(1 - \cos^2\theta)\}$$

$$= 8\cos^5\theta - 10\cos^3\theta + 3\cos\theta$$
$$\quad + 8\cos^5\theta - 10\cos^3\theta + 2\cos\theta$$

$$= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$$

উদাহরণ 8. দেখাও যে,

$$\sin^4\theta = \tfrac{3}{8} - \tfrac{1}{2}\cos 2\theta + \tfrac{1}{8}\cos 4\theta$$

$$\sin^4\theta = \tfrac{1}{4}(2\sin^2\theta)^2 = \tfrac{1}{4}(1-\cos 2\theta)^2$$
$$= \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}\cos 2\theta + \tfrac{1}{4}\cos^2 2\theta$$
$$= \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}\cos 2\theta + \tfrac{1}{8}(2\cos^2 2\theta)$$
$$= \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}\cos 2\theta + \tfrac{1}{8}(1+\cos 4\theta)$$
$$= \tfrac{3}{8} - \tfrac{1}{2}\cos 2\theta + \tfrac{1}{8}\cos 4\theta.$$

উদাহরণ 9. দেখাও যে,

$$\cot 3A = \frac{\cot^3 A - 3\cot A}{3\cot^2 A - 1}$$

$$\cot 3A = \cot(A+2A) = \frac{\cot A\cot 2A - 1}{\cot A + \cot 2A}$$

$$= \frac{\cot A.\ \dfrac{\cot^2 A - 1}{\cot A + \cot A} - 1}{\cot A + \dfrac{\cot^2 A - 1}{\cot A + \cot A}}$$

$$= \frac{(\cot^3 A - \cot A) - 2\cot A}{2\cot^2 A + (\cot^2 A - 1)}$$

$$= \frac{\cot^3 A - 3\cot A}{3\cot^2 A - 1}.$$

উদাহরণ 10. দেখাও যে,

$$(1+\sec 2\theta)(1+\sec 2^2\theta)(1+\sec 2^3\theta)\cdots\cdots(1+\sec 2^n\theta) = \frac{\tan 2^n\theta}{\tan\theta}$$

$$\tan\theta\,(1+\sec 2\theta) = \tan\theta\left(1+\frac{1}{\cos 2\theta}\right)$$

$$= \tan\theta\left(1+\frac{1+\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta}\right)$$

$$= \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \tan 2\theta.$$

$$\therefore\ \tan\theta\,(1+\sec 2\theta)(1+\sec 2^2\theta)$$
$$= \tan 2\theta\,(1+\sec 2^2\theta)$$
$$= \tan 2\theta\,(1+\sec 4\theta)$$
$$= \tan 4\theta = \tan 2^2\theta$$

অনুরূপভাবে,

$$\tan\theta\,(1+\sec 2\theta)(1+\sec 2^2\theta)(1+\sec 2^3\theta)$$
$$=\tan 2^2\theta\,(1+\sec 2^3\theta)$$
$$=\tan 4\theta\,(1+\sec 8\theta)=\tan 8\theta=\tan 2^3\theta$$

সুতরাং, সাধারণভাবে.

$$\tan\theta\,(1+\sec 2\theta)(1+\sec 2^2\theta)(1+\sec 2^3\theta)\cdots(1+\sec 2^n\theta)$$
$$=\tan 2^{n-1}\theta\,(1+\sec 2^n\theta)=\tan 2^n\theta$$
$$\therefore\quad (1+\sec 2\theta)(1+\sec 2^2\theta)(1+\sec 2^3\theta)\ldots(1+\sec 2^n\theta)$$
$$=\frac{\tan 2^n\theta}{\tan\theta}$$

প্রশ্নমালা 6

1. দেখাও যে,

(i) $\dfrac{1+\cos 2A}{\sin 2A}=\cot A$; (ii) $\dfrac{\sin 2A}{1-\cos 2A}=\cot A$;

(iii) $\dfrac{\tan 2A}{\tan A}=1+\sec 2A$; (vi) $\dfrac{\cot A-\tan A}{\cot A+\tan A}=\cos 2A$;

(v) $\cot\theta-2\cot 2\theta=\tan\theta$; (vi) $\cot\theta-\cot 2\theta=\operatorname{cosec} 2\theta$.

2. দেখাও যে,

(i) $\tan\theta+\cot\theta=2\operatorname{cosec} 2\theta$;

(ii) $\cos^4\theta-\sin^4\theta=\cos 2\theta$.

(iii) $\cos^6\alpha+\sin^6\alpha=\frac{1}{4}(1+3\cos^2 2\alpha)$.

(iv) $\cos^6\theta-\sin^6\theta=(1-\frac{1}{4}\sin^2 2\theta)\cos 2\theta$

3. $\sin A=\frac{2}{3}$ হইলে $\cos 3A$ এর মান বাহির কর :

(i) $0<A<\pi/2$, (ii) $\dfrac{\pi}{2}<A<\pi$.

4. $\cos 2A=\frac{12}{13}$ হইলে $\tan A$-এর মান বাহির কর :

(i) $0<A<\pi/4$, (ii) $3\pi/4<A<\pi$.

5. দেখাও যে,

(i) $\cos 4\theta=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1$; [P. U. 1968]

(ii) $\sin 8\theta=8\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta$.

6. দেখাও যে,

$\sin 5\theta = 16 \sin^5\theta - 20 \sin^3\theta + 5 \sin \theta.$

7. দেখাও যে,

$$\cot 4\theta = \frac{1 - 6 \tan^2 \theta + \tan 4\theta}{4 \tan \theta - 4 \tan^3 \theta}.$$

8. দেখাও যে,

(i) $\dfrac{\sin 2\alpha\ (1 + \cos 4\alpha)}{\sin 4\alpha\ (1 - \cos 2\alpha)} = \cot \alpha \cot 2\alpha$;

(ii) $\dfrac{1 - \cos 2A + \sin 2A}{1 + \cos 2A + \sin 2A} = \tan A$;

(iii) $\dfrac{\sin \theta + \sin 2\theta}{1 + \cos \theta + \cos 2\theta} = \tan \theta$;

(iv) $\dfrac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\sin \alpha \cos \alpha - \sin \beta \cos \beta} = \tan (\alpha + \beta)$;

(v) $\dfrac{\sin (\alpha + 3\beta) + \sin (3\alpha + \beta)}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta} = 2 \cos (\alpha + \beta)$;

(vi) $\dfrac{\cot \alpha}{\cot \alpha - \cot 3\alpha} - \dfrac{\tan \alpha}{\tan 3\alpha - \tan \alpha} = 1$;

(vii) $\dfrac{1}{\tan 3\theta - \tan \theta} - \dfrac{1}{\cot 3\theta - \cot \theta} = \cot 2\theta.$

9. $\tan x = b/a$ হইলে, $a \cos 2x + b \sin 2x$ এর মান নির্ণয় কর ?

10. $2 \tan \alpha = 3 \tan \beta$ হইলে দেখাও যে,

$$\tan (\alpha - \beta) = \frac{\sin 2\beta}{5 - \cos 2\beta}.$$

11. $\tan^2 \theta = 1 + 2 \tan^2 \phi$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$\cos 2\phi = 1 + 2 \cos 2\theta.$

12. দেখাও যে,

$\cos^2 (\alpha + \beta) - \sin^2(\alpha - \beta) = \cos 2\alpha \cos 2\beta.$

13. দেখাও যে,

$\tan 3A - \tan 2A - \tan A = \tan 3A \tan 2A \tan A.$

14. প্রমাণ কর :

$$2 \operatorname{cosec} 4\theta - \sec 2\theta = \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta} \cdot \operatorname{cosec} 2\theta.$$

[Joint Ent. Ex. 1973]

15. দেখাও যে,

$$\cot(\theta + 15^\circ) - \tan(\theta - 15^\circ) = \frac{4 \cos 2\theta}{1 + 2 \sin 2\theta}.$$

16. প্রমাণ কর :

$$\cos^3 \alpha + \cos^3 \left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) + \cos^3 \left(\frac{4\pi}{3} + \alpha\right) = \tfrac{3}{4} \cos 3\alpha.$$

17. $x = \sin\theta + \cos\theta \sin 2\theta$ এবং $y = \cos\theta + \sin\theta \sin 2\theta$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$$(x+y)^{\frac{2}{3}} + (x-y)^{\frac{2}{3}} = 2.$$ [**Joint Ent. Ex. 1970**]

18. $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$ হইলে প্রমাণ কর :

(i) $\cos 2\theta = \frac{1}{2}\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)$, (ii) $\cos 3\theta = \frac{1}{2}\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right)$.

19. দেখাও যে,

$$\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = 4.$$

20. $\tan\theta = \sec 2\alpha$ হইলে প্রমাণ কর :

$$\sin 2\theta = \frac{1 - \tan^4 \alpha}{1 + \tan^4 \alpha}.$$

21. $\frac{\tan 3A}{\tan A} = k$ হইলে দেখাও যে, $\frac{\sin 3A}{\sin A} = \frac{2k}{k-1}$ এবং k এর মান $\frac{1}{3}$ এবং 3 এর মধ্যবর্তী হইবে না। [**Joint Ent. Ex. 1975**]

22. প্রমাণ কর :

$$\frac{1 - \sec 8\theta}{1 - \sec 4\theta} = \frac{\tan 8\theta}{\tan 2\theta}.$$

23. প্রমাণ কর :

$$\sec x = \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + 2\cos 4x}}}$$

24. প্রমাণ কর :

$$\cos 4\alpha - \cos 4\beta$$
$$= 8(\cos\alpha - \cos\beta)(\cos\alpha + \cos\beta)(\cos\alpha - \sin\beta)(\cos\alpha + \sin\beta).$$

25. $\tan\alpha, \tan\beta, \tan\gamma$ গুণোত্তর প্রগতিতে থাকিলে প্রমাণ কর :

$$\cos 2\beta = \frac{\cos(\alpha + \gamma)}{\cos(\alpha - \gamma)}.$$

26. প্রমাণ কর :

$$\cos^3 \alpha \frac{\sin 3\alpha}{3} + \sin^3 \alpha \frac{\cos 3\alpha}{3} = \frac{\sin 4\alpha}{4}.$$

27. দেখাও যে,

$$\sin^8 \theta + \cos^8 \theta = 1 - \sin^2 2\theta + \tfrac{1}{8} \sin^4 2\theta.$$

28. প্রমাণ কর :

$$(2 \cos \theta - 1)(2 \cos 2\theta - 1)(2 \cos 2^2\theta - 1) \ldots \ldots (2 \cos 2^{n-1}\theta - 1)$$
$$= \frac{2 \cos 2^n\theta + 1}{2 \cos \theta + 1}.$$

29. $(2^n + 1)\alpha = \pi$ হইলে প্রমাণ কর :

$$\cos \alpha \cos 2\alpha \cos 2^2 \alpha \ldots \ldots \cos 2^{n-1} \alpha = \frac{1}{2^n}.$$

30. $\tan^2 \alpha + 2 \tan \alpha \tan 2\beta = \tan^2 \beta + 2 \tan \beta \tan 2\alpha$ হইলে প্রমাণ কর যে, উভয় পক্ষের মান 1 হইবে অথবা, $\tan \beta = \pm \tan \alpha$.

31. $\dfrac{\tan (\alpha - \beta + \gamma)}{\tan (\alpha + \beta - \gamma)} = \dfrac{\tan \beta}{\tan \gamma}$ হইলে দেখাও যে,

হয় $\sin (\beta - \gamma) = 0$ অথবা $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 0.$

32. দেখাও যে,

$$\tan \theta + 2 \tan 2\theta + 4 \tan 4\theta + 8 \cot 8\theta = \cot \theta.$$

ষষ্ঠ অধ্যায়

উপকোণের কোণানুপাত

(Trigonometrical ratios of Submultiple angles)

6-1. উপকোণ এবং উপকোণের কোণানুপাত।

কোন একটি কোণের পরিমাপ A হইলে $\frac{1}{2}A$, $\frac{1}{3}A$, $\frac{1}{4}A$,……ইত্যাদি কোণগুলিকে প্রথমোক্ত কোণের **উপকোণ** (Submultiple angles) বলা হয়।

আমরা জানি,

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A \quad \cdots \quad (1)$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$
$$= 2 \cos^2 A - 1$$
$$= 1 - 2 \sin^2 A \quad \cdots \quad (2)$$

$$\frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A} = \tan^2 A \quad \cdots \quad (3)$$

$$\sin 2A = \frac{2 \tan A}{1+\tan^2 A} \quad \cdots \quad (4)$$

$$\cos 2A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} \quad \cdots \quad (5)$$

$$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1-\tan^2 A} \quad \cdots \quad (6)$$

এখন, $A = \frac{1}{2}\theta$ ধরিলে, (1)—(6) হইতে পাই,

$$\sin \theta = 2 \sin \tfrac{1}{2}\theta \cos \tfrac{1}{2}\theta \quad \cdots \quad (7)$$

$$\cos \theta = \cos^2 \tfrac{1}{2}\theta - \sin^2 \tfrac{1}{2}\theta$$
$$= 2 \cos^2 \tfrac{1}{2}\theta - 1$$
$$= 1 - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\theta \quad \cdots \quad (8)$$

$$\therefore \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = \tan^2 \tfrac{1}{2}\theta \quad \cdots \quad (9)$$

এবং, $$\sin\theta = \frac{2 \tan \frac{1}{2}\theta}{1+\tan^2 \frac{1}{2}\theta} \quad \cdots \quad (10)$$

$$\cos\theta = \frac{1-\tan^2 \frac{1}{2}\theta}{1+\tan^2 \frac{1}{2}\theta} \quad \cdots \quad (11)$$

$$\tan\theta = \frac{2 \tan \frac{1}{2}\theta}{1-\tan^2 \frac{1}{2}\theta} \quad \cdots \quad (12)$$

এইভাবে, $\frac{1}{2}\theta$-এর কোণানুপাতে $\cot\theta$, $\sec\theta$, $\operatorname{cosec}\theta$ কে প্রকাশ করা যাইবে।

আমরা জানি,

$$\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A \quad \ldots \quad (i)$$

$$\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A \quad \ldots \quad (ii)$$

$$\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A} \quad \ldots \quad (iii)$$

এখন, $A = \frac{1}{3}\theta$ ধরিলে (i), (ii), (iii) হইতে পাই,

$$\sin\theta = 3\sin\tfrac{1}{3}\theta - 4\sin^3\tfrac{1}{3}\theta \quad \ldots \quad (iv)$$

$$\cos\theta = 4\cos^3\tfrac{1}{3}\theta - 3\cos\tfrac{1}{3}\theta \quad \ldots \quad (v)$$

$$\tan\theta = \frac{3\tan\frac{1}{3}\theta - \tan^3\frac{1}{3}\theta}{1 - 3\tan^2\frac{1}{3}\theta} \quad \ldots \quad (vi)$$

6-2. $\frac{1}{2}\theta$ কোণের কোণানুপাতসমূহকে $\cos\theta$-তে প্রকাশ কর।

$\because \cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\theta,$

$$\therefore \sin\tfrac{1}{2}\theta = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\cos\theta)}; \quad \ldots \quad (1)$$

এবং, $\because \cos\theta = 2\cos^2\frac{1}{2}\theta - 1,$

$$\therefore \cos\tfrac{1}{2}\theta = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\cos\theta)}. \quad \ldots \quad (2)$$

এখন, (1) এবং (2) হইতে পাই,

$$\therefore \tan\tfrac{1}{2}\theta = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} \quad \ldots \quad (3)$$

এখন, $\frac{1}{2}\theta$ কোণের অপর কোণানুপাতগুলি অতি সহজেই নির্ণয় করা যাইবে।

এইরূপক্ষেত্রে, $\frac{1}{2}\theta$ এর কোণানুপাতসমূহের চিহ্ন নিরূপণ :

θ-এর মান অর্থাৎ $\frac{1}{2}\theta$-এর মান জানা থাকিলে, $\frac{1}{2}\theta$-এর সীমারেখা কোন পাদে অবস্থিত তাহা জানা যাইবে ; এবং তখন "**All, sin, tan, cos**"-এর নিয়মানুসারে, $\sin\frac{1}{2}\theta$, $\cos\frac{1}{2}\theta$, $\tan\frac{1}{2}\theta$-এর চিহ্ন কি হইবে তাহা অতি সহজেই জানা যাইবে।

কিন্তু, θ-এর মান না জানিয়া কেবল $\cos\theta$-এর মান জানা থাকিলে θ-এর সীমারেখা কোথায় অবস্থিত হইবে তাহা নির্দিষ্টভাবে বলা যাইবে না ; কারণ, এইরূপ ক্ষেত্রে θ-এর মান অর্থাৎ $\frac{1}{2}\theta$-এর মান অসংখ্য হইতে পারে। নিম্নের উদাহরণগুলি লক্ষ্যণীয়।

(*a*) **$\sin 22\frac{1}{2}^\circ$, $\cos 22\frac{1}{2}^\circ$, $\tan 22\frac{1}{2}^\circ$ এর মান নির্ণয়।**

যেহেতু, $\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\theta = 45^\circ$ ধরিলে, $\frac{1}{2}\theta$ অর্থাৎ $22\frac{1}{2}^\circ$-এর সীমারেখা প্রথম পাদে অবস্থিত। সুতরাং, এখানে, $\sin\frac{\theta}{2}$ এবং $\cos\frac{\theta}{2}$ এর মান ধনাত্মক।

$\therefore \ \sin 22\frac{1}{2}^\circ = +\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos 45^\circ)}$

$= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{2})}$;

$\cos 22\frac{1}{2}^\circ = +\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos 45^\circ)}$

$= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{2})}$;

$\tan 22\frac{1}{2}^\circ = \frac{\sin 22\frac{1}{2}^\circ}{\cos 22\frac{1}{2}^\circ}$

$= \sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)} = \sqrt{2}-1.$

(*b*) **$\sin 165^\circ$, $\cos 165^\circ$, $\tan 165^\circ$ এর মান নির্ণয়।**

যেহেতু, $\cos 330^\circ = \cos(360^\circ - 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\theta = 330^\circ$ ধরিলে, $\frac{\theta}{2}$ অর্থাৎ 165° এর সীমারেখা দ্বিতীয় পাদে থাকিবে ; তাহা হইলে, $\sin 165^\circ$ এর মান ধনাত্মক এবং $\cos 165^\circ$ এর মান ঋণাত্মক হইবে।

$\therefore \ \sin 165^\circ = +\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos 330^\circ)}$

$= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$;

$\cos 165^\circ = -\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos 330^\circ)}$

$= -\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = -\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right)$;

$\tan 165^\circ = \frac{\sin 165^\circ}{\cos 165^\circ} = -\frac{(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)} = \sqrt{3}-2.$

6-3. $\frac{1}{2}\theta$ কোণের কোণানুপাতসমূহকে $\sin\theta$ তে প্রকাশ।

$\because \ \sin^2\frac{1}{2}\theta + \cos^2\frac{1}{2}\theta = 1,$
এবং $2\sin\frac{1}{2}\theta.\ \cos\frac{1}{2}\theta = \sin\theta,$ ... (1)

উহাদের যোগ করিয়া পাই,

$\sin^2\frac{1}{2}\theta + \cos^2\frac{1}{2}\theta + 2\sin\frac{1}{2}\theta.\cos\frac{1}{2}\theta = 1+\sin\theta,$

বা, $(\sin\frac{1}{2}\theta + \cos\frac{1}{2}\theta)^2 = 1+\sin\theta.$

$\therefore \ \sin\frac{1}{2}\theta + \cos\frac{1}{2}\theta = \pm\sqrt{1+\sin\theta}$ ... (2)

আবার, (1) হইতে বিয়োগ করিয়া পাই,

$\sin^2\frac{1}{2}\theta + \cos^2\frac{1}{2}\theta - 2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta = 1-\sin\theta,$

বা, $(\sin \frac{1}{2}\theta - \cos \frac{1}{2}\theta)^2 = 1 - \sin \theta.$

$\therefore \quad \sin \frac{1}{2}\theta - \cos \frac{1}{2}\theta = \pm \sqrt{1 - \sin \theta}.$ ... (3)

(2) এবং (3) যোগ করিয়া পাই,

$\sin \frac{1}{2}\theta = \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + \sin \theta} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - \sin \theta}$; ... (4)

এবং (2) হইতে (3) বিয়োগ করিয়া পাই,

$\cos \frac{1}{2}\theta = \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + \sin \theta} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - \sin \theta}.$ ... (5)

এখন, $\frac{1}{2}\theta$ এর অপর কোণানুপাতসমূহ অতি সহজেই নির্ণয় করা যাইবে।

এইরূপক্ষেত্রে, $\frac{1}{2}\theta$ এর কোণানুপাতসমূহের চিহ্ন নিরূপণ :

$$\sin \tfrac{1}{2}\theta + \cos \tfrac{1}{2}\theta = \sqrt{2}\left\{\sin \tfrac{1}{2}\theta \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos \tfrac{1}{2}\theta \times \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

$$= \sqrt{2}\{\sin \tfrac{1}{2}\theta \cos 45^\circ + \cos \tfrac{1}{2}\theta \sin 45^\circ\}$$

$$= \sqrt{2} \sin(\tfrac{1}{2}\theta + 45^\circ).$$

তাহা হইলে, $(\sin \frac{1}{2}\theta + \cos \frac{1}{2}\theta)$ এর চিহ্ন কি হইবে তাহা $(\frac{1}{2}\theta + 45^\circ)$-এর সীমারেখা কোন্ পাদে অবস্থিত তাহার উপর নির্ভর করিবে।

আবার, যেহেতু,

$\sin \frac{1}{2}\theta - \cos \frac{1}{2}\theta = \sqrt{2} \sin(\frac{1}{2}\theta - 45^\circ)$;

সুতরাং, $(\sin \frac{1}{2}\theta - \cos \frac{1}{2}\theta)$ এর চিহ্ন কি হইবে তাহা $(\frac{1}{2}\theta - 45^\circ)$-এর সীমারেখা কোন্ পাদে অবস্থিত তাহার উপর নির্ভর করিবে।

নিম্নের উদাহরণটি লক্ষ্যণীয় :

$\sin 285^\circ$, $\cot 285^\circ$, $\sec 285^\circ$-এর মান নির্ণয় :

$$\sin 570^\circ = \sin(90^\circ \times 6 + 30^\circ) = \sin(90^\circ \times 2 + 30^\circ)$$

$$= -\sin 30^\circ = -\tfrac{1}{2}; \quad \ldots (1)$$

$$\sin 285^\circ + \cos 285^\circ = \sqrt{2} \sin(285^\circ + 45^\circ)$$

$$= \sqrt{2} \sin(330^\circ)$$

$$= -\sqrt{2} \sin 30^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \ldots (2)$$

$$\sin 285^\circ - \cos 285^\circ = \sqrt{2} \sin(285^\circ - 45^\circ)$$

$$= \sqrt{2} \sin(240^\circ)$$

$$= -\sqrt{2} \sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{6}}{2}. \quad \ldots (3)$$

(2) এবং (3) হইতে পাই,

$$2 \sin 285^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2};$$

$$\text{বা,}\quad \sin 285^\circ = -\tfrac{1}{4}(\sqrt{3}+1)\sqrt{2} = -\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}; \quad \ldots \quad (4)$$

$$\text{এবং,}\quad 2\cos 285^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2};$$

$$\text{বা}\quad \cos 285^\circ = \tfrac{1}{4}(\sqrt{3}-1)\sqrt{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}. \quad \ldots \quad (5)$$

$$\therefore\quad \cot 285^\circ = \frac{\cos 285^\circ}{\sin 285^\circ} = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \sqrt{3}-2;$$

$$\sec 285^\circ = \frac{1}{\cos 285^\circ} = \frac{4}{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}} = (\sqrt{3}+1)\sqrt{2} = \sqrt{6}+\sqrt{2}.$$

দ্রষ্টব্য : (1), (4), (5) হইতে,

$$\sin 285^\circ = -\tfrac{1}{2}\sqrt{(1+\sin 570^\circ)} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-\sin 570^\circ)};$$

$$\cos 285^\circ = -\tfrac{1}{2}\sqrt{(1+\sin 570^\circ)} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-\sin 570^\circ)}.$$

6-4. $\frac{1}{2}\theta$ কোণের কোণানুপাতসমূহকে $\tan\theta$ তে প্রকাশ।

যেহেতু, $\tan\theta = \dfrac{2\tan\frac{1}{2}\theta}{1-\tan^2\frac{1}{2}\theta}$,

$$\therefore\quad \tan\theta - \tan\theta\tan^2\tfrac{1}{2}\theta = 2\tan\tfrac{1}{2}\theta,$$

$$\text{বা,}\quad \tan\theta\tan^2\tfrac{1}{2}\theta + 2\tan\tfrac{1}{2}\theta - \tan\theta = 0.$$

$$\therefore\quad \tan\tfrac{1}{2}\theta = \frac{-1\pm\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}.$$

θ এর মান অর্থাৎ $\frac{1}{2}\theta$ এর মান জানা থাকিলে, $\frac{1}{2}\theta$ এর সীমারেখা কোন্ পাদে থাকিবে তাহা জানিতে পারায়, $\tan\frac{1}{2}\theta$ এর চিহ্ন সহজেই জানা যাইবে। তারপর, অতি সহজেই $\frac{1}{2}\theta$ এর অন্যান্য কোণানুপাতসমূহের মান জানা যাইবে।

নিম্নের উদাহরণটি লক্ষ্যণীয় :

$\tan 22\frac{1}{2}^\circ$ এবং $\sin 22\frac{1}{2}^\circ$ এর মান নির্ণয় করা যাক্।

$\tan 22\frac{1}{2}^\circ > 0$ বলিয়া,

$$\tan 22\tfrac{1}{2}^\circ = \frac{-1+\sqrt{1+\tan^2 45^\circ}}{\tan 45^\circ} = \sqrt{2}-1.$$

$$\therefore\quad \sec^2 22\tfrac{1}{2}^\circ = 1+\tan^2 22\tfrac{1}{2}^\circ = 4-2\sqrt{2}.$$

$$\therefore\quad \sec 22\tfrac{1}{2}^\circ = +\sqrt{4-2\sqrt{2}}.$$

$$\therefore\quad \cos 22\tfrac{1}{2}^\circ = \frac{1}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}} = \frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2};$$

$$\sin 22\tfrac{1}{2}^\circ = \sqrt{1-\cos^2 22\tfrac{1}{2}^\circ} = \frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})}}{2}.$$

6-5. $\frac{1}{3}\theta$ কোণের কোণানুপাতসমূহকে θ কোণের কোণানুপাতে প্রকাশ।

$\because \sin\theta = 3\sin\frac{1}{3}\theta - 4\sin^3\frac{1}{3}\theta,$

θ এর মান জানা থাকিলে $\sin\theta$ এর মান এবং $\frac{1}{3}\theta$ এর সীমারেখা কোন্ পাদে অবস্থিত তাহা জানা যাইবে। তখন, $\sin\frac{1}{3}\theta$ এর মান জানা যাইবে।

আবার, $\cos\theta = 4\cos^3\frac{1}{3}\theta - 3\cos\frac{1}{3}\theta$ বলিয়া, θ এর মান জানা থাকিলে, অনুরূপ পদ্ধতিতে $\cos\frac{1}{3}\theta$ এর মান জানা যাইবে। অপিচ,

$$\tan\theta = \frac{3\tan\frac{1}{3}\theta - \tan^3\frac{1}{3}\theta}{1-3\tan^2\frac{1}{3}\theta}$$

বলিয়া, θ এর মান জানা থাকিলে, অনুরূপ পদ্ধতিতে $\tan\frac{1}{3}\theta$ এর মান জানা যাইবে।

6-6. $18°, 36°, 54°, 72°$ কোণের কোণানুপাতসমূহ নির্ণয়।

মনে করি, $\theta = 18°$; $\therefore 5\theta = 90°$;

বা, $2\theta = 90° - 3\theta.$

$\therefore \sin 2\theta = \sin(90° - 3\theta) = \cos 3\theta,$

বা, $2\sin\theta\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta,$

বা, $(4\cos^2\theta - 2\sin\theta - 3)\cos\theta = 0;$

বা, $4\cos^2\theta - 2\sin\theta - 3 = 0,\ (\because \cos\theta = \cos 18° \neq 0).$

$\therefore 4\cdot(1-\sin^2\theta) - 2\sin\theta - 3 = 0,$

বা, $4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1 = 0.$

$\therefore \sin\theta = \frac{-2\pm\sqrt{20}}{8} = \frac{\pm\sqrt{5}-1}{4}.$

আবার, যেহেতু, $\theta = 18°$;

$\therefore \sin\theta = \sin 18° > 0.$

$\therefore$ $\mathbf{\sin 18° = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1).}$

$\therefore$ $\mathbf{\cos 18°} = \sqrt{1-\sin^2 18°} = \sqrt{1-\frac{1}{16}(6-2\sqrt{5})} = \frac{1}{4}\sqrt{(10+2\sqrt{5})};$

$\mathbf{\cos 36°} = 1 - 2\sin^2 18° = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1);$

$\mathbf{\sin 36°} = +\sqrt{1-\cos^2 36°} = \frac{1}{4}\sqrt{(10-2\sqrt{5})};$

$\mathbf{\sin 54°} = \sin(90° - 36°) = \cos 36° = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1);$

$\mathbf{\cos 54°} = \cos(90° - 36°) = \sin 36° = \frac{1}{4}\sqrt{(10-2\sqrt{5})};$

$\mathbf{\sin 72°} = \sin(90° - 18°) = \cos 18° = \frac{1}{4}\sqrt{(10+2\sqrt{5})};$

$\mathbf{\cos 72°} = \cos(90° - 18°) = \sin 18° = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1).$

এখন, এই সমস্ত কোণের অন্যান্য কোণানুপাতসমূহ অতি সহজেই নির্ণয় করা যাইবে।

6-7. $3^\circ, 6^\circ, 9^\circ, 12^\circ$ ইত্যাদি 3° এর গুণিতক কোণসমূহের কোণানুপাত নির্ণয়।

$$\sin 15^\circ = \sin (45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}};$$

$$\cos 15^\circ = \cos (45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

$$\sin 18^\circ = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1);\ \cos 18^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{(10+2\sqrt{5})};$$
$$\sin 36^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{(10-2\sqrt{5})};\ \cos 36^\circ = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}+1).$$

$$\therefore\ \sin 3^\circ = \sin (18^\circ - 15^\circ)$$
$$= \sin 18^\circ \cos 15^\circ - \cos 18^\circ \sin 15^\circ$$
$$= \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) \times \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{4}\sqrt{(10+2\sqrt{5})} \times \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$
$$= \tfrac{1}{16}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}+\sqrt{2}) - \tfrac{1}{8}(\sqrt{3}-1)\sqrt{(5+\sqrt{5})}$$

$$\cos 3^\circ = \cos(18^\circ - 15^\circ)$$
$$= \cos 18^\circ \cos 15^\circ + \sin 18^\circ \sin 15^\circ$$
$$= \tfrac{1}{8}(\sqrt{3}+1)\sqrt{(5+\sqrt{5})} + \tfrac{1}{16}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}-\sqrt{2}).$$

যেহেতু, $6^\circ = 36^\circ - 30^\circ$; $9^\circ = 45^\circ - 36^\circ$; $12^\circ = 30^\circ - 18^\circ$; $21^\circ = 36^\circ - 15^\circ$; $24^\circ = 30^\circ - 6^\circ$; ইত্যাদি, অতএব, $6^\circ, 9^\circ, 12^\circ, 21^\circ, 24^\circ$ প্রভৃতি কোণের sin এবং cos অনুরূপ পদ্ধতিতে পাওয়া যাইবে। কিন্তু, 3° এর কোন গুণিতক কোণ 45° অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে উহার পূরক কোণের কোণানুপাত হইতে কোণানুপাত নির্ণয় করা যাইবে। যেমন,

$$\sin 48^\circ = \cos 42^\circ = \cos (45^\circ - 3^\circ) = \text{ইত্যাদি।}$$

উদাহরণ 1. দেখাও যে,

$$\frac{2\sin\theta - \sin 2\theta}{2\sin\theta + \sin 2\theta} = \tan^2 \tfrac{1}{2}\theta.$$

$$\text{বামপক্ষ} = \frac{2\sin\theta - 2\sin\theta\cos\theta}{2\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta}$$
$$= \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = \frac{2\sin^2\frac{1}{2}\theta}{2\cos^2\frac{1}{2}\theta} = \tan^2 \tfrac{1}{2}\theta.$$

উদাহরণ 2. $\cos\,\theta = \frac{7}{25}$ হইলে, যেখানে $270° < \theta < 360°$, $\sin\,\frac{1}{2}\theta$ এবং $\cos\,\frac{1}{2}\theta$ এর মান বাহির কর।

$$\text{যেহেতু, } 270° < \theta < 360° \,;$$

$$\therefore \quad 135° < \frac{\theta}{2} < 180°.$$

সুতরাং, $\frac{\theta}{2}$ এর সীমারেখা দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত। তাহা হইলে, $\sin\,\frac{1}{2}\,\theta$ এর মান ধনাত্মক এবং $\cos\,\frac{1}{2}\theta$ এর মান ঋণাত্মক হইবে।

$$\therefore \quad \sin\,\tfrac{1}{2}\theta = +\sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\cos\,\theta)}$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\tfrac{7}{25})} = \tfrac{3}{5}\,;$$

$$\cos\,\tfrac{1}{2}\theta = -\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\cos\,\theta)}$$

$$= -\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\tfrac{7}{25})} = -\tfrac{4}{5}.$$

উদাহরণ 3. $\cos\,A = \frac{3}{5}$ এবং $\sin\,B = \frac{3}{5}$ হইলে, যেখানে A এবং B ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ, $\cos\,\frac{A-B}{2}$ এবং $\sin\,\frac{A-B}{2}$ এর মান নির্ণয় কর।

যেহেতু A এবং B ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ,

$$\therefore \quad \sin\,A = +\sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{(1-\tfrac{9}{25})} = \tfrac{4}{5}\,;$$

$$\cos\,B = +\sqrt{1-\sin^2 B} = \sqrt{(1-\tfrac{9}{25})} = \tfrac{4}{5},$$

$$\therefore \quad \cos\,(A-B) = \cos\,A\,\cos\,B + \sin\,A\,\sin\,B$$

$$= \tfrac{3}{5}.\tfrac{4}{5} + \tfrac{4}{5}.\tfrac{3}{5} = \tfrac{24}{25}.$$

যেহেতু, A এবং B ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ,

$\therefore \quad \cos\,\frac{A-B}{2}$ এর মান ধনাত্মক হইবে।

$$\therefore \quad \cos\,\frac{A-B}{2} = +\sqrt{\tfrac{1}{2}\{1+\cos\,(A-B)\}}$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}\{1+\tfrac{24}{25}\}}$$

$$= \sqrt{\frac{49}{50}} = \frac{7\sqrt{2}}{10}.$$

আবার, $\sin\,A = \frac{4}{5} > \frac{3}{5} = \sin\,B\,;\ 0 < (A, B) < 90°.$

$\therefore \quad A > B. \qquad \therefore \quad 0° < B < A < 90°.$

$\therefore \quad \frac{1}{2}(A-B)$ ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ।

$\therefore \quad \sin\,\frac{1}{2}(A-B) > 0.$

$$\therefore \quad \sin \tfrac{1}{2}(A-B) = \sqrt{\tfrac{1}{2}\{1-\cos(A-B)\}}$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(1-\frac{24}{25}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{10}.$$

উদাহরণ 4. $\theta = 240^\circ$ হইলে,

$$\sin \tfrac{1}{2}\theta = \tfrac{1}{2}\sqrt{1+\sin\theta} - \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\sin\theta}$$

ঠিক আছে কিনা আলোচনা কর।

এখানে, $\theta = 240^\circ$; $\therefore \quad \frac{\theta}{2} = 120^\circ$;

সুতরাং, $\sin \frac{1}{2}\theta = \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$$\cos \tfrac{1}{2}\theta = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}.$$

$$\therefore \quad \sin \tfrac{1}{2}\theta + \cos \tfrac{1}{2}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}(\sqrt{3}-1) > 0$$

এবং $\quad \sin \frac{1}{2}\theta - \cos \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1) > 0.$

সুতরাং,

$$\sin \tfrac{1}{2}\theta + \cos \tfrac{1}{2}\theta = +\sqrt{1+\sin\theta}$$

এবং $\sin \frac{1}{2}\theta - \cos \frac{1}{2}\theta = +\sqrt{1-\sin\theta}.$

উহাদের যোগ করিয়া পাই,

$$\sin \tfrac{1}{2}\theta = \tfrac{1}{2}\sqrt{1+\sin\theta} + \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\sin\theta}.$$

সুতরাং, প্রদত্ত সম্বন্ধটি সত্য নহে।

উদাহরণ 5. দেখাও যে,

$$2\cos 11\frac{1}{4}^\circ = \sqrt{2+\sqrt{(2+\sqrt{2})}}.$$

এখানে, $\quad \cos 22\frac{1}{2}^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos 45^\circ)}$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

$$\therefore \quad \cos 11\frac{1}{4}^\circ = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\cos 22\tfrac{1}{2}^\circ)}$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}})} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

$$\therefore \quad 2\cos 11\frac{1}{4}^\circ = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

উদাহরণ 6. দেখাও যে, $\tan 7°30' = \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2.$

[**Joint Ent. Ex. 1972 ; P.U. 1971**]

এখানে, $\sin 15° = \sin(45° - 30°)$

$$= \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30°$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}};$$

$$\cos 15° = \cos(45° - 30°)$$

$$= \cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30°$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

$$\therefore \quad \tan 7°30' = \frac{\sin 7°30'}{\cos 7°30'} = \frac{2\sin^2 7°30'}{2\sin 7°30' \cos 7°30'}$$

$$= \frac{1-\cos 15°}{\sin 15°} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}+1)(2\sqrt{2} - \sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$$

$$= \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2.$$

উদাহরণ 7. প্রমাণ কর :

$(\cos^2 66° - \sin^2 6°)(\cos^2 48° - \sin^2 12°) = \frac{1}{16}.$ [**Cal. Int. 1949**]

বামপক্ষ $= \cos(66° + 6°)\cos(66° - 6°) \times \cos(48° + 12°)\cos(48° - 12°)$

$$= \cos 72° \cos 60° \cos 60° \cos 36°$$

$$= \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1) \times \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}+1) = \tfrac{1}{16}.$$

উদাহরণ 8. প্রমাণ কর : $\tan 6° \tan 42° \tan 66° \tan 78° = 1.$

বাম পক্ষ $= \dfrac{\sin 6° \sin 42° \sin 66° \sin 78°}{\cos 6° \cos 42° \cos 66° \cos 78°}$

$$= \frac{2\sin 6° \sin 66°}{2\cos 6° \cos 66°} \times \frac{2\sin 42° \sin 78°}{2\cos 42° \cos 78°}$$

$$= \frac{\cos 60° - \cos 72°}{\cos 60° + \cos 72°} \times \frac{\cos 36° - \cos 120°}{\cos 36° + \cos 120°}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)} \times \frac{\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1) + \frac{1}{2}}{\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1) - \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{3 - \sqrt{5}}{\sqrt{5}+1} \times \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} = \frac{9-5}{5-1} = 1.$$

উদাহরণ 9. $\tan\frac{1}{2}\theta=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}.\ \tan\frac{1}{2}\phi$ হইলে, দেখাও যে,

$$\cos\phi=\frac{\cos\theta-e}{1-e\cos\theta}.$$

[H. S. 1971 ; Joint Ent. Ex. 1972]

প্রদত্ত শর্ত হইতে,

$$\tan^2\tfrac{1}{2}\phi=\frac{1+e}{1-e}.\ \tan^2\tfrac{1}{2}\theta$$

$$\therefore\quad \cos\phi=\frac{1-\tan^2\frac{1}{2}\phi}{1+\tan^2\frac{1}{2}\phi}=\frac{1-\frac{1+e}{1-e}.\ \tan^2\frac{1}{2}\theta}{1+\frac{1+e}{1-e}.\ \tan^2\frac{1}{2}\theta}$$

$$=\frac{(1-e)\cos^2\frac{1}{2}\theta-(1+e)\sin^2\frac{1}{2}\theta}{(1-e)\cos^2\frac{1}{2}\theta+(1+e)\sin^2\frac{1}{2}\theta}$$

$$=\frac{(\cos^2\frac{1}{2}\theta-\sin^2\frac{1}{2}\theta)-e(\cos^2\frac{1}{2}\theta+\sin^2\frac{1}{2}\theta)}{(\cos^2\frac{1}{2}\theta+\sin^2\frac{1}{2}\theta)-e(\cos^2\frac{1}{2}\theta-\sin^2\frac{1}{2}\theta)}$$

$$=\frac{\cos\theta-e}{1-e\cos\theta}.$$

উদাহরণ 10. $\tan\alpha=\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\cos\beta+\cos\gamma}$ হইলে দেখাও যে, $\tan\frac{1}{2}\alpha$ এর একটি মান $\tan\frac{1}{2}\beta.\tan\frac{1}{2}\gamma$.

এখানে, $\sec^2\alpha=1+\tan^2\alpha=1+\frac{\sin^2\beta\sin^2\gamma}{(\cos\beta+\cos\gamma)^2}$

$$=\frac{(\cos\beta+\cos\gamma)^2+(1-\cos^2\beta)(1-\cos^2\gamma)}{(\cos\beta+\cos\gamma)^2}$$

$$=\frac{(1+\cos\beta\cos\gamma)^2}{(\cos\beta+\cos\gamma)^2}.$$

$$\therefore\quad \cos^2\alpha=\frac{(\cos\beta+\cos\gamma)^2}{(1+\cos\beta\cos\gamma)^2}.$$

এখন, $\cos\alpha=\frac{\cos\beta+\cos\gamma}{1+\cos\beta\cos\gamma}$ হইলে,

$$\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1+\cos\beta\cos\gamma-\cos\beta-\cos\gamma}{1+\cos\beta\cos\gamma+\cos\beta+\cos\gamma}$$

$$=\frac{(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma)}{(1+\cos\beta)(1+\cos\gamma)};$$

বা, $\frac{2\sin^2\frac{1}{2}\alpha}{2\cos^2\frac{1}{2}\alpha}=\frac{2\sin^2\frac{1}{2}\beta\cdot2\sin^2\frac{1}{2}\gamma}{2\cos^2\frac{1}{2}\gamma\cdot2\cos^2\frac{1}{2}\gamma}$;

বা, $\tan^2\frac{1}{2}\alpha=\tan^2\frac{1}{2}\beta\cdot\tan^2\frac{1}{2}\gamma$.

$\therefore$ $\tan\frac{1}{2}\alpha$ এর একটি মান $\tan\frac{1}{2}\beta.\tan\frac{1}{2}\gamma$.

প্রশ্নমালা 7

1. দেখাও যে,

(i) $\dfrac{\sin A}{1-\cos A}=\cot\dfrac{A}{2}$; (ii) $\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\cot\frac{1}{2}\theta$;

[P. U. 1974]

(iii) $\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta=\cot\frac{1}{2}\theta$; (iv) $\sec\theta+\tan\theta=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\theta\right)$;

(v) $(\cos\alpha+\cos\beta)^2+(\sin\alpha+\sin\beta)^2=4\cos^2\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$;

(vi) $(\cos A-\cos B)^2+(\sin A-\sin B)^2=4\sin^2\frac{1}{2}(A-B)$;

(vii) $\dfrac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}\cdot\dfrac{\cos\theta}{1+\cos\theta}=\tan\frac{1}{2}\theta$;

(viii) $\dfrac{2\sin\theta+\sin 2\theta}{2\sin\theta-\sin 2\theta}=\cot^2\frac{1}{2}\theta$;

(ix) $\dfrac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}=\tan\frac{1}{2}\theta$;

(x) $\dfrac{1+\tan\frac{1}{2}A}{1-\tan\frac{1}{2}A}=\dfrac{1+\sin A}{\cos A}$;

(xi) $\dfrac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi}=\tan^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\phi}{2}\right)$;

(xii) $\dfrac{\sin\frac{1}{2}\alpha-\sqrt{1+\sin\alpha}}{\cos\frac{1}{2}\alpha-\sqrt{1+\sin\alpha}}=\cot\frac{1}{2}\alpha,\ (0<\alpha<\pi)$;

(xiii) $\tan\dfrac{A+B}{2}+\tan\dfrac{A-B}{2}=\dfrac{2\sin A}{\cos A+\cos B}$;

(xiv) $(1+\tan\frac{1}{2}\theta+\sec\frac{1}{2}\theta)(1+\tan\frac{1}{2}\theta-\sec\frac{1}{2}\theta)=\sin\theta\sec^2\frac{1}{2}\theta$;

(xv) $\cot\frac{1}{2}(\phi-\theta)-\sin\theta\sin\frac{1}{2}(\phi+\theta)=\cos\theta\cos\frac{1}{2}(\phi+\theta)$;

(xvi) $\cot\beta=\frac{1}{2}(\cot\frac{1}{2}\beta-\tan\frac{1}{2}\beta)$;

(xvii) $8\sin^4\frac{1}{2}\theta-8\sin^2\frac{1}{2}\theta+1=\cos 2\theta$.

2. মান নির্ণয় কর :

(i) $\sec 22\frac{1}{2}^\circ$; (ii) $\cos 105^\circ$; (iii) $\tan 9^\circ$;

(iv) $\sin 21^\circ$; (v) $\sin^2 24^\circ-\sin^2 6^\circ$.

3. দেখাও যে,

(i) $\cos 15^\circ-\sin 15^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$;

(ii) $\cos 36^\circ=\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$; **[H. S. 1971]**

(iii) $2 \sin 15° \sin 75° = \frac{1}{2}$;

(iv) $\cos^2 36° + \sin^2 18° = \frac{3}{4}$;

(v) $\cos^2 48° - \sin^2 12° = \frac{1}{8}(\sqrt{5}+1)$.

4. দেখাও যে,

(i) $\cos 6° \cos 42° \cos 66° \cos 78° = \frac{1}{16}$; **[H. S. 1969]**

(ii) $\sin 6° \sin 42° \sin 66° \sin 78° = \frac{1}{16}$;

(iii) $(\sin^2 24° - \sin^2 6°)(\sin^2 42° - \sin^2 12°) = \frac{1}{16}$;

(iv) $(\cos^2 51° - \sin^2 21°)(\cos^2 33° - \sin^2 3°) = \frac{3}{16}$;

(v) $\cos^2 18° \sin^2 36° - \sin 18° \cos 36° = \frac{1}{16}$;

(vi) $\sin^2 72° \cos^2 54° - \sin 54° \cos 72° = \frac{1}{16}$.

5. কোন তালিকা ব্যবহার না করিয়া দেখাও যে,

$$\frac{1}{2} \cos \frac{3\pi}{13} + \frac{1}{2} \cos \frac{5\pi}{13} - \cos \frac{9\pi}{13} \cos \frac{12\pi}{13} = 0$$ **[H. S. 1976]**

6. দেখাও যে,

$$\cos \frac{2\pi}{15} \cos \frac{4\pi}{15} \cos \frac{8\pi}{15} \cos \frac{14\pi}{15} = \frac{1}{16}.$$

7. মান নির্ণয় কর :

$$\cos^2 \frac{\pi}{16} + \cos^2 \frac{3\pi}{16} + \cos^2 \frac{5\pi}{16} + \cos^2 \frac{7\pi}{16}.$$ **[H. S. Sup. 1973]**

8. দেখাও যে,

$$\cos^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \cos^4 \frac{5\pi}{8} + \cos^4 \frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}.$$

9. দেখাও যে, $\sin \theta = 2^n \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2^2} \cos \frac{\theta}{2^3} \cdots\cdots\cdots \cos \frac{\theta}{2^n}\right) \sin \frac{\theta}{2^n}$.

10. প্রমাণ কর :

$$\cos \frac{\pi}{32} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}.$$ **[Joint. Ent. Ex. 1974]**

11. $\sec(\phi + \alpha) + \sec(\phi - \alpha) = \left(\frac{2 \cos \phi}{1 + \cos \alpha}\right)$ হইলে,

দেখাও যে, $\cos \phi = \pm \sqrt{2} \cos \frac{1}{2} \alpha$. **[H. S. 1976]**

12. $\cos \theta = \frac{\cos \alpha - \cos \beta}{1 - \cos \alpha \cos \beta}$ হইলে, দেখাও যে, $\tan \frac{1}{2} \theta$ এর একটি মান $(\tan \frac{1}{2} \alpha . \cot \frac{1}{2} \beta)$.

13. $\cot \theta = -\frac{119}{169}$ হইলে, যেখানে $270° < \theta < 360°$, $\sec \frac{1}{2}\theta$ এবং $\cot \frac{1}{2}\theta$ এর মান বাহির কর।

14. $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ এবং $\cos \beta = -\frac{3}{5}$ হইলে, যেখানে $0° < \alpha < 90°$, $90° < \beta < 180°$, $\cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ এর মান বাহির কর। দেখাও যে, $\beta = 90° + \alpha$.

15. $\sin A = -\frac{12}{13}$ হইলে, যেখানে $180° < A < 270°$, $\tan \frac{1}{2} A$ এর মান বাহির কর।

16. $\theta = -300°$ হইলে,

$\tan \frac{1}{2}\theta = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}}$ এর চিহ্ন ঠিক করিয়া লিখ।

17. $\theta = 400°$ হইলে,

$\tan \frac{1}{2}\theta = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \tan^2\theta}}{\tan\theta}$ এর চিহ্নগুলি শুদ্ধ কর।

18. $\theta = -225°$ হইলে,

$\tan \frac{1}{2}\theta = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \tan^2\theta}}{\tan\theta}$ এর সাহায্যে $\tan \frac{1}{2}\theta$ এর মান বাহির কর।

19. $\theta = 560°$ হইলে,

$\sin \frac{1}{2}\theta = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1 + \sin\theta} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - \sin\theta}$ এর চিহ্নগুলি শুদ্ধ কর।

20. $\theta = -240°$ হইলে,

$\cos \frac{1}{2}\theta = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1 + \sin\theta} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - \sin\theta}$ এর শুদ্ধ চিহ্ন কি কি?

সপ্তম অধ্যায়

ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলী

(Trigonometrical Identities)

7-1. উপস্থাপন।

তিন বা ততোধিক কোণের মধ্যে কোন সম্বন্ধ থাকিলে বিশেষ করিয়া তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ হইলে ঐ কোণসমূহের ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাতগুলির মধ্যে নানা প্রকারের প্রয়োজনীয় অভেদাবলী প্রতিষ্ঠিত করা যাইবে।

নিম্নোল্লিখিত সিদ্ধান্তগুলি প্রায়শঃ নানাবিধ প্রশ্ন সমাধানে বিশেষ আবশ্যক হইবে।

[1] A, B, C একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণ হইলে, অর্থাৎ,

$A+B+C=\pi\ (=180°)$ হইলে,

$A+B=\pi-C;\ B+C=\pi-A;\ C+A=\pi-B.$

সুতরাং, $\sin(A+B)=\sin C$; $\cos(A+B)=-\cos C$; ইত্যাদি।

$\tan(A+B)=-\tan C$; $\cot(A+B)=-\cot C$; ইত্যাদি।

[2] A, B, C একটি ত্রিভুজের কোণ হইলে, অর্থাৎ, $A+B+C=\pi\ (=180°)$ হইলে, $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}$.

$$\therefore\ \frac{A}{2}+\frac{B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2};\quad \frac{B}{2}+\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2};\quad \frac{C}{2}+\frac{A}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}.$$

সুতরাং,

$$\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\cos\frac{C}{2};\quad \cos\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\sin\frac{C}{2};$$

$$\tan\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\cot\frac{C}{2};\quad \cot\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\tan\frac{C}{2};$$ ইত্যাদি।

নিম্নে প্রদত্ত সমাধানগুলি বিশেষভাবে মনে রাখা দরকার।

উদাহরণ 1. $A+B+C=\pi$ **হইলে প্রমাণ কর যে,**

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C.$$

বাম পক্ষ $=(\sin 2A+\sin 2B)+\sin 2C$

$=2\sin(A+B)\cos(A-B)+2\sin C\cos C$

$=2\sin C\cos(A-B)+2\sin C\cos C$

[$\because\ \sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$]

$= 2\sin C\{\cos(A-B)+\cos C\}$

$= 2\sin C\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\}$

$[\because \cos(A+B)=\cos(\pi-C)=-\cos C]$

$= 2\sin C\{2\sin A\sin B\}$

$= 4\sin A\sin B\sin C.$

উদাহরণ 2. $A+B+C=\pi$ **হইলে, প্রমাণ কর যে,**

$$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-4\cos A\cos B\cos C-1.$$

বাম পক্ষ $=(\cos 2A+\cos 2B)+\cos 2C.$

$= 2\cos(A+B)\cos(A-B)+2\cos^2 C-1$

$= -2\cos C\cos(A-B)+2\cos^2 C-1$

$[\because \cos(A+B)=\cos(\pi-C)=-\cos C]$

$= -2\cos C\{\cos(A-B)-\cos C\}-1$

$= -2\cos C\{\cos(A-B)+\cos(A+B)\}-1$

$= -2\cos C\{2\cos A\cos B\}-1$

$= -4\cos A\cos B\cos C-1.$

উদাহরণ 3. $A+B+C=\pi$ **হইলে, দেখাও যে,**

$$\tan 2A+\tan 2B+\tan 2C=\tan 2A\tan 2B\tan 2C.$$

$\because A+B+C=\pi,$

$\therefore 2A+2B=2\pi-2C;$

$\therefore \tan(2A+2B)=\tan(2\pi-2C)=-\tan 2C.$

বা, $\dfrac{\tan 2A+\tan 2B}{1-\tan 2A\tan 2B}=-\tan 2C$

বা, $\tan 2A+\tan 2B+\tan 2C=\tan 2A\tan 2B\tan 2C.$

উদাহরণ 4. $A+B+C=\pi$ **হইলে, প্রমাণ কর যে,**

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

বাম পক্ষ $=(\sin A+\sin B)+\sin C$

$= 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}+2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

$= 2\cos\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}+2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

$\left[\because \dfrac{A+B}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}\right]$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right\}$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left\{\cos\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right)+\cos\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)\right\}$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left\{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\right\}$$

$$=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

উদাহরণ 5. $\mathbf{A+B+C=\pi}$ **হইলে, প্রমাণ কর যে,**

$$\mathbf{\cos A+\cos+B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}.$$

[H. S. Int. 1978]

বামপক্ষ $=(\cos A+\cos B)+\cos C$

$$=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$\left[\because\ \frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right]$$

$$=2\sin\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right\}+1$$

$$=2\sin\frac{C}{2}\left\{\cos\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right)-\cos\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)\right\}+1$$

$$=2\sin\frac{C}{2}\left\{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right\}+1$$

$$=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

উদাহরণ 6. $\mathbf{A+B+C=\pi}$ **হইলে, প্রমাণ কর যে,**

$$\mathbf{\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C}.$$

$\because\ A+B+C=\pi,$

$\therefore\ A+B=\pi-C.$

সুতরাং, $\tan(A+B)=\tan(\pi-C)=-\tan C;$

বা, $\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C.$

$\therefore\ \tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C.$

উদাহরণ 7. $A+B+C=\pi$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}=1+\sin\frac{\pi-A}{4}\sin\frac{\pi-B}{4}\sin\frac{\pi-C}{4};$$

বা, $$=1+4\sin\frac{B+C}{4}\sin\frac{C+A}{4}\sin\frac{A+B}{4}$$

বাম পক্ষ $=\left\{\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}\right\}+\cos\frac{A+B}{2}$ $\left[\because\ \frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right]$

$$=2\sin\frac{A+B}{4}\cos\frac{A-B}{4}+1-2\sin^2\frac{A+B}{4}$$

$$=2\sin\frac{A+B}{4}\left\{\cos\frac{A-B}{4}-\sin\frac{A+B}{4}\right\}+1$$

$$=2\sin\frac{A+B}{4}\left\{\cos\frac{A-B}{4}-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{4}\right)\right\}+1$$

$$=2\sin\frac{\pi-C}{4}\left\{2\sin\frac{\pi-B}{4}\sin\frac{\pi-A}{4}\right\}+1$$

$$=1+4\sin\frac{\pi-A}{4}\sin\frac{\pi-B}{4}\sin\frac{\pi-C}{4}$$

$$=1+4\sin\frac{B+C}{4}\sin\frac{C+A}{4}\sin\frac{A+B}{4}$$

উদাহরণ 8. $A+B+C=\pi$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}=4\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi-B}{4}\cos\frac{\pi-C}{4}$$

$$=4\cos\frac{B+C}{4}\cos\frac{C+A}{4}\cos\frac{A+B}{4}.$$

বাম পক্ষ $=\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}\right)+\sin\frac{A+B}{2}$

$$=2\cos\frac{A+B}{4}\cos\frac{A-B}{4}+2\sin\frac{A+B}{4}\cos\frac{A+B}{4}$$

$$=2\cos\frac{A+B}{4}\left\{\cos\frac{A-B}{4}+\sin\frac{A+B}{4}\right\}$$

$$=2\cos\frac{A+B}{4}\left\{\cos\frac{A-B}{4}+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{4}\right)\right\}$$

$$=2\cos\frac{\pi-C}{4}\left\{2\cos\frac{\pi-B}{4}\cos\frac{\pi-A}{4}\right\}$$

$$=4\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi-B}{4}\cos\frac{\pi-C}{4}$$

$$=4\cos\frac{B+C}{4}\cos\frac{C+A}{4}\cos\frac{A+B}{4}.$$

উদাহরণ 1. প্রধান মান নির্ণয় কর :

(i) $\sin^{-1}(\sqrt{3}/2)$; (ii) $\cos^{-1}0$; (iii) $\cos^{-1}(-1/2)$; (iv) $\sec^{-1}(2)$.

(i) $\pi/3$; (ii) $\pi/2$; (iii) $2\pi/3$; (iv) $\pi/3$.

উদাহরণ 2. সাধারণ মান বাহির কর :

(i) $\cos^{-1}(\sqrt{3}/2)$; (ii) $\cot^{-1}(\sqrt{3})$; (iii) $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$;

(iv) $\sec^{-1}2$; (v) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

(i) $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$; (ii) $n\pi + \frac{\pi}{6}$; (iii) $n\pi - \frac{\pi}{3}$;

(iv) $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$; (v) $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}$.

উদাহরণ 3. সরল কর :

(i) $\sin \sin^{-1}(\frac{1}{2})$; (ii) $\cos \sin^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$.

(iii) $\sin^{-1}\tan\left(\frac{-\pi}{4}\right)$; (iv) $\tan^{-1}\cot(230°)$.

(i) $\sin \sin^{-1}(\frac{1}{2}) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$;

(ii) $\cos \sin^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$;

(iii) $\sin^{-1} \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sin^{-1}(-1) = -\pi/2$;

(iv) $\tan^{-1}\cot(230°) = \tan^{-1}(\cot 50°) = \tan^{-1}(\tan 40°) = 40°$.

উদাহরণ 4. দেখাও যে,

(i) $\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3} = \pi/4$;

(ii) $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} + \sin^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}} = \pi/2$. [P. U. 1976]

(i) বাম পক্ষ $= \tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}.\frac{1}{3}} = \tan^{-1}1 = \pi/4$;

(ii) বাম পক্ষ $= \sin^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{1-\frac{4}{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{1-\frac{1}{5}}\right\}$

$= \sin^{-1}\{\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\} = \sin^{-1}(1) = \pi/2$.

উদাহরণ 5. দেখাও যে,

(i) $2\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{4}=\tan^{-1}\frac{32}{43}$. [H. S. 1965]

(ii) $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\sin^{-1}\frac{5}{13}+\sin^{-1}\frac{16}{65}=\pi/2$. [P. U. 1968]

(i) $2\tan^{-1}\frac{1}{5}=\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{5}$

$$=\tan^{-1}\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}}=\tan^{-1}\frac{5}{12}$$

$\therefore$ বাম পক্ষ $=\tan^{-1}\frac{5}{12}+\tan^{-1}\frac{1}{4}$

$$=\tan^{-1}\frac{\frac{5}{12}+\frac{1}{4}}{1-\frac{5}{12}\cdot\frac{1}{4}}=\tan^{-1}\frac{32}{43}.$$

(ii) $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\sin^{-1}\frac{5}{13}=\sin^{-1}\{\frac{4}{5}\sqrt{1-\frac{25}{169}}+\frac{5}{13}\sqrt{1-\frac{16}{25}}\}$

$=\sin^{-1}\frac{63}{65}=\alpha$ হইলে,

$\sin\alpha=\frac{63}{65}$;

$\cos\alpha=\sqrt{1-(\frac{63}{65})^2}=\frac{16}{65}$.

$\therefore\ \alpha=\cos^{-1}\frac{16}{65}$.

অর্থাৎ, $\sin^{-1}\frac{63}{65}=\alpha=\cos^{-1}\frac{16}{65}$.

$\therefore$ বাম পক্ষ $=\cos^{-1}(\frac{16}{65})+\sin^{-1}(\frac{16}{65})=\pi/2$.

উদাহরণ 6. দেখাও যে,

$$\cot^{-1}\frac{ab+1}{a-b}+\cot^{-1}\frac{bc+1}{b-c}-\cot^{-1}\frac{ca+1}{c-a}=0$$

আমরা জানি, $\cot^{-1}x-\cot^{-1}y=\cot^{-1}\frac{yx+1}{y-x}$.

$\therefore$ বাম পক্ষ

$=(\cot^{-1}b-\cot^{-1}a)+(\cot^{-1}c-\cot^{-1}b)+(\cot^{-1}a-\cot^{-1}c)$

$=0=$ ডানপক্ষ।

উদাহরণ 7. প্রমাণ কর :

(i) $\sin(\cos^{-1}x)=\cos(\sin^{-1}x)$;

(ii) $\cos\tan^{-1}\cot\sin^{-1}x=x$;

(iii) $\sec^2(\tan^{-1}2)+\operatorname{cosec}^2(\cot^{-1}3)=15$.

(i) বাম পক্ষ $=\sin(\sin^{-1}\sqrt{1-x^2})=\sqrt{1-x^2}$;

ডান পক্ষ $=\cos(\cos^{-1}\sqrt{1-x^2})=\sqrt{1-x^2}$.

(ii) বাম পক্ষ $= \cos \tan^{-1}\cot \cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$

$$= \cos \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) = \cos \cos^{-1} x = x,$$

(iii) বাম পক্ষ $= \sec^2(\sec^{-1} \sqrt{5}) + \operatorname{cosec}^2 (\operatorname{cosec}^{-1} \sqrt{10})$

$$= (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{10})^2 = 5 + 10 = 15.$$

উদাহরণ 8. $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \pi/2$ **হইলে, দেখাও যে,**

$$xy + yz + zx = 1.$$

$\because \tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \pi/2 - \tan^{-1}z,$

$\therefore \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy} = \pi/2 - \tan^{-1}z;$

বা, $\frac{x+y}{1-xy} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}z\right)$

$= \cot \tan^{-1}z$

$= \cot \cot^{-1}(1/z) = 1/z.$

$\therefore (x+y)z = 1 - xy;$

অর্থাৎ, $xy + yz + zx = 1.$

উদাহরণ 9. $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y + \cos^{-1}z = \pi$ **হইলে, দেখাও যে,**

$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1.$ **[Joint Ent. Ex. 1967]**

$\because \cos^{-1}x + \cos^{-1}y + \cos^{-1}z = \pi,$

$\therefore \cos^{-1}x + \cos^{-1}y = \pi - \cos^{-1}z,$

বা, $\cos^{-1}\{xy - \sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-y^2}\} = \pi - \cos^{-1}z,$

বা, $xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} = \cos\{\pi - \cos^{-1}z\}$

$$= -\cos \cos^{-1}z = -z.$$

$\therefore xy + z = \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)};$

বা, $(xy+z)^2 = (1-x^2)(1-y^2);$

বা, $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1.$

উদাহরণ 10. সমাধান কর।

$$(i)\quad \sin^{-1}\frac{2a}{1+a^2}+\sin^{-1}\frac{2b}{1+b^2}=2\tan^{-1}x.$$

$$(ii)\quad \sin^{-1}x-\cos^{-1}x=\sin^{-1}(3x-2),$$

(i) যেহেতু, $2\tan^{-1}c=\sin^{-1}\frac{2c}{1+c^2}$,

প্রদত্ত সমীকরণের বাম পক্ষ

$$=2\tan^{-1}a+2\tan^{-1}b=2\tan^{-1}\frac{a+b}{1-ab}.$$

তাহা হইলে, প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই :

$$\tan^{-1}x=\tan^{-1}\frac{a+b}{1-ab},$$

$\therefore\quad x=\frac{a+b}{1-ab}$ যাহা সমীকরণকে সিদ্ধ করিবে।

(ii) $\because\quad \sin^{-1}x-\cos^{-1}x=\sin^{-1}(3x-2),$

$\therefore\quad \sin\{\sin^{-1}x-\cos^{-1}x\}=3x-2;$

বা, $\sin(\sin^{-1}x)\cos(\cos^{-1}x)-\cos(\sin^{-1}x)\sin(\cos^{-1}x)=3x-2;$

বা, $x.x-\cos(\cos^{-1}\sqrt{1-x^2})\sin(\sin^{-1}\sqrt{1-x^2})=3x-2;$

বা, $x^2-(\sqrt{1-x^2})(\sqrt{1-x^2})=3x-2;$

বা, $x^2-(1-x^2)=3x-2;$

বা, $2x^2-3x+1=0;$ বা, $(x-1)(2x-1)=0.$

$\therefore\quad x=1;\ \frac{1}{2}$ যাহারা প্রদত্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

উদাহরণ 11. সমাধান কর :

(i) $\sin^{-1}x=\cos^{-1}x$; (ii) $\tan^{-1}(2x)+\tan^{-1}(3x)=\pi/4.$

(i) $\because\quad \sin^{-1}x=\cos^{-1}x.$

$\therefore\quad \sin^{-1}x=\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$

সুতরাং, $x=\sqrt{1-x^2}$, বা, $x^2=1-x^2.$

$\therefore\quad x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$

$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ হইলে, $\sin^{-1}x=\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}=\pi/4;$

এবং $\cos^{-1}x=\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}=\pi/4.$

সুতরাং, $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ হইলে, বামপক্ষ = ডান পক্ষ।

এখন, $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ হইলে,

$\sin^{-1}x=\sin^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\pi/4$;

এবং $\cos^{-1}x=\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=3\pi/4$

তাহা হইলে, $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে না।

সুতরাং, নির্ণেয় সমাধান : $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(*ii*) প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই,

$$\tan^{-1}\frac{2x+3x}{1-(2x)(3x)}=\pi/4$$

$$\text{বা,}\quad \frac{5x}{1-6x^2}=\tan(\pi/4)=1,$$

$\therefore\ 5x=1-6x^2,\quad$ বা, $6x^2+5x-1=0,$

বা, $(x+1)(6x-1)=0,\quad \therefore\ x=-1\ ;\ 1/6.$

$x=1/6$ হইলে, $\tan^{-1}(2x)+\tan^{-1}(3x)$ এর মান

$$=\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \ldots \quad (1)$$

$$=\alpha+\beta>0,\quad (0<\alpha<\pi/2,\ 0<\beta<\pi/2)\ ;$$

এবং, (1) হইতে, বামপক্ষ $=\tan^{-1}\left(\frac{1/3+1/2)}{1-(1/3)(1/2)}\right)=\tan^{-1}1=\pi/4.$

সুতরাং, $x=1/6$ প্রদত্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

$x=-1$ হইলে, $\tan^{-1}(2x)+\tan^{-1}(3x)$ এর মান

$$=\tan^{-1}(-2)+\tan^{-1}(-3)$$

$$=-\gamma-\delta<0,\ (0<\gamma<\pi/2\ ;\ 0<\delta<\pi/2).$$

সুতরাং $x=-1$ প্রদত্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করে না।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $x=1/6.$

মন্তব্য : বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষক সম্বন্ধীয় সমীকরণ সমাধানে অনেক সময় **অবান্তর বীজ** (**Extraneous solution**) পাওয়া যাইতে পারে। অতএব, মূল সমীকরণে বীজগুলিকে বসাইয়া পরীক্ষা করিয়া লইতে হইবে।

প্রশ্নমালা 10

1. প্রধান মান নির্ণয় কর :

(*i*) $\sin^{-1} 1$; (*ii*) $\sin^{-1}(0)$; (*iii*) $\sin^{-1}(1/2)$;
(*iv*) $\cos^{-1} 1$; (*v*) $\cos^{-1}(\sqrt{3}/2)$; (*vi*) $\tan^{-1}(\sqrt{3})$;
(*vii*) $\sec^{-1}(-2)$; (*viii*) $\cot^{-1}(-1)$; (*ix*) $\operatorname{cosec}^{-1}(-2)$;
(*x*) $\cos^{-1}(-1/\sqrt{2})$.

2. সাধারণ মান বাহির কর :

(*i*) $\sin^{-1}(\frac{1}{2})$; (*ii*) $\sin^{-1}(-\sqrt{3}/2)$; (*iii*) $\cos^{-1}(0)$;
(*iv*) $\cos^{-1}(-\frac{1}{2})$; (*v*) $\tan^{-1}(-1)$; (*vi*) $\tan^{-1}(\sqrt{3})$;
(*vii*) $\cot^{-1}(\sqrt{3})$; (*viii*) $\sec^{-1}(+2)$; (*ix*) $\operatorname{cosec}^{-1}(-2)$;
(*x*) $\cos^{-1}(-1/\sqrt{2})$.

3. উত্তরগুলি ঠিক আছে কি না বল : ঠিক না থাকিলে, সঠিক উত্তরটি কি ?

(*i*) $\sin \sin^{-1}(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$; (*ii*) $\cos \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$;
(*iii*) $\tan \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$; (*iv*) $\sec \sec^{-1}(-2) = -2$;
(*v*) $\sin^{-1} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$; (*vi*) $\sin \cos^{-1}(-\sqrt{3}/2) = 1/2$;
(*vii*) $\cos^{-1} \sin 220° = 130°$; (*viii*) $\tan^{-1} \cot 230° = 40°$;
(*ix*) $\cos^{-1} \cos(-60°) = -60°$; (*x*) $\sec^{-1} \sec(-120°) = -120°$.

4. সরল কর :

(*i*) $\tan \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; (*ii*) $\cot \tan^{-1}(-\sqrt{3})$;
(*iii*) $\cos^{-1} \tan(-5\pi/4)$; (*iv*) $\sin^{-1} \tan(3\pi/4)$.

5. প্রমাণ কর :

(*i*) $\tan^{-1} \frac{1}{4} + \tan^{-1} \frac{3}{5} = \pi/4$;
(*ii*) $\tan^{-1} 4 - \cot^{-1}(\frac{1}{3}) = \cot^{-1} 13$;
(*iii*) $\tan^{-1} \frac{2}{11} + \cot^{-1} \frac{24}{7} = \cot^{-1} 2$;
(*iv*) $\tan^{-1} x + \cot^{-1} y = \tan^{-1} \frac{xy+1}{y-x}$; [P.U. 1963]
(*v*) $2 \tan^{-1} \frac{1}{3} + \tan^{-1} \frac{1}{7} = \pi/4$; [P.U. 1973]
(*vi*) $\tan^{-1} \frac{a-b}{1+ab} + \tan^{-1} \frac{b-c}{1+bc} = \tan^{-1} a - \tan^{-1} c$;

(vii) $\tan^{-1}\dfrac{b-c}{1+bc}+\tan^{-1}\dfrac{c-a}{1+ca}+\tan^{-1}\dfrac{a-b}{1+ab}=0$; [H.S. 1966]

(viii) $\tan^{-1}\dfrac{1}{p+q}+\tan^{-1}\dfrac{q}{p^2+pq+1}=\cot^{-1}p$;

(ix) $\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=\pi/4$;

(x) $\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{2}{9}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=\pi/4$;

(xi) $\tan^{-1}\frac{1}{3}+\cot^{-1}5+\cot^{-1}7+\tan^{-1}\frac{1}{8}=\pi/4$;

(xii) $2\cot^{-1}5+\cot^{-1}7+2\cot^{-1}8=\pi/4$; [P.U. 1970]

(xiii) $\cos^{-1}\frac{4}{5}+\tan^{-1}\frac{3}{5}=\tan^{-1}\frac{27}{11}$; [P.U. 1975]

(xiv) $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\tan^{-1}\frac{3}{4}=\pi/2$;

(xv) $2(\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{2}{9})=\cos^{-1}\frac{3}{5}$; [H.S. 1967]

(xvi) $\sin^{-1}\frac{77}{85}-\sin^{-1}\frac{3}{5}=\cos^{-1}\frac{15}{17}$;

(xvii) $\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{5}}+\cot^{-1}3=\pi/4$;

(xviii) $4\left(\tan^{-1}\frac{1}{3}+\cos^{-1}\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)=\pi$; [H.S. 1976]

(xix) $4(\cot^{-1}3+\operatorname{cosec}^{-1}\sqrt{5})=\pi$; [H.S. comp : 1975]

(xx) $4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{239}=\pi/4$; [Joint Ent. Ex. 1970]

6. দেখাও যে,

(i) $\sin(2\sin^{-1}x)=(2x\sqrt{1-x^2})$;

(ii) $\tan^{-1}\sqrt{x}=\frac{1}{2}\cos^{-1}\dfrac{1-x}{1+x}$;

(iii) $\frac{1}{2}\tan^{-1}x=\cos^{-1}\sqrt{\left(\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{1+x^2}}\right)}$; [H S. 1974]

(iv) $\{\cos(\sin^{-1}x)\}^2=\{\sin(\cos^{-1}x\}^2$; [P.U. 1974]

(v) $\tan^{-1}\frac{4}{3}+\tan^{-1}\frac{12}{5}=\pi-\tan^{-1}\frac{56}{33}$; [Joint Ent. Ex. 1967]

(vi) $\tan^{-1}x+\cot^{-1}(x+1)=\tan^{-1}(x^2+x+1)$;

(vii) $\tan^{-1}(\cot x)+\cot^{-1}(\tan x)=\pi-2x$;

যেখানে, $0<x<\pi/2$; [P.U. 1974]

(viii) $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}\left(\dfrac{1-x-y-xy}{1+x+y-xy}\right)=\dfrac{\pi}{4}$; [P. U. 1972]

(ix) $\tan(\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z)$

$=\cot(\cot^{-1}x+\cot^{-1}y+\cot^{-1}z)$;

(x) $\sin^{-1}\sqrt{\dfrac{x-b}{a-b}}=\cos^{-1}\sqrt{\dfrac{a-x}{a-b}}=\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{x-b}{a-x}}$;

(xi) $\tan\left(\frac{1}{2}\sin^{-1}\dfrac{2x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\cos^{-1}\dfrac{1-y^2}{1+y^2}\right)=\dfrac{x+y}{1-xy}$;

(xii) $2\tan^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\,.\tan\dfrac{x}{2}\right)=\cos^{-1}\left(\dfrac{a\cos x+b}{a+b\cos x}\right)$; **[P. U. 1970]**

(xiii) $\tan^{-1}(\frac{1}{2}\tan 2A)+\tan^{-1}(\cot A)+\tan^{-1}(\cot^3 A)=\pi$;
$0<A<\pi/4$; **[H. S. Comp. 1975]**

(xiv) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\cos^{-1}\dfrac{a}{b}\right)+\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\cos^{-1}\dfrac{a}{b}\right)=\dfrac{2b}{a}$. **[H. S. 1974]**

7. সমাধান কর :

(i) $\tan^{-1}x=\cot^{-1}x$; (ii) $\tan^{-1}x=\frac{1}{2}\cot^{-1}x$;

(iii) $\sin^{-1}(x)+\sin^{-1}(2x)=2\pi/3$; (iv) $\sin^{-1}x=\operatorname{cosec}^{-1}x$;

(v) $\tan^{-1}(2x)+\tan^{-1}(3x)=\pi/4$; (vi) $\tan\cos^{-1}x=\sin\tan^{-1}2$;

(vii) $\cot^{-1}x+\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\pi}{4}$; (viii) $2\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}=\dfrac{\pi}{3}$;

(ix) $\sin^{-1}(\sqrt{3}\,.\,x)+\sin^{-1}(x)=\pi/2$; **[H. S. 1976]**

(x) $\sin^{-1}\left(\dfrac{5}{x}\right)+\sin^{-1}\left(\dfrac{12}{x}\right)=\pi/2$; **[H. S. 1969]**

(xi) $\tan^{-1}(1+x)+\tan^{-1}(1-x)=\pi/4$; **[P. U. 1964]**

(xii) $\tan^{-1}(x)+\tan^{-1}(2x)+\tan^{-1}(3x)=\pi$; **[P. U. 1964]**

(xiii) $\tan^{-1}(x+1)+\tan^{-1}(x-1)=\tan^{-1}(4/7)$;

(xiv) $\cot^{-1}(x-1)+\cot^{-1}(x-2)+\cot^{-1}(x-3)=0$;

(xv) $3\sin^{-1}\dfrac{2x}{1+x^2}-4\cos^{-1}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}+2\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}=\pi/3$; **[H. S. 1972]**

(xvi) $\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}+\cot^{-1}\dfrac{1-x^2}{2x}=\pi/3$.

8. $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\pi$ হইলে, দেখাও যে,
$$x+y+z=xyz.$$

9. $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y+\sin^{-1}z=\pi$ হইলে, দেখাও যে,

(i) $x\sqrt{1-x^2}+y\sqrt{1-y^2}+z\sqrt{1-z^2}=2xyz$;

(ii) $(y+z-z)(z+x-y)(x+y-z)(x+y+z)=4x^2y^2z^2$.

10. $\tan^{-1}x$, $\tan^{-1}y$, $\tan^{-1}z$ সমান্তরীয় প্রগতিতে থাকিলে, x, y, z এর মধ্যে সম্বন্ধ স্থাপন কর। উপরন্তু, যদি x, y, z, সমান্তরীয় প্রগতিতে থাকে, তবে দেখাও যে, $x=y=z$; $[y\neq 0]$.

11. $xy=1+a^2$ হইলে, দেখাও যে,

$$\tan^{-1}\frac{1}{a+x}+\tan^{-1}\frac{1}{a+y}=\tan^{-1}\frac{1}{a}; \qquad (x+y+2a)\neq 0.$$

[Joint Ent. Ex. 1968]

12. ABC ত্রিভুজের C কোণ সমকোণ হইলে, প্রমাণ কর :

$$\tan^{-1}\frac{a}{b+c}+\tan^{-1}\frac{b}{c+a}=\pi/4.$$ **[Joint Ent. Ex. 1971]**

13. যদি $\tan^{-1}\dfrac{a}{b+c}+\tan^{-1}\dfrac{b}{c+a}=\pi/4$ হয়, তবে দেখাও যে,

একটি সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলি a, b, c হইবে ; $a>0, b>0, c>0$ হইলে।

[Joint Ent. Ex. 1969]

14. $\cos^{-1}\dfrac{x}{a}+\cos^{-1}\dfrac{y}{b}=\alpha$ হইলে, দেখাও যে,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{2xy}{ab}\cos\alpha+\frac{y^2}{b^2}=\sin^2\alpha.$$

[Joint Ent. Ex. 1975 ; P. U. 1971]

15. দেখাও যে, $\tan^{-1}\left(\dfrac{x\cos\phi}{1-x\sin\phi}\right)-\cot^{-1}\left(\dfrac{\cos\phi}{x-\sin\phi}\right)$ এর মান x নিরপেক্ষ ;

এবং মানটি বাহির কর। **[Joint. Ent. Ex. 1974]**

দশম অধ্যায়

ত্রিভুজের গুণাবলী

[Properties of Triangles]

10-1. উপস্থাপন :

একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণ এবং তিনটি বাহু মিলিয়া মোট ছয়টি অংশ থাকে। ABC ত্রিভুজের কোণ তিনটির পরিমাপকে A, B, C দ্বারা এবং উহাদের বিপরীত বাহু তিনটির পরিমাপকে যথাক্রমে a, b, c দ্বারা সূচিত করা হয়। ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলকে $\triangle$ দ্বারা, উহার অর্ধ-পরিসীমাকে s দ্বারা (অর্থাৎ, $2s=a+b+c$) প্রকাশ করা হয়। প্রসঙ্গতঃ বলা যায়, $A+B+C=180°$.

একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয় যে বৃত্তের উপর অবস্থিত তাহাকে ঐ ত্রিভুজের পরিবৃত্ত এবং উহার ব্যাসার্ধকে পরিব্যাসার্ধ বলা হয়। পরিব্যাসার্ধকে R দ্বারা সূচিত করা হয়। একটি ত্রিভুজের বাহু তিনটি যে বৃত্তের স্পর্শক (ঐ বৃত্তের কেন্দ্র ত্রিভুজের ভিতরে অবস্থিত) তাহাকে ঐ ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত বলে ; এবং ঐ অন্তর্বৃত্তের ব্যাসার্ধ r দ্বারা সূচিত হয়।

যে বৃত্ত ত্রিভুজের একটি বাহুকে এবং উহার অপর দুই বর্ধিত বাহুকে স্পর্শ করে, তাহাকে ঐ ত্রিভুজের বহির্বৃত্ত বলে। স্পষ্টতঃ, একটি ত্রিভুজের তিনটি বহির্বৃত্ত থাকিবে। A, B এবং C কোণের সম্মুখস্থ বহির্বৃত্ত তিনটির ব্যাসার্ধ যথাক্রমে r_1, r_2 এবং r_3 দ্বারা সূচিত হয়।

এই অধ্যায়ে, ত্রিভুজের কোণগুলি, বাহুত্রয়, ক্ষেত্রফল, পরিব্যাসার্ধ, অন্তর্ব্যাসার্ধ, বহির্বৃত্তের ব্যাসার্ধের মধ্যে যে সকল সম্বন্ধ বিদ্যমান তাহা স্থাপিত হইবে এবং তৎ-সংক্রান্ত বিবিধ প্রশ্নাবলীর সমাধান করা হইবে।

10-2. যে কোন ত্রিভুজে,

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

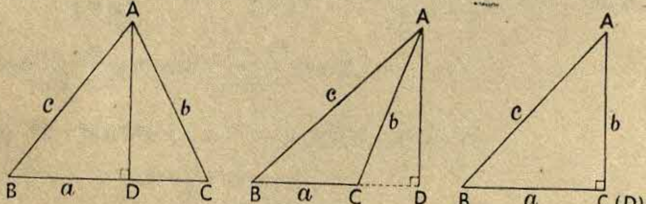


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

ধরা যাক্, ABC যে কোন ত্রিভুজ। প্রথম চিত্রে, C সূক্ষ্মকোণ ; দ্বিতীয় চিত্রে, C স্থূলকোণ এবং তৃতীয় চিত্রে C সমকোণ। প্রথম চিত্রে, BC-এর উপর AD, দ্বিতীয়

চিত্রে, বর্ধিত BC-এর উপর AD লম্ব, এবং তৃতীয় চিত্রে, BC-এর উপরে পাতিত AD লম্ব AC-এর সহিত মিলিত।

C সূক্ষ্মকোণ হইলে, চিত্র – 1 হইতে

ABD ত্রিভুজে, $AD = AB \sin B = c \sin B$;

এবং ACD ত্রিভুজে, $AD = AC \sin C = b \sin C$.

$$\therefore \quad c \sin B = AD = b \sin C \qquad \dots \qquad (1)$$

C স্থূলকোণ হইলে, চিত্র – 2 হইতে,

ABD ত্রিভুজে, $AD = AB \sin B = c \sin B$,

এবং ACD ত্রিভুজে, $AD = AC \sin (\pi - C) = b \sin C$.

$$\therefore \quad c \sin B = AD = b \sin C \qquad \dots \qquad (2)$$

সুতরাং, উভয় ক্ষেত্রে,

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \qquad \dots \qquad (3)$$

অনুরূপভাবে, B হইতে AC বা বর্ধিত AC-এর উপর লম্ব টানিয়া দেখানো যায়,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \qquad \dots \qquad (4)$$

সুতরাং, চিত্র – 1 এবং চিত্র – 2 এর জন্য

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \qquad \dots \qquad (5)$$

C সমকোণ হইলে, চিত্র – 3 হইতে,

$$\sin A = \frac{a}{c}, \ \sin B = \frac{b}{c}, \ \sin C = 1$$

সুতরাং, এইরূপক্ষেত্রে,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = c = \frac{c}{\sin C}, \ (\because \ C = 90°). \quad \dots \qquad (6)$$

সুতরাং, যে কোন ত্রিভুজের ক্ষেত্রে,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ

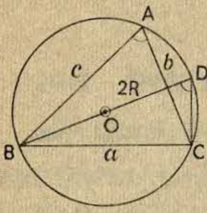


Fig. 1

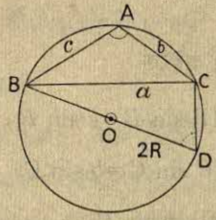


Fig. 2

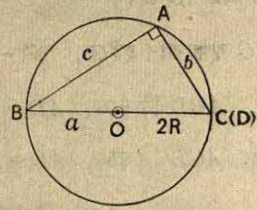


Fig. 3

মনে করা যাক্, ABC একটি ত্রিভুজ, যাহার পরিকেন্দ্র O এবং পরিব্যাসার্ধ R. A কোণটি সূক্ষ্মকোণ অথবা স্থূলকোণ হইলে, BO যোগ করিয়া পরিধি পর্যন্ত (অর্থাৎ, D বিন্দু পর্য্যন্ত) বর্ধিত করিলাম ; এবং CD যোগ করিলাম।

তাহা হইলে, $BD = 2R$; এবং $\angle BCD = 90°$.

A সমকোণ হইলে, O বিন্দু BC-এর মধ্যবিন্দু হইবে ; এবং তখন, $BC = 2R$.

A সূক্ষ্মকোণ হইলে, চিত্র – 1 হইতে,

$\angle BDC = \angle BAC = A$. তখন, BDC ত্রিভুজ হইতে,

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \text{ অর্থাৎ, } \frac{a}{\sin A} = 2R.$$

A স্থূলকোণ হইলে, চিত্র – 2 হইতে,

$\angle BDC = 180° - A$. তখন, BDC ত্রিভুজ হইতে,

$$\sin A = \sin (180° - A) = \frac{a}{2R} \quad \text{ অর্থাৎ, } \frac{a}{\sin A} = 2R.$$

A কোণটি সমকোণ হইলে, চিত্র-3 হইতে,

$$2R = BC = a = \frac{a}{\sin A}, \; (\because \; A = 90°).$$

সুতরাং, A কোণটি সূক্ষ্মকোণ, বা স্থূলকোণ, বা সমকোণ, যাহাই হউক না কেন,

$$\frac{a}{\sin A} = 2R. \qquad \dots \qquad (1)$$

অনুরূপভাবে, AO যোগ করিরা বর্ধিত করিলে যদি উহা পরিবৃত্তকে E বিন্দুতে ছেদ করে, তবে CE এবং BE যোগ করিয়া প্রমাণ করা যায় যে,

$$\frac{b}{\sin B} = 2R \text{ এবং } \frac{c}{\sin C} = 2R. \qquad \dots \qquad (2)$$

সুতরাং, (1) এবং (2) হইতে পাই,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

10–3. যে কোন ত্রিভুজে,

$$(1)\quad a = b\cos C + c\cos B\,;$$

$$(2)\quad b = c\cos A + a\cos C\,;$$

$$(3)\quad c = a\cos B + b\cos A.$$

10-2 অনুচ্ছেদের চিত্র-1 হইতে,

$$a = BC = BD + DC$$

$$= AB\cos \widehat{ABD} + AC\cos \widehat{ACD}$$

$$= c\cos B + b\cos C.$$

এবং চিত্র – 2 হইতে,

$$a = BC = BD - CD$$

$$= AB\cos \widehat{ABD} - AC\cos \widehat{ACD}$$

$$= c\cos B - b\cos(\pi - C)$$

$$= c\cos B + b\cos C.$$

এবং চিত্র – 3 হইতে,

$$a = BD = AB\cos \widehat{ABD} = c\cos B$$

$$= c\cos B + b\cos C,\quad (\because\ C = 90^\circ).$$

সুতরাং, সর্বক্ষেত্রেই,

$$a = b\cos C + c\cos B.$$

অনুরূপভাবে, অপর দুইটি সূত্র প্রমাণ করা যাইবে।

দ্বিতীয় পদ্ধতি ঃ

আমরা জানি, $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ এবং $A + B + C = \pi$.

$$\therefore\quad b\cos C + c\cos B$$

$$= 2R(\sin B\cos C + \cos B\sin C)$$

$$= 2R\sin(B + C) = 2R\sin(\pi - A)$$

$$= 2R\sin A = a.$$

সুতরাং $a = b\cos C + c\cos B$.

অনুরূপভাবে অপর দুইটি সূত্র প্রমাণ করা যাইবে।

10-4. যে কোন ত্রিভুজে,

(1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$;

(2) $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$;

(3) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$.

আমরা জানি, যে কোন ত্রিভুজে,

$$a = b \cos C + c \cos B \text{ ;}$$
$$b = c \cos A + a \cos C \text{ ;}$$
$$c = a \cos B + b \cos A.$$

$$\therefore\ b^2 + c^2 - a^2 = b \times b + c \times c - a \times a$$
$$= b(c \cos A + a \cos C)$$
$$+ c(a \cos B + b \cos A)$$
$$- a\ (b \cos C + c \cos B)$$
$$= 2bc \cos A$$

$$\therefore\ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

অনুরূপভাবে দেখানো যায়,

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

দ্বিতীয় পদ্ধতি ঃ

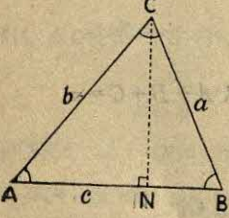


Fig. 1

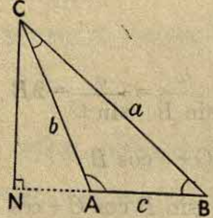


Fig. 2

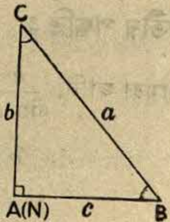


Fig. 3

ধরা যাক, ABC যে কোন ত্রিভুজ। চিত্র – 1 এতে A সূক্ষ্মকোণ, চিত্র – 2 এতে A স্থূলকোণ, এবং চিত্র – 3 এতে A সমকোণ। C হইতে AB(বা বর্ধিত BA) এর উপর CN লম্ব টানি।

চিত্র – 1 হইতে,

$$\begin{aligned} a^2 = BC^2 &= CN^2 + BN^2 \\ &= CN^2 + (AB - AN)^2 \\ &= (b \sin A)^2 + (c - b \cos A)^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A. \end{aligned}$$

চিত্র – 2 হইতে,

$$\begin{aligned} a^2 = BC^2 &= CN^2 + BN^2 \\ &= CN^2 + (BA + AN)^2 \\ &= b^2 \sin^2 (\pi - A) + \{c + b \cos (\pi - A)\}^2 \\ &= b^2 \sin^2 A + (c - b \cos A)^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A. \end{aligned}$$

চিত্র – 3 হইতে,

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \ (\because \ A = 90^\circ) \end{aligned}$$

সুতরাং, যে কোন ত্রিভুজে, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

অনুরূপভাবে, দেখানো যায়,

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$ এবং $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$.

বিশেষ দ্রষ্টব্য :

(a) (i) $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$;

(ii) $\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$;

(iii) $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

(b) (i) $\sin A = \dfrac{a}{2R}$; (ii) $\sin B = \dfrac{b}{2R}$; (iii) $\sin C = \dfrac{c}{2R}$.

(c) (i) $\tan A = \dfrac{abc}{R} \cdot \dfrac{1}{b^2 + c^2 - a^2}$;

(ii) $\tan B = \dfrac{abc}{R} \cdot \dfrac{1}{c^2 + a^2 - b^2}$;

(iii) $\tan C = \dfrac{abc}{R} \cdot \dfrac{1}{a^2 + b^2 - c^2}$.

(*d*) (i) $\cot B + \cot C = \dfrac{2aR}{bc}$;

(ii) $\cot C + \cot A = \dfrac{2bR}{ca}$;

(iii) $\cot A + \cot B = \dfrac{2cR}{ab}$.

10-5. ABC ত্রিভুজে A, B, C কোণের বিপরীত বাহু তিনটির পরিমাপ যথাক্রমে a, b, c হইলে, এবং $a+b+c=2s$ লিখিলে,

[1] (*i*) $\sin \dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}}$; (*ii*) $\cos \dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}}$;

[2] (*i*) $\sin \dfrac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{ca}}$; (*ii*) $\cos \dfrac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{s(s-b)}{ca}}$;

[3] (*i*) $\sin \dfrac{C}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{ab}}$; (*ii*) $\cos \dfrac{C}{2} = \sqrt{\dfrac{s(s-c)}{ab}}$.

$a+b+c=2s$ হইলে,

$a+b-c=2(s-c)$; $b+c-a=2(s-a)$; $c+a-b=2(s-b)$.

এখন, $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,

$$\therefore \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

সুতরাং,

$$1-\cos A = 1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc};$$

বা, $$2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc};$$

বা, $$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{a^2-(b-c)^2}{4bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}$$

$$= \frac{2(s-c).2(s-b)}{4bc} = \frac{(s-b)(s-c)}{bc}.$$

$$\therefore \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}; \quad (\because\ 0<\tfrac{1}{2}A<\pi/2.)$$

আবার,

$$1+\cos A = 1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc};$$

এখন, $\cos 2x = 0$ হইলে,

$$2x = (2n+1)\frac{\pi}{2}\ ;\ \text{অর্থাৎ},\ x = (2n+1)\frac{\pi}{4}.$$

আবার, $2\cos x + 1 = 0$ হইলে,

$$\cos x = -\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right);$$

অর্থাৎ, $x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $x = (2n+1)\frac{\pi}{4}\ ;\ 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$,

যেখানে, $n = 0$ (শূন্য) অথবা যে কোন পূর্ণসংখ্যা।

(v) প্রদত্ত সমীকরণ হইতে,

$$(\tan x + \tan 2x) + \frac{\tan x + \tan 2x}{1 - \tan x \tan 2x} = 0\ ;$$

বা, $(\tan x + \tan 2x)\left\{1 + \frac{1}{1 - \tan x \tan 2x}\right\} = 0\ ;$

এখন, $\tan x + \tan 2x = 0$ হইলে,

$\tan 2x = -\tan x = \tan(-x)$.

$\therefore\ 2x = n\pi + (-x)$: অর্থাৎ, $x = n\pi/3$.

এবং, $1 + \frac{1}{1 - \tan x \tan 2x} = 0$ হইলে,

$$\tan x.\tan 2x = 2\ ;$$

বা, $\tan x.\frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} = 2\ ;$

বা, $2\tan^2 x = 1\ ;$

বা, $\tan x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \tan(\pm\alpha)$, (ধরি)।

$\therefore\ x = n\pi \pm \alpha.$

সুতরাং, নির্ণেয় সমাধান :

$$\boldsymbol{x = n\pi/3\ ;\quad n\pi \pm \alpha,}$$

যেখানে, $n = 0$ (শূন্য) অথবা যে কোন পূর্ণসংখ্যা, এবং $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

উদাহরণ 2. সমাধান কর :

$\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}, (-2\pi\leq\theta\leq 2\pi)$. [H. S. 1975]

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই,

$\sqrt{3}\times\cos\theta+1\times\sin\theta=\sqrt{2}$. ... (1)

ধরা যাক্, $\sqrt{3}=r\cos\alpha$ এবং $1=r\sin\alpha$. ... (2)

তাহা হইলে, $(r\cos\alpha)^2+(r\sin\alpha)^2=3+1$; অর্থাৎ, $r=2$;

এবং $\dfrac{r\sin\alpha}{r\cos\alpha}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

বা, $\tan\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\tan(\pi/6)$, অর্থাৎ, $\alpha=\pi/6$.

তাহা হইলে, (1) হইতে পাই,

$r\cos\alpha\times\cos\theta+r\sin\alpha\times\sin\theta=\sqrt{2}$;

বা, $\cos\alpha\cos\theta+\sin\alpha\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{r}$;

বা, $\cos(\theta-\alpha)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\cos(\pi/4)$.

$\therefore\ \theta-\alpha=2n\pi\pm\dfrac{\pi}{4}$.

অর্থাৎ, $\theta=2n\pi\pm\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6}$,

যেখানে, $n=0$ (শূন্য) অথবা যে কোন পূর্ণসংখ্যা।

$n=0$ হইলে, $\theta=\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{4}$,

অর্থাৎ, $\theta=-15^\circ$; 75° বা, $\theta=\dfrac{-\pi}{12}$; $\dfrac{5\pi}{12}$.

$n=1$ হইলে, $\theta=2\pi\pm\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$,

অর্থাৎ, $\theta=345^\circ$; 435° ; বা, $\theta=23\pi/12$; $29\pi/12$.

$n=-1$ হইলে, $\theta=-2\pi\pm\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$,

অর্থাৎ, $\theta=-375^\circ$; -285° ; বা, $\theta=-25\pi/12$; $-19\pi/12$.

সুতরাং, নির্ণেয় সমাধান : $\theta=-285^\circ, -15^\circ, 75^\circ, 345^\circ$;

অর্থাৎ, $\theta=-\dfrac{19\pi}{12}, \dfrac{-\pi}{12}, \dfrac{5\pi}{12}, \dfrac{23\pi}{12}$.

উদাহরণ 3. সমাধান কর :

$4 \cos \theta + 5 \sin \theta = 5, (-\pi < \theta < \pi)$;

দেওয়া আছে, $\tan 51°21' = 5/4$.

এখানে, $r = +\sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$.

সুতরাং, প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই,

$$\frac{4}{\sqrt{41}} \cos \theta + \frac{5}{\sqrt{41}} \sin \theta = \frac{5}{\sqrt{41}}. \quad \ldots \quad (1)$$

আবার, দেওয়া আছে, $\tan 51°21' = \frac{5}{4}$.

$\therefore \quad \sin 51°21' = \frac{5}{\sqrt{41}}$ এবং $\cos 51°21' = \frac{4}{\sqrt{41}}$.

সুতরাং, (1) হইতে পাই,

$\cos \theta \cos 51°21' + \sin \theta \sin 51°21' = \sin 51°21'$;

বা, $\cos(\theta - 51°21') = \sin 51°21' = \cos(38°39')$.

$\therefore \quad \theta - 51°21' = 2n\pi \pm 38°39'$

অর্থাৎ, $\theta = 2n\pi \pm 38°39' + 51°21'$.

$n = 0$ হইলে, $\theta = \pm 38°39' + 51°21'$

অর্থাৎ, $\theta = 12°42'$; $90°$.

$n = 1$ হইলে, $\theta = 360° + 12°42'$; $360° + 90°$;

$n = -1$ হইলে, $\theta = -360° + 12°42'$; $-360° + 90°$; ইত্যাদি।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান :

$\theta = 12°42'$; $90°$.

উদাহরণ 4. সমাধান কর :

$\sin x + \cos x = \sqrt{2}, (0° < x < 500°)$.

যেহেতু, $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, অতএব, প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}};$$

বা, $\sin \frac{\pi}{4} \sin x + \cos \frac{\pi}{4} \cos x = 1$;

বা, $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$.

$\therefore \quad x - \frac{\pi}{4} = 2n\pi$.

অর্থাৎ, $x=2n\pi+\frac{\pi}{4}$,

যেখানে, $n=0$ (শূন্য) অথবা যে কোন পূর্ণসংখ্যা।

$n=0$ হইলে, $x=45^\circ$;

$n=1$ হইলে, $x=360^\circ+45^\circ=405^\circ$;

$n=-1$ হইলে, $x=-360^\circ+45^\circ=-315^\circ$; ইত্যাদি।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $x=45^\circ$; 405°.

দ্বিতীয় পদ্ধতি :

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই,

$(\sin x+\cos x)^2=2$;

বা, $\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=2$;

বা, $1+\sin 2x=2$;

বা, $\sin 2x=1=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore\quad 2x=2n\pi+\frac{\pi}{2}$.

অর্থাৎ, $x=n\pi+\frac{\pi}{4}$

যেখানে, $n=0$ (শূন্য) অথবা যে কোন পূর্ণসংখ্যা।

$n=0$ হইলে, $x=\frac{\pi}{4}=45^\circ$;

$n=1$ হইলে, $x=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}=225^\circ$;

$n=-1$ হইলে, $x=-\pi+\frac{\pi}{4}=-135^\circ$;

$n=2$ হইলে, $x=2\pi+\frac{\pi}{4}=405^\circ$;

$n=-2$ হইলে, $x=-2\pi+\frac{\pi}{4}=-315^\circ$; ইত্যাদি, ইত্যাদি।

লক্ষ্যণীয়, $x = 225°$, অর্থাৎ, $x = \frac{5\pi}{4}$ প্রদত্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করে না। ইহা প্রদত্ত সমীকরণের একটি **অবান্তর বীজ (Extraneous Solution)**।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান ঃ

$$x = 45°, 405°.$$

দ্রষ্টব্য ঃ $x = 225°$, $\sin x + \cos x = -\sqrt{2}$ এর বীজ বটে।

মন্তব্য ঃ সমীকরণ সমাধানের ক্ষেত্রে, **বর্গ করিয়া সমাধান** করিবার পদ্ধতি যতদূর সম্ভব পরিহার করিয়া চলা উচিত। এই পদ্ধতি অবলম্বন করিয়া প্রাপ্ত সমাধানগুলি প্রদত্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করে কিনা তাহা যাচাই করিয়া দেখাও উচিত; এবং যে বীজগুলি সমীকরণকে সিদ্ধ করিবে না, সেই অবান্তর বীজসমূহকে পরিত্যাগ করিতে হইবে।

প্রশ্নমালা 9

1. সমাধান কর ঃ

(i) $\cos^2\theta - \sin^2\theta = 1$; (ii) $2\cos^2\theta + 4\sin^2\theta = 3$;

(iii) $\cot^2 x + \operatorname{cosec}^2 x = 3$; (iv) $\tan^2\theta = 3\operatorname{cosec}^2\theta - 1$;

(v) $\tan^2 x + \cot^2 x = 2$; (vi) $\tan x + \cot x = 2$;

(vii) $\cot\theta - \tan\theta = 2$; [H. S. 1975]

(viii) $\cot x - \cot 2x = 2$; (ix) $\cot 2x = \sin x + \cos x$;

(x) $\cos 2\theta = \sin\theta\cos\theta$; (xi) $\cos 9x = \cos 5x - \cos x$;

(xii) $\sin x + \sin 5x = \sin 3x$; [H. S. 1966]

(xiii) $\cos 6x + \cos 4x = \sin 3x + \sin x$;

(xiv) $\cos x + \sin x = \cos 2x + \sin 2x$; [H. S. 1972]

(xv) $\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x = 0$; [H. S. 1976]

(xvi) $\sin 5\theta\cos 3\theta = \sin 9\theta\cos 7\theta$; [P. U. 1973

(xvii) $2\sin^2\theta + 3\cos\theta = 0$; [H. S. 1970]

(xviii) $\tan x + \tan 2x + \tan x\tan 2x = 1$;

(xix) $\tan x + \tan 2x + \tan 3x = \tan x\tan 2x\tan 3x$;

(*xx*) $\tan 3\theta = \tan 2\theta + \tan\theta$; [Joint Ent. Ex. 1973]

(*xxi*) $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=4$; [P. U. 1974]

(*xxii*) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$; [P. U. 1965]

(*xxiii*) $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$; $(-2\pi < x < 2\pi)$;

(*xxiv*) $\sin\theta + 2\cos\theta = 1$;

(*xxv*) $\tan\theta + \sec\theta = \sqrt{3}$; [P. U. 1971]

(*xxvi*) $2\cot x + \sin x = 2\operatorname{cosec} x$;

(*xxvii*) $2 - \cos x = 2\tan\frac{x}{2}$; [Joint Ent. Ex. 1976]

(*xxviii*) $1 - 2\cos x = \tan\frac{1}{2}x$;

(*xxix*) $1 + 5\cos x = \tan\frac{1}{2}x$.

2. $0°$ এবং $360°$ এর মধ্যবর্তী θ এর যে সমস্ত মান $\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta = 1$ কে সিদ্ধ করিবে সেই সমস্ত মান নির্ণয় কর।

3. $0°$ এবং $720°$ এর মধ্যবর্তী θ এর যে সমস্ত মান $\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta = \sqrt{2}$ কে সিদ্ধ করিবে সেইগুলি বাহির কর। [H. S. Comp. 1974]

4. সমাধান কর :

$3(\sec^2\theta + \tan^2\theta) = 5$; $(0° \leq \theta \leq 360°)$.

5. $\sin^3\theta + \cos^3\theta = 0$; $(0° < \theta < 360°)$. [Joint Ent. Ex. 1971]

6. সমাধান কর :

$2\sin^2\theta + \sin\theta = 3$, $(0° < \theta < 1000°)$

7. সমাধান কর :

$3\cos\alpha + 2\sin\alpha = 2$, $(0° < \alpha < 360°)$;

দেওয়া আছে $\tan 56°18'.5 = 3/2$.

8. সমাধান কর :

$2\sin^2\theta + \sin^2 2\theta = 2$, $(-\pi < \theta < \pi)$.

9. $0°$ এবং $180°$ এর মধ্যবর্তী θ এর যে সমস্ত মান $\sin\theta + \sin 5\theta = \sin 3\theta$ কে সিদ্ধ করে তাহা নির্ণয় কর। [H. S. 1965]

10. সমাধান কর :

$4(\cos^2\theta - \sin\theta) = 1$; $(0 \leqslant \theta \leqslant 360^\circ)$.

11. সমাধান কর :

$4 \sin\theta \cos\theta = 1 + 2\cos\theta - 2\sin\theta$, $(\theta < \theta < \pi)$

[Joint Ent. Ex. 1972]

12. সমাধান কর :

$1 + 2\sin\theta\cos\theta - 2\sin\theta - \cos\theta = 0$, $(0^\circ \leqslant \theta \leqslant 360^\circ)$.

[Joint Ent. Ex. 1967]

13. সমাধান কর :

$1 - 2\sin\theta - 2\cos\theta + \cot\theta = 0$, $(0 < \theta < 2\pi)$.

[Joint Ent. Ex. 1970]

14. দেখাও যে, $\tan ax = \tan bx$, $(a \neq b)$, সমীকরণের বীজগুলি সমান্তর প্রগতি গঠন করে।

15. α এবং β এর মান বাহির কর, যদি

(*i*) $\sin(\alpha - \beta) = 0$ এবং $\sin(\alpha + \beta = 1$;

(*ii*) $\tan\alpha + \tan\beta = 2$, এবং $2\cos\alpha\cos\beta = 1$.

নবম অধ্যায়

বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষক

[Inverse Circular Functions]

9-1. উপস্থাপন।

[a] বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষকের সংজ্ঞা ও প্রকাশ।

আমরা জানি, $\sin \theta = x$ হইলে, যেখানে x একটি নির্দিষ্ট বাস্তব রাশি, $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$, θ এর মান অসংখ্য থাকিবে, যাহারা প্রদত্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করিবে। প্রচলিত প্রথা অনুযায়ী, এই ক্ষেত্রে, θ কে $\sin^{-1} x$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং ইহা "**sine-inverse** x" এইরূপ পড়া হয়। তাহা হইলে, $\sin \theta = x$ হইলে, $\theta = \sin^{-1} x$. সুতরাং, $\sin^{-1} x$ দ্বারা কোণের পরিমাপকে বুঝাইবে।

সেইরূপ, $\cos \theta = x$, $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ হইলে, $\theta = \cos^{-1} x$;

$\tan \theta = x$, $(-\infty < x < \infty)$ হইলে, $\theta = \tan^{-1} x$;

$\cot \theta = x$, $(-\infty < x < \infty)$ হইলে, $\theta = \cot^{-1} x$;

$\sec \theta = x$, $(|x| \geqslant 1)$ হইলে, $\theta = \sec^{-1} x$;

$\operatorname{cosec} \theta = x$, $(|x| \geqslant 1)$ হইলে, $\theta = \operatorname{cosec}^{-1} x$;

এবং $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$, $\cot^{-1} x$, $\sec^{-1} x$, $\operatorname{cosec}^{-1} x$ এর প্রত্যেকটি দ্বারা কোণের পরিমাপকে বুঝাইবে, এবং ইহাদিগকে যথাক্রমে "*cosine-inverse x*" ; "*tan-inverse x*", ; "*cot-inverse x*", ; '*sec-inverse x*" ; এবং "*cosec-inverse x*" পড়া হয়।

[b] বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষকের সাধারণ ও প্রধান মান :

লক্ষ্যণীয়, $\sin \theta = \frac{1}{2}$ হইলে, সংজ্ঞা অনুসারে, $\sin^{-1} \frac{1}{2} = \theta$. কিন্তু আমরা জানি, $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; সুতরাং, $\sin^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. আবার, $\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, অর্থাৎ, $\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$; সুতরাং, $\sin^{-1} \frac{1}{2} = 5\pi/6$. সাধারণভাবে, $\sin \theta = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$ বলিয়া,

$\sin^{-1}(\frac{1}{2}) = \theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$, যেখানে $n = 0$ (শূন্য) অথবা যে কোন পূর্ণসংখ্যা।

তাহা হইলে, দেখা যাইতেছে, $\sin^{-1} \frac{1}{2}$ এর মান অসংখ্য হইবে। ইহাদের মধ্যে সাংখ্যমানে ক্ষুদ্রতম কোণটির পরিমাপ $\pi/6$, অর্থাৎ, $30°$.

(*i*) সাধারণভাবে $\sin \theta = x$, $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$, হইলে, $\sin \{n\pi + (-1)^n \theta\} =$ হইবে, যেখানে $n = 0$ (শূন্য) অথবা যে কোন পূর্ণসংখ্যা।

সুতরাং, $\sin^{-1}x$ এর অসংখ্য মান থাকিবে; ইহাদের মধ্যে সাংখ্যমানে ক্ষুদ্রতম যে মান α, $(-90°\leq\alpha\leq 90°)$, $\sin\theta=x$ কে সিদ্ধ করিবে; তাহাকে $\sin^{-1}x$ এর **প্রধান মান** বলা হয়।

তাহা হইলে, $\sin^{-1}x$ এর সাধারণ মান $n\pi+(-1)^n\alpha$ অর্থাৎ,

$$\sin^{-1}x=n\pi+(-1)^n\alpha,\quad(-\pi/2\leq\alpha\leq\pi/2).$$

(*ii*) $\cos\theta=x, (-1\leq x\leq 1)$ হইলে, θ অর্থাৎ, $\cos^{-1}x$ এর অসংখ্য মান থাকিবে। উহাদের মধ্যে ক্ষুদ্রতম যে মান α, $(0\leq\alpha\leq\pi)$, $\cos\theta=x$ কে সিদ্ধ করিবে, তাহাই $\cos^{-1}x$ এর **প্রধান মান**। তাহা হইলে, $\cos^{-1}x$ এর সাধারণ মান $2n\pi\pm\alpha$, অর্থাৎ,

$$\cos^{-1}x=2n\pi\pm\alpha,\quad(0\leq\alpha\leq\pi).$$

(*iii*) $\tan\theta=x, (-\infty<x<\infty)$ হইলে θ, অর্থাৎ, $\tan^{-1}x$ এর মান অসংখ্য থাকিবে। উহাদের মধ্যে সাংখ্যমানে ক্ষুদ্রতম যে মান α, $(-\pi/2<\alpha<\pi/2)$ $\tan\theta=x$ কে সিদ্ধ করিবে, তাহাই $\tan^{-1}x$ এর **প্রধান মান**।

তাহা হইলে, $\tan^{-1}x$ এর সাধারণ মান $n\pi+\alpha$, অর্থাৎ,

$$\tan^{-1}x=n\pi+\alpha,\quad(-\pi/2<\alpha<\pi/2).$$

(*iv*) $\cot\theta=x$ হইলে, $(-\infty<x<\infty)$, θ, অর্থাৎ, $\cot^{-1}x$ এর অসংখ্য মান থাকিবে। উহাদের মধ্যে সাংখ্যমানে ক্ষুদ্রতম যে মান α, $(-\pi/2\leq\alpha\leq\pi/2;\ \alpha\neq 0)$ $\cot\theta=x$ কে সিদ্ধ করিবে তাহাই $\cot^{-1}x$ এর **প্রধান মান**। তাহা হইলে, $\cot^{-1}x$ এর সাধারণ মান $n\pi+\alpha$, অর্থাৎ,

$$\cot^{-1}x=n\pi+\alpha,\ (\alpha\neq 0,\ -\pi/2\leq\alpha\leq\pi/2).$$

(*v*) $\sec\theta=x$, $(|x|\geq 1)$ হইলে, θ অর্থাৎ, $\sec^{-1}x$ এর অসংখ্য মান থাকিবে। উহাদের মধ্যে ক্ষুদ্রতম যে মান α, $(\alpha\neq\pi/2, 0\leq\alpha\leq\pi)$, $\sec\theta=x$ কে সিদ্ধ করিবে, তাহাই $\sec^{-1}x$ এর **প্রধান মান**। তাহা হইলে, উহার সাধারণ মান $2n\pi\pm\alpha$, অর্থাৎ,

$$\sec^{-1}x=2n\pi\pm\alpha,\ (\alpha\neq\pi/2,\ 0\leq\alpha\leq\pi).$$

(*vi*) $\operatorname{cosec}\theta=x$, $(|x|\geq 1)$, হইলে, θ, অর্থাৎ, $\operatorname{cosec}^{-1}x$ এর অসংখ্য মান থাকিবে। উহাদের মধ্যে সাংখ্যমানে ক্ষুদ্রতম যে মান α $(\alpha\neq 0,\ -\pi/2\leq\alpha\leq\pi/2)$, $\operatorname{cosec}\theta=x$ কে সিদ্ধ করিবে, তাহাই $\operatorname{cosec}^{-1}x$ এর **প্রধান মান**। তাহা হইলে, উহার সাধারণ মান $n\pi+(-1)^n\alpha$, অর্থাৎ,

$$\operatorname{cosec}^{-1}x=n\pi+(-1)^n\alpha,\ (\alpha\neq 0,-\pi/2\leq\alpha\leq\pi/2).$$

মন্তব্য ঃ অন্য কোন নির্দেশ না থাকিলে, যে কোন বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষকের মান বলিতে উহরে প্রধান মানকে বুঝাইবে ; ইহাই ধরিতে হইবে। বিশেষতঃ সংখ্যাগত উদাহরণের ক্ষেত্রে, উহাদের **প্রধান মান** লইয়া সরল করিতে হইবে। উদাহরণস্বরূপ, $\sin^{-1}\frac{1}{2}$ বলিতে উহার প্রধান মান $30°$ কে বুঝাইবে ঃ

সুতরাং.

(i) $\sin^{-1}\frac{1}{2}=\pi/6$; (ii) $\sin^{-1}(-\frac{1}{2})=-\pi/6$;

(iii) $\tan^{-1}\sqrt{3}=\pi/3$; (iv) $\cos^{-1}(0)=\pi/2$;

(v) $\cos^{-1}(-\frac{1}{2})=\pi-\cos^{-1}(\frac{1}{2})=2\pi/3$; ইত্যাদি।

$\sin^{-1}\frac{1}{2}=5\pi/6$ বলিলে, $\sin^{-1}\frac{1}{2}$ এর অসংখ্য মানের একটিকে বুঝাইবে, কিন্তু, উহা প্রধান মানকে বুঝাইবে না।

9-2. বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষকের মধ্যে পারস্পরিক সম্পর্ক।

(a) যদি, $\sin\theta=x, (-1\leq x\leq 1)$, হয়, তাহা হইলে, $\theta=\sin^{-1}x$; সুতরাং, $\mathbf{\sin\sin^{-1}x=x}$.

অনুরূপভাবে, $\mathbf{\cos\cos^{-1}x=x}$; $\mathbf{\tan\tan^{-1}x=x}$; $\mathbf{\cot\cot^{-1}x=x}$; $\mathbf{\sec\sec^{-1}x=x}$; $\mathbf{\operatorname{cosec}\operatorname{cosec}^{-1}x=x}$.

(b) যদি $\sin^{-1}x=\theta$ হয়, $(-1\leq x\leq 1)$, তাহা হইলে, $x=\sin\theta$; সুতরাং,

$$\mathbf{\sin^{-1}\sin\theta=\theta.}$$

অনুরূপভাবে, $\mathbf{\cos^{-1}\cos\theta=\theta}$; $\mathbf{\tan^{-1}\tan\theta=\theta}$; $\mathbf{\cot^{-1}\cot\theta=\theta}$; $\mathbf{\sec^{-1}\sec\theta=\theta}$; $\mathbf{\operatorname{cosec}^{-1}\operatorname{cosec}\theta=\theta}$.

দ্রষ্টব্য ঃ (i) $\sin(\sin^{-1}\frac{1}{2})=\sin\pi/6=\frac{1}{2}$;

(ii) $\cos\{\cos^{-1}(-\frac{1}{2})\}=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$;

(iii) $\sin^{-1}(\sin\pi/3)=\sin^{-1}(\sqrt{3}/2)=\pi/3$.

(ix) $\tan^{-1}(\tan\pi/4)=\tan^{-1}(1)=\pi/4$.

লক্ষ্যণীয় ঃ $\cos^{-1}\{\cos(-\pi/3)\}=\cos^{-1}(\frac{1}{2})=\pi/3$; যদিও, $\cos^{-1}(\frac{1}{2})$ এর একটি মান $-\pi/3$, উহার প্রধান মান $\pi/3$ বলিয়া, প্রদত্ত রাশির মান $\pi/3$ লওয়া হইয়াছে।

(c) যদি, $\sin^{-1}x=\theta, (x\neq 0)$ হয়, তাহা হইলে, $\sin\theta=x$.

সুতরাং, $\operatorname{cosec}\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}=\dfrac{1}{x}$.

এবং, $\theta=\operatorname{cosec}^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

$$\therefore \quad \sin^{-1} x=\operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right); \quad x\neq 0.$$

অনুরূপভাবে, দেখানো যায়,

$\cos^{-1} x=\sec^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right),\ x\neq 0$; এবং $\tan^{-1} x=\cot^{-1}(1/x),\ x\neq 0,\ \infty$.

(*d*) যদি, $\sin^{-1} x=\theta$ হয়, তবে $\sin\theta=x$.

সুতরাং, $\cos\theta=\sqrt{1-x^2}$; $\tan\theta=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

$$\cot\theta=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x};\ \sec\theta=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\operatorname{cosec}\theta=\frac{1}{x};\ (x\neq 0;\ x\neq \pm 1).$$

$$\therefore \quad \theta=\sin^{-1} x=\cos^{-1}(\sqrt{1-x^2})=\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=\sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\operatorname{cosec}^{-1}\frac{1}{x}.$$

9-3. প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী ঃ

(*i*) $\mathbf{\sin^{-1} x+\cos^{-1} x=\dfrac{\pi}{2}}$;

(*ii*) $\mathbf{\tan^{-1} x+\cot^{-1} x=\dfrac{\pi}{2}}$;

(*iii*) $\mathbf{\sec^{-1} x+\operatorname{cosec}^{-1} x=\dfrac{\pi}{2}}$.

(*i*) মনে করি, $\sin^{-1} x=\theta$; $\quad\therefore\ \sin\theta=x$.

এখন, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta=x$. $\quad\therefore\ \cos^{-1} x=\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$.

$$\therefore \quad \sin^{-1} x+\cos^{-1} x=\theta+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\pi}{2}.$$

(*ii*) মনে করি, $\tan^{-1} x=\theta$; $\quad\therefore\ \tan\theta=x$.

এখন, $\cot\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\theta=x$. $\quad\therefore\ \cot^{-1} x=\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$.

$$\therefore \quad \tan^{-1} x+\cot^{-1} x=\theta+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\pi}{2}.$$

(*iii*) মনে করি, $\sec^{-1} x = \theta$; $\therefore$ $\sec\theta = x$.

এখন, $\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sec\theta = x.$ $\therefore$ $\operatorname{cosec}^{-1} x = \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right).$

$$\therefore \sec^{-1} x + \operatorname{cosec}^{-1} x = \theta + \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\pi}{2}.$$

9-4. প্রয়োজনীয় সূত্র ঃ

(*i*) $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1} \frac{x+y}{1-xy}$;

(*ii*) $\tan^{-1} x - \tan^{-1} y = \tan^{-1} \frac{x-y}{1+xy}$.

(*i*) মনে করি, $\tan^{-1} x = \alpha$ এবং $\tan^{-1} y = \beta$.

তাহা হইলে, $\tan\alpha = x$ এবং $\tan\beta = y$.

এখন, $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{x+y}{1-xy}$.

তাহা হইলে, $\alpha + \beta = \tan^{-1} \frac{x+y}{1-xy}$;

অর্থাৎ, $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1} \frac{x+y}{1-xy}$.

(*ii*) মনে করি, $\tan^{-1} x = \alpha$ এবং $\tan^{-1} y = \beta$.

তাহা হইলে, $\tan\alpha = x$ এবং $\tan\beta = y$.

এখন, $\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \frac{x-y}{1+xy}$.

তাহা হইলে, $\alpha - \beta = \tan^{-1} \frac{x-y}{1+xy}$;

অর্থাৎ, $\tan^{-1} x - \tan^{-1} y = \tan^{-1} \frac{x-y}{1+xy}$.

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ

(1) $2\tan^{-1} x = \tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2}$.

$$2\tan^{-1} x = \tan^{-1} x + \tan^{-1} x = \tan^{-1} \frac{x+x}{1-x^2} = \tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2} .$$

দ্বিতীয় পদ্ধতি :

মনে করি, $\tan^{-1}x=\alpha$. $\therefore$ $\tan\alpha=x$.

$$\text{এখন, } \tan(2\alpha)=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2x}{1-x^2}.$$

$$\therefore\quad 2\alpha=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2};$$

$$\text{অর্থাৎ, } 2\tan^{-1}x=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}.$$

(2) $\mathbf{3\tan^{-1}x=\tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}}$.

$$3\tan^{-1}x=(\tan^{-1}x+\tan^{-1}x)+\tan^{-1}x$$

$$=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}+\tan^{-1}x$$

$$=\tan^{-1}\frac{\frac{2x}{1-x^2}+x}{1-\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)x}$$

$$=\tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}.$$

দ্বিতীয় পদ্ধতি :

মনে করি, $\tan^{-1}x=\alpha$. $\therefore$ $\tan\alpha=x$.

$$\text{এখন, } \tan(3\alpha)=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}=\frac{3x-x^3}{1-3x^2}.$$

$$\therefore\quad 3\alpha=\tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2};$$

$$\text{অর্থাৎ, } 3\tan^{-1}x=\tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}.$$

(3) $\mathbf{\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}}$.

মনে করি, $\tan^{-1}x=\alpha$ এবং $\tan^{-1}y=\beta$.

তাহা হইলে, $\tan\alpha=x$ এবং $\tan\beta=x$.

$$\text{এখন, } \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{x+y}{1-xy}.$$

তাহা হইলে, $\alpha+\beta=\tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy}$;

অর্থাৎ, $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy}$.

সুতরাং,

$$\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z$$

$$=\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}+\tan^{-1}z$$

$$=\tan^{-1}\frac{\dfrac{x+y}{1-xy}+z}{1-\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)z}$$

$$=\tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}.$$

9-5. প্রয়োজনীয় সূত্র :

(i) $\cot^{-1}x+\cot^{-1}y=\cot^{-1}\dfrac{xy-1}{y+x}$;

(ii) $\cot^{-1}x-\cot^{-1}y=\cot^{-1}\dfrac{xy+1}{y-x}$.

মনে করি, $\cot^{-1}x=\alpha$ এবং $\cot^{-1}y=\beta$.

তাহা হইলে, $\cot\alpha=x$ এবং $\cot\beta=y$.

এখন, $\cot(\alpha+\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\beta+\cot\alpha}=\dfrac{xy-1}{y+x}$.

$$\therefore\quad \alpha+\beta=\cot^{-1}\frac{xy-1}{y+x};$$

অর্থাৎ, $\cot^{-1}x+\cot^{-1}y=\cot^{-1}\dfrac{xy-1}{y+x}$.

আবার যেহেতু,

$$\cot(\alpha-\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}=\frac{xy+1}{y-x}$$

$$\therefore\quad \alpha-\beta=\cot^{-1}\frac{xy+1}{y-x};$$

অর্থাৎ, $\cot^{-1}x-\cot^{-1}y=\cot^{-1}\dfrac{xy+1}{y-x}$

9-6. প্রয়োজনীয় সূত্র :

(i) $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\}$;

(ii) $\sin^{-1}x-\sin^{-1}y=\sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}\}$;

(iii) $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y=\cos^{-1}\{xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\}$;

(iv) $\cos^{-1}x-\cos^{-1}y=\cos^{-1}\{xy+\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\}$.

(i) মনে করি, $\sin^{-1}x=\alpha$ এবং $\sin^{-1}y=\beta$.

তাহা হইলে, $\sin\alpha=x$ এবং $\sin\beta=y$.

সুতরাং, $\cos\alpha=\sqrt{1-x^2}$ এবং $\cos\beta=\sqrt{1-y^2}$.

এখন, $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$$=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}.$$

$\therefore\quad \alpha+\beta=\sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\}$;

অর্থাৎ, $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\}$.

অনুরূপ পদ্ধতিতে, (ii), (iii) এবং (iv) এর সূত্রাবলী প্রমাণ করা যাইবে।

দ্রষ্টব্য :

(i) $2\sin^{-1}x=\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$;

(ii) $2\cos^{-1}x=\cos^{-1}(2x^2-1)$.

(i) $2\sin^{-1}x=\sin^{-1}x+\sin^{-1}x$

$$=\sin^{-1}\{x\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-x^2}\}$$

$$=\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2}).$$

দ্বিতীয় পদ্ধতি :

মনে করি, $\sin^{-1}x=\alpha$. $\quad\therefore\ \sin\alpha=x$.

তাহা হইলে, $\cos\alpha=\sqrt{1-x^2}$.

এখন, $\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha=2x\sqrt{1-x^2}$.

$\therefore\quad 2\alpha=\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$;

অর্থাৎ, $2\sin^{-1}x=\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$.

(ii) মনে করি, $\cos^{-1}x=\alpha$. $\quad\therefore\ \cos\alpha=x$.

এখন, $\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2x^2-1$.

$\therefore\quad 2\alpha=\cos^{-1}(2x^2-1)$;

অর্থাৎ, $2\cos^{-1}x=\cos^{-1}(2x^2-1)$.

(*iii*) $3\sin^{-1}x=\sin^{-1}(3x-4x^3)$;

(*iv*) $3\cos^{-1}x=\cos^{-1}(4x^3-3x)$.

(*iii*) মনে করি, $\sin^{-1}x=\theta$. $\therefore\ \sin\theta=x$.

এখন, $\sin(3\theta)=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

$=3x-4x^3$.

$\therefore\ 3\theta=\sin^{-1}(3x-4x^3)$;

অর্থাৎ, $3\sin^{-1}x=\sin^{-1}(3x-4x^3)$.

(*iv*) মনে করি, $\cos^{-1}x=\theta$. $\therefore\ \cos\theta=x$.

এখন, $\cos(3\theta)=4\cos^3\theta-3\cos\theta$

$=4x^3-3x$.

$\therefore\ 3\theta=\cos^{-1}(4x^3-3x)$;

অর্থাৎ, $3\cos^{-1}x=\cos^{-1}(4x^3-3x)$.

9-7. একটি প্রয়োজনীয় সূত্র ঃ

$$2\tan^{-1}x=\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}=\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}.$$

মনে করি, $\tan^{-1}x=\theta$. $\therefore\ \tan\theta=x$.

যেহেতু, $\sin 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{2x}{1+x^2}$,

$\therefore\ 2\tan^{-1}x=2\theta=\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$.

আবার, যেহেতু, $\cos 2\theta=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{1-x^2}{1+x^2}$,

$\therefore\ 2\tan^{-1}x=2\theta=\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

পরিশেষে, যেহেতু, $\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2x}{1-x^2}$,

$\therefore\ 2\tan^{-1}x=2\theta=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$.

মন্তব্য ঃ 9-3 হইতে 9-7 পর্যন্ত ফলগুলি ঐগুলিতে বিদ্যমান বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষকগুলির জন্য সকলেই বিদ্যমান এবং প্রতিক্ষেত্রেই কেবলমাত্র **প্রধান মান** লওয়া হইয়াছে।

উদাহরণ 1. প্রধান মান নির্ণয় কর :

(i) $\sin^{-1}(\sqrt{3}/2)$; (ii) $\cos^{-1}0$; (iii) $\cos^{-1}(-1/2)$;
(iv) $\sec^{-1}(2)$.

(i) $\pi/3$; (ii) $\pi/2$; (iii) $2\pi/3$; (iv) $\pi/3$.

উদাহরণ 2. সাধারণ মান বাহির কর :

(i) $\cos^{-1}(\sqrt{3}/2)$; (ii) $\cot^{-1}(\sqrt{3})$; (iii) $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$;
(iv) $\sec^{-1}2$; (v) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

(i) $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$; (ii) $n\pi + \frac{\pi}{6}$; (iii) $n\pi - \frac{\pi}{3}$;

(iv) $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$; (v) $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}$.

উদাহরণ 3. সরল কর :

(i) $\sin\sin^{-1}(\frac{1}{2})$; (ii) $\cos\sin^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$.

(iii) $\sin^{-1}\tan\left(\frac{-\pi}{4}\right)$; (iv) $\tan^{-1}\cot(230°)$.

(i) $\sin\ \sin^{-1}(\frac{1}{2}) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$;

(ii) $\cos\sin^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$;

(iii) $\sin^{-1}\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sin^{-1}(-1) = -\pi/2$;

(iv) $\tan^{-1}\cot(230°) = \tan^{-1}(\cot 50°) = \tan^{-1}(\tan 40°) = 40°$.

উদাহরণ 4. দেখাও যে,

(i) $\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3} = \pi/4$;

(ii) $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} + \sin^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}} = \pi/2$. [P. U. 1976]

(i) বাম পক্ষ $= \tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}.\frac{1}{3}} = \tan^{-1}1 = \pi/4$;

(ii) বাম পক্ষ $= \sin^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{1-\frac{4}{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{1-\frac{1}{5}}\right\}$

$= \sin^{-1}\{\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\} = \sin^{-1}(1) = \pi/2$.

উদাহরণ 5. দেখাও যে,

(i) $2\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{4}=\tan^{-1}\frac{32}{43}$. [H. S. 1965]

(ii) $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\sin^{-1}\frac{5}{13}+\sin^{-1}\frac{16}{65}=\pi/2$. [P. U. 1968]

(i) $2\tan^{-1}\frac{1}{5}=\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{5}$

$$=\tan^{-1}\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}}=\tan^{-1}\frac{5}{12}$$

$\therefore$ বাম পক্ষ $=\tan^{-1}\frac{5}{12}+\tan^{-1}\frac{1}{4}$

$$=\tan^{-1}\frac{\frac{5}{12}+\frac{1}{4}}{1-\frac{5}{12}\cdot\frac{1}{4}}=\tan^{-1}\frac{32}{43}.$$

(ii) $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\sin^{-1}\frac{5}{13}=\sin^{-1}\{\frac{4}{5}\sqrt{1-\frac{25}{169}}+\frac{5}{13}\sqrt{1-\frac{16}{25}}\}$

$=\sin^{-1}\frac{63}{65}=\alpha$ হইলে,

$\sin\alpha=\frac{63}{65}$;

$\cos\alpha=\sqrt{1-(\frac{63}{65})^2}=\frac{16}{65}$.

$\therefore\ \alpha=\cos^{-1}\frac{16}{65}$.

অর্থাৎ, $\sin^{-1}\frac{63}{65}=\alpha=\cos^{-1}\frac{16}{65}$.

$\therefore$ বাম পক্ষ $=\cos^{-1}(\frac{16}{65})+\sin^{-1}(\frac{16}{65})=\pi/2$.

উদাহরণ 6. দেখাও যে,

$$\cot^{-1}\frac{ab+1}{a-b}+\cot^{-1}\frac{bc+1}{b-c}-\cot^{-1}\frac{ca+1}{c-a}=0$$

আমরা জানি, $\cot^{-1}x-\cot^{-1}y=\cot^{-1}\frac{yx+1}{y-x}$.

$\therefore$ বাম পক্ষ

$$=(\cot^{-1}b-\cot^{-1}a)+(\cot^{-1}c-\cot^{-1}b)+(\cot^{-1}a-\cot^{-1}c)$$

$=0=$ ডানপক্ষ।

উদাহরণ 7. প্রমাণ কর :

(i) $\sin(\cos^{-1}x)=\cos(\sin^{-1}x)$;

(ii) $\cos\tan^{-1}\cot\sin^{-1}x=x$;

(iii) $\sec^2(\tan^{-1}2)+\operatorname{cosec}^2(\cot^{-1}3)=15$.

(i) বাম পক্ষ $=\sin(\sin^{-1}\sqrt{1-x^2})=\sqrt{1-x^2}$;

ডান পক্ষ $=\cos(\cos^{-1}\sqrt{1-x^2})=\sqrt{1-x^2}$.

(ii) বাম পক্ষ $= \cos \tan^{-1} \cot \cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$

$$= \cos \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) = \cos \cos^{-1} x = x,$$

(iii) বাম পক্ষ $= \sec^2(\sec^{-1}\sqrt{5}) + \operatorname{cosec}^2(\operatorname{cosec}^{-1}\sqrt{10})$

$$= (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{10})^2 = 5 + 10 = 15.$$

উদাহরণ 8. $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \pi/2$ হইলে, দেখাও যে,

$$xy + yz + zx = 1.$$

$\because \quad \tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \pi/2 - \tan^{-1}z,$

$\therefore \quad \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy} = \pi/2 - \tan^{-1}z;$

বা, $\frac{x+y}{1-xy} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}z\right)$

$$= \cot \tan^{-1}z$$

$$= \cot \cot^{-1}(1/z) = 1/z.$$

$\therefore \quad (x+y)z = 1 - xy;$

অর্থাৎ, $xy + yz + zx = 1.$

উদাহরণ 9. $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y + \cos^{-1}z = \pi$ হইলে, দেখাও যে,

$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1.$ **[Joint Ent. Ex. 1967]**

$\because \quad \cos^{-1}x + \cos^{-1}y + \cos^{-1}z = \pi,$

$\therefore \quad \cos^{-1}x + \cos^{-1}y = \pi - \cos^{-1}z,$

বা, $\cos^{-1}\{xy - \sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-y^2}\} = \pi - \cos^{-1}z,$

বা, $xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} = \cos\{\pi - \cos^{-1}z\}$

$$= -\cos \cos^{-1}z = -z.$$

$\therefore \quad xy + z = \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)};$

বা, $(xy+z)^2 = (1-x^2)(1-y^2);$

বা, $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1.$

উদাহরণ 10. সমাধান কর।

$$(i)\quad \sin^{-1}\frac{2a}{1+a^2}+\sin^{-1}\frac{2b}{1+b^2}=2\tan^{-1}x.$$

$$(ii)\quad \sin^{-1}x-\cos^{-1}x=\sin^{-1}(3x-2),$$

(i) যেহেতু, $2\tan^{-1}c=\sin^{-1}\dfrac{2c}{1+c^2}$,

প্রদত্ত সমীকরণের বাম পক্ষ

$$=2\tan^{-1}a+2\tan^{-1}b=2\tan^{-1}\frac{a+b}{1-ab}.$$

তাহা হইলে, প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই :

$$\tan^{-1}x=\tan^{-1}\frac{a+b}{1-ab},$$

$\therefore\quad x=\dfrac{a+b}{1-ab}$ যাহা সমীকরণকে সিদ্ধ করিবে।

(ii) $\because\quad \sin^{-1}x-\cos^{-1}x=\sin^{-1}(3x-2)$,

$\therefore\quad \sin\{\sin^{-1}x-\cos^{-1}x\}=3x-2$;

বা, $\sin(\sin^{-1}x)\cos(\cos^{-1}x)-\cos(\sin^{-1}x)\sin(\cos^{-1}x)=3x-2$;

বা, $x.x-\cos(\cos^{-1}\sqrt{1-x^2})\sin(\sin^{-1}\sqrt{1-x^2})=3x-2$;

বা, $x^2-(\sqrt{1-x}^2)(\sqrt{1-x^2})=3x-2$;

বা, $x^2-(1-x^2)=3x-2$;

বা, $2x^2-3x+1=0$; বা, $(x-1)(2x-1)=0$.

$\therefore\quad x=1$; $\frac{1}{2}$ যাহারা প্রদত্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

উদাহরণ 11. সমাধান কর :

(i) $\sin^{-1}x=\cos^{-1}x$; (ii) $\tan^{-1}(2x)+\tan^{-1}(3x)=\pi/4$.

(i) $\because\quad \sin^{-1}x=\cos^{-1}x$.

$\therefore\quad \sin^{-1}x=\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$

সুতরাং, $x=\sqrt{1-x^2}$, বা, $x^2=1-x^2$.

$\therefore\quad x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ হইলে, $\sin^{-1}x=\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\pi/4$;

এবং $\cos^{-1}x=\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\pi/4$.

সুতরাং, $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ হইলে, বামপক্ষ = ডান পক্ষ।

এখন, $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ হইলে,

$\sin^{-1}x=\sin^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\pi/4$;

এবং $\cos^{-1}x=\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=3\pi/4$

তাহা হইলে, $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে না।

সুতরাং, নির্ণেয় সমাধান : $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(*ii*) প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই,

$$\tan^{-1}\frac{2x+3x}{1-(2x)(3x)}=\pi/4$$

বা, $\frac{5x}{1-6x^2}=\tan(\pi/4)=1,$

$\therefore\ 5x=1-6x^2$, বা, $6x^2+5x-1=0,$

বা, $(x+1)(6x-1)=0$, $\therefore\ x=-1;\ 1/6.$

$x=1/6$ হইলে, $\tan^{-1}(2x)+\tan^{-1}(3x)$ এর মান

$$=\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \quad \ldots \quad (1)$$

$$=\alpha+\beta>0,\quad (0<\alpha<\pi/2,\ 0<\beta<\pi/2);$$

এবং, (1) হইতে, বামপক্ষ $=\tan^{-1}\left(\frac{1/3+1/2}{1-(1/3)(1/2)}\right)=\tan^{-1}1=\pi/4.$

সুতরাং, $x=1/6$ প্রদত্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

$x=-1$ হইলে, $\tan^{-1}(2x)+\tan^{-1}(3x)$ এর মান

$$=\tan^{-1}(-2)+\tan^{-1}(-3)$$

$$=-\gamma-\delta<0,\ (0<\gamma<\pi/2\ ;\ 0<\delta<\pi/2).$$

সুতরাং $x=-1$ প্রদত্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করে না।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $x=1/6$.

মন্তব্য : বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষক সম্বন্ধীয় সমীকরণ সমাধানে অনেক সময় **অবান্তর বীজ** (Extraneous solution) পাওয়া যাইতে পারে। অতএব, মূল সমীকরণে বীজগুলিকে বসাইয়া পরীক্ষা করিয়া লইতে হইবে।

প্রশ্নমালা 10

1. প্রধান মান নির্ণয় কর :

(i) $\sin^{-1} 1$; (ii) $\sin^{-1}(0)$; (iii) $\sin^{-1}(1/2)$;
(iv) $\cos^{-1} 1$; (v) $\cos^{-1}(\sqrt{3}/2)$; (vi) $\tan^{-1}(\sqrt{3})$;
(vii) $\sec^{-1}(-2)$; (viii) $\cot^{-1}(-1)$; (ix) $\operatorname{cosec}^{-1}(-2)$;
(x) $\cos^{-1}(-1/\sqrt{2})$.

2. সাধারণ মান বাহির কর :

(i) $\sin^{-1}(\frac{1}{2})$; (ii) $\sin^{-1}(-\sqrt{3}/2)$; (iii) $\cos^{-1}(0)$;
(iv) $\cos^{-1}(-\frac{1}{2})$; (v) $\tan^{-1}(-1)$; (vi) $\tan^{-1}(\sqrt{3})$;
(vii) $\cot^{-1}(\sqrt{3})$; (viii) $\sec^{-1}(+2)$; (ix) $\operatorname{cosec}^{-1}(-2)$;
(x) $\cos^{-1}(-1/\sqrt{2})$.

3. উত্তরগুলি ঠিক আছে কি না বল : ঠিক না থাকিলে, সঠিক উত্তরটি কি ?

(i) $\sin \sin^{-1}(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$; (ii) $\cos \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$;
(iii) $\tan \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$; (iv) $\sec \sec^{-1}(-2) = -2$;
(v) $\sin^{-1} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$; (vi) $\sin \cos^{-1}(-\sqrt{3}/2) = 1/2$;
(vii) $\cos^{-1} \sin 220° = 130°$; (viii) $\tan^{-1} \cot 230° = 40°$;
(ix) $\cos^{-1} \cos(-60°) = -60°$; (x) $\sec^{-1} \sec(-120°) = -120°$.

4. সরল কর :

(i) $\tan \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; (ii) $\cot \tan^{-1}(-\sqrt{3})$;
(iii) $\cos^{-1} \tan(-5\pi/4)$; (iv) $\sin^{-1} \tan(3\pi/4)$.

5. প্রমাণ কর :

(i) $\tan^{-1} \frac{1}{4} + \tan^{-1} \frac{3}{5} = \pi/4$;
(ii) $\tan^{-1} 4 - \cot^{-1}(\frac{1}{3}) = \cot^{-1} 13$;
(iii) $\tan^{-1} \frac{2}{11} + \cot^{-1} \frac{24}{7} = \cot^{-1} 2$;
(iv) $\tan^{-1} x + \cot^{-1} y = \tan^{-1} \frac{xy+1}{y-x}$; [P.U. 1963]
(v) $2 \tan^{-1} \frac{1}{3} + \tan^{-1} \frac{1}{7} = \pi/4$; [P.U. 1973]
(vi) $\tan^{-1} \frac{a-b}{1+ab} + \tan^{-1} \frac{b-c}{1+bc} = \tan^{-1} a - \tan^{-1} c$;

(*vii*) $\tan^{-1}\dfrac{b-c}{1+bc}+\tan^{-1}\dfrac{c-a}{1+ca}+\tan^{-1}\dfrac{a-b}{1+ab}=0$; **[H.S. 1966]**

(*viii*) $\tan^{-1}\dfrac{1}{p+q}+\tan^{-1}\dfrac{q}{p^2+pq+1}=\cot^{-1}p$;

(*ix*) $\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=\pi/4$;

(*x*) $\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{2}{9}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=\pi/4$;

(*xi*) $\tan^{-1}\frac{1}{3}+\cot^{-1}5+\cot^{-1}7+\tan^{-1}\frac{1}{8}=\pi/4$;

(*xii*) $2\cot^{-1}5+\cot^{-1}7+2\cot^{-1}8=\pi/4$; **[P.U. 1970]**

(*xiii*) $\cos^{-1}\frac{4}{5}+\tan^{-1}\frac{3}{5}=\tan^{-1}\frac{27}{11}$; **[P.U. 1975]**

(*xiv*) $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\tan^{-1}\frac{3}{4}=\pi/2$;

(*xv*) $2(\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{2}{9})=\cos^{-1}\frac{3}{5}$; **[H.S. 1967]**

(*xvi*) $\sin^{-1}\frac{77}{85}-\sin^{-1}\frac{3}{5}=\cos^{-1}\frac{15}{17}$;

(*xvii*) $\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{5}}+\cot^{-1}3=\pi/4$;

(*xviii*) $4\left(\tan^{-1}\frac{1}{3}+\cos^{-1}\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)=\pi$; **[H.S. 1976]**

(*xix*) $4(\cot^{-1}3+\operatorname{cosec}^{-1}\sqrt{5})=\pi$; **[H.S. comp : 1975]**

(*xx*) $4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{239}=\pi/4$; **[Joint Ent. Ex. 1970]**

6. দেখাও যে,

(*i*) $\sin(2\sin^{-1}x)=(2x\sqrt{1-x^2})$;

(*ii*) $\tan^{-1}\sqrt{x}=\frac{1}{2}\cos^{-1}\dfrac{1-x}{1+x}$;

(*iii*) $\frac{1}{2}\tan^{-1}x=\cos^{-1}\sqrt{\left(\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{1+x^2}}\right)}$; **[H S. 1974]**

(*iv*) $\{\cos(\sin^{-1}x)\}^2=\{\sin(\cos^{-1}x\}^2$; **[P.U. 1974]**

(*v*) $\tan^{-1}\frac{4}{3}+\tan^{-1}\frac{12}{5}=\pi-\tan^{-1}\frac{56}{33}$; **[Joint Ent. Ex. 1967]**

(*vi*) $\tan^{-1}x+\cot^{-1}(x+1)=\tan^{-1}(x^2+x+1)$;

(*vii*) $\tan^{-1}(\cot x)+\cot^{-1}(\tan x)=\pi-2x$;

যেখানে, $0<x<\pi/2$; **[P.U. 1974]**

(*viii*) $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}\left(\dfrac{1-x-y-xy}{1+x+y-xy}\right)=\dfrac{\pi}{4}$; **[P. U. 1972]**

(*ix*) $\tan(\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z)$

$=\cot(\cot^{-1}x+\cot^{-1}y+\cot^{-1}z)$;

(x) $\sin^{-1}\sqrt{\dfrac{x-b}{a-b}}=\cos^{-1}\sqrt{\dfrac{a-x}{a-b}}=\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{x-b}{a-x}}$;

(xi) $\tan\left(\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)=\frac{x+y}{1-xy}$;

(xii) $2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot\tan\frac{x}{2}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{a\cos x+b}{a+b\cos x}\right)$; [P. U. 1970]

(xiii) $\tan^{-1}(\frac{1}{2}\tan 2A)+\tan^{-1}(\cot A)+\tan^{-1}(\cot^3 A)=\pi$;

$0<A<\pi/4$; [H. S. Comp. 1975]

(xiv) $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{a}{b}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{a}{b}\right)=\frac{2b}{a}$. [H. S. 1974]

7. সমাধান কর :

(i) $\tan^{-1}x=\cot^{-1}x$; (ii) $\tan^{-1}x=\frac{1}{2}\cot^{-1}x$;

(iii) $\sin^{-1}(x)+\sin^{-1}(2x)=2\pi/3$; (iv) $\sin^{-1}x=\operatorname{cosec}^{-1}x$;

(v) $\tan^{-1}(2x)+\tan^{-1}(3x)=\pi/4$; (vi) $\tan\cos^{-1}x=\sin\tan^{-1}2$;

(vii) $\cot^{-1}x+\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\pi}{4}$; (viii) $2\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}=\frac{\pi}{3}$;

(ix) $\sin^{-1}(\sqrt{3}\,.\,x)+\sin^{-1}(x)=\pi/2$; [H. S. 1976]

(x) $\sin^{-1}\left(\frac{5}{x}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{12}{x}\right)=\pi/2$; [H. S. 1969]

(xi) $\tan^{-1}(1+x)+\tan^{-1}(1-x)=\pi/4$; [P. U. 1964]

(xii) $\tan^{-1}(x)+\tan^{-1}(2x)+\tan^{-1}(3x)=\pi$; [P. U. 1964]

(xiii) $\tan^{-1}(x+1)+\tan^{-1}(x-1)=\tan^{-1}(4/7)$;

(xiv) $\cot^{-1}(x-1)+\cot^{-1}(x-2)+\cot^{-1}(x-3)=0$;

(xv) $3\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}-4\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}+2\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}=\pi/3$; [H. S. 1972]

(xvi) $\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}+\cot^{-1}\frac{1-x^2}{2x}=\pi/3$.

8. $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\pi$ হইলে, দেখাও যে,

$$x+y+z=xyz.$$

9. $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y+\sin^{-1}z=\pi$ হইলে, দেখাও যে,

(i) $x\sqrt{1-x^2}+y\sqrt{1-y^2}+z\sqrt{1-z^2}=2xyz$;

(ii) $(y+z-z)(z+x-y)(x+y-z)(x+y+z)=4x^2y^2z^2$.

10. $\tan^{-1}x, \tan^{-1}y, \tan^{-1}z$ সমান্তরীয় প্রগতিতে থাকিলে, x, y, z এর মধ্যে সম্বন্ধ স্থাপন কর। উপরন্ত, যদি $x, y, z,$ সমান্তরীয় প্রগতিতে থাকে, তবে দেখাও যে, $x=y=z$; $[y\neq 0]$.

11. $xy=1+a^2$ হইলে, দেখাও যে,

$$\tan^{-1}\frac{1}{a+x}+\tan^{-1}\frac{1}{a+y}=\tan^{-1}\frac{1}{a}; \qquad (x+y+2a)\neq 0.$$

[Joint Ent. Ex. 1968]

12. ABC ত্রিভুজের C কোণ সমকোণ হইলে, প্রমাণ কর :

$$\tan^{-1}\frac{a}{b+c}+\tan^{-1}\frac{b}{c+a}=\pi/4.$$ **[Joint Ent. Ex. 1971]**

13. যদি $\tan^{-1}\frac{a}{b+c}+\tan^{-1}\frac{b}{c+a}=\pi/4$ হয়, তবে দেখাও যে, একটি সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলি a, b, c হইবে ; $a>0, b>0, c>0$ হইলে।

[Joint Ent. Ex. 1969]

14. $\cos^{-1}\frac{x}{a}+\cos^{-1}\frac{y}{b}=\alpha$ হইলে, দেখাও যে,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{2xy}{ab}\cos\alpha+\frac{y^2}{b^2}=\sin^2\alpha.$$

[Joint Ent. Ex. 1975 ; P. U. 1971]

15. দেখাও যে, $\tan^{-1}\left(\frac{x\cos\phi}{1-x\sin\phi}\right)-\cot^{-1}\left(\frac{\cos\phi}{x-\sin\phi}\right)$ এর মান x নিরপেক্ষ ; এবং মানটি বাহির কর। **[Joint. Ent. Ex. 1974]**

ত্রিভুজের গুণাবলী
[Properties of Triangles]

10-1. উপস্থাপন :

একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণ এবং তিনটি বাহু মিলিয়া মোট ছয়টি অংশ থাকে। ABC ত্রিভুজের কোণ তিনটির পরিমাপকে A, B, C দ্বারা এবং উহাদের বিপরীত বাহু তিনটির পরিমাপকে যথাক্রমে a, b, c দ্বারা সূচিত করা হয়। ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলকে $\triangle$ দ্বারা, উহার অর্ধ-পরিসীমাকে s দ্বারা (অর্থাৎ, $2s = a + b + c$) প্রকাশ করা হয়। প্রসঙ্গতঃ বলা যায়, $A + B + C = 180°$.

একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয় যে বৃত্তের উপর অবস্থিত তাহাকে ঐ ত্রিভুজের পরিবৃত্ত এবং উহার ব্যাসার্ধকে পরিব্যাসার্ধ বলা হয়। পরিব্যাসার্ধকে R দ্বারা সূচিত করা হয়। একটি ত্রিভুজের বাহু তিনটি যে বৃত্তের স্পর্শক (ঐ বৃত্তের কেন্দ্র ত্রিভুজের ভিতরে অবস্থিত) তাহাকে ঐ ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত বলে ; এবং ঐ অন্তর্বৃত্তের ব্যাসার্ধ r দ্বারা সূচিত হয়।

যে বৃত্ত ত্রিভুজের একটি বাহুকে এবং উহার অপর দুই বর্ধিত বাহুকে স্পর্শ করে, তাহাকে ঐ ত্রিভুজের বহির্বৃত্ত বলে। স্পষ্টতঃ, একটি ত্রিভুজের তিনটি বহির্বৃত্ত থাকিবে। A, B এবং C কোণের সম্মুখস্থ বহির্বৃত্ত তিনটির ব্যাসার্ধ যথাক্রমে r_1, r_2 এবং r_3 দ্বারা সূচিত হয়।

এই অধ্যায়ে, ত্রিভুজের কোণগুলি, বাহুত্রয়, ক্ষেত্রফল, পরিব্যাসার্ধ, অন্তর্ব্যাসার্ধ, বহির্বৃত্তের ব্যাসার্ধের মধ্যে যে সকল সম্বন্ধ বিদ্যমান তাহা স্থাপিত হইবে এবং তৎ-সংক্রান্ত বিবিধ প্রশ্নাবলীর সমাধান করা হইবে।

10-2. যে কোন ত্রিভুজে,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

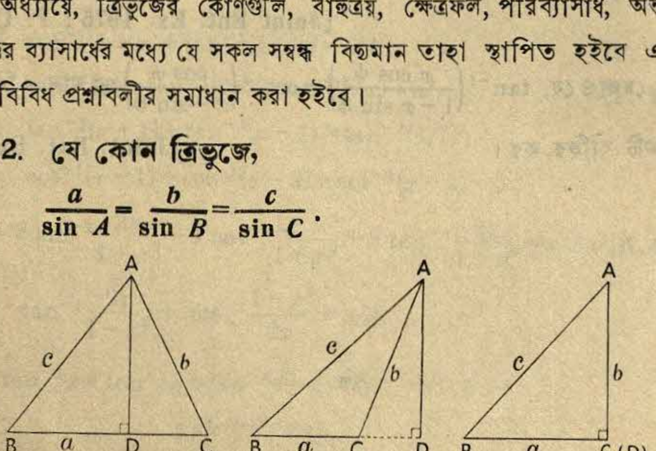


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

ধরা যাক, ABC যে কোন ত্রিভুজ। প্রথম চিত্রে, C সূক্ষ্মকোণ ; দ্বিতীয় চিত্রে, C স্থূলকোণ এবং তৃতীয় চিত্রে C সমকোণ। প্রথম চিত্রে, BC-এর উপর AD, দ্বিতীয়

চিত্রে, বর্ধিত BC-এর উপর AD লম্ব, এবং তৃতীয় চিত্রে, BC-এর উপরে পাতিত AD লম্ব AC-এর সহিত মিলিত।

C সূক্ষ্মকোণ হইলে, চিত্র – 1 হইতে

ABD ত্রিভুজে, $AD = AB \sin B = c \sin B$;

এবং ACD ত্রিভুজে, $AD = AC \sin C = b \sin C$.

$$\therefore \quad c \sin B = AD = b \sin C \qquad \cdots \qquad (1)$$

C স্থূলকোণ হইলে, চিত্র – 2 হইতে,

ABD ত্রিভুজে, $AD = AB \sin B = c \sin B$,

এবং ACD ত্রিভুজে, $AD = AC \sin (\pi - C) = b \sin C$.

$$\therefore \quad c \sin B = AD = b \sin C \qquad \cdots \qquad (2)$$

সুতরাং, উভয় ক্ষেত্রে,

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \qquad \cdots \qquad (3)$$

অনুরূপভাবে, B হইতে AC বা বর্ধিত AC-এর উপর লম্ব টানিয়া দেখানো যায়,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \qquad \cdots \qquad (4)$$

সুতরাং, চিত্র – 1 এবং চিত্র – 2 এর জন্য

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \qquad \cdots \qquad (5)$$

C সমকোণ হইলে, চিত্র – 3 হইতে,

$$\sin A = \frac{a}{c}, \ \sin B = \frac{b}{c}, \ \sin C = 1.$$

সুতরাং, এইরূপক্ষেত্রে,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = c = \frac{c}{\sin C}, \ (\because \ C = 90°). \quad \cdots \qquad (6)$$

সুতরাং, যে কোন ত্রিভুজের ক্ষেত্রে,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ

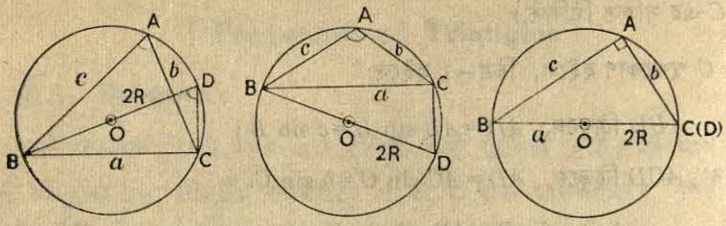


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

মনে করা যাক্, ABC একটি ত্রিভুজ, যাহার পরিকেন্দ্র O এবং পরিব্যাসার্ধ R. A কোণটি সূক্ষ্মকোণ অথবা স্থূলকোণ হইলে, BO যোগ করিয়া পরিধি পর্যন্ত (অর্থাৎ, D বিন্দু পর্য্যন্ত) বর্ধিত করিলাম ; এবং CD যোগ করিলাম।

তাহা হইলে, $BD = 2R$; এবং $\angle BCD = 90°$.

A সমকোণ হইলে, O বিন্দু BC-এর মধ্যবিন্দু হইবে ; এবং তখন, $BC = 2R$.

A সূক্ষ্মকোণ হইলে, চিত্র -1 হইতে,

$\angle BDC = \angle BAC = A$. তখন, BDC ত্রিভুজ হইতে,

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \text{ অর্থাৎ, } \frac{a}{\sin A} = 2R.$$

A স্থূলকোণ হইলে, চিত্র -2 হইতে,

$\angle BDC = 180° - A$. তখন, BDC ত্রিভুজ হইতে,

$$\sin A = \sin(180° - A) = \frac{a}{2R} \quad \text{অর্থাৎ, } \frac{a}{\sin A} = 2R.$$

A কোণটি সমকোণ হইলে, চিত্র-3 হইতে,

$$2R = BC = a = \frac{a}{\sin A}, \ (\because \ A = 90°).$$

সুতরাং, A কোণটি সূক্ষ্মকোণ, বা স্থূলকোণ, বা সমকোণ, যাহাই হউক না কেন,

$$\frac{a}{\sin A} = 2R. \quad \cdots \quad (1)$$

অনুরূপভাবে, AO যোগ করিয়া বর্ধিত করিলে যদি উহা পরিবৃত্তকে E বিন্দুতে ছেদ করে, তবে CE এবং BE যোগ করিয়া প্রমাণ করা যায় যে,

$$\frac{b}{\sin B} = 2R \text{ এবং } \frac{c}{\sin C} = 2R. \quad \cdots \quad (2)$$

সুতরাং, (1) এবং (2) হইতে পাই,

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\sin \boldsymbol{A}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\sin \boldsymbol{B}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\sin \boldsymbol{C}} = \boldsymbol{2R}.$$

10-3. যে কোন ত্রিভুজে,

$$(1)\quad a = b\cos C + c\cos B\,;$$

$$(2)\quad b = c\cos A + a\cos C\,;$$

$$(3)\quad c = a\cos B + b\cos A.$$

10-2 অনুচ্ছেদের চিত্র-1 হইতে,

$$a = BC = BD + DC$$

$$= AB\cos \widehat{ABD} + AC\cos \widehat{ACD}$$

$$= c\cos B + b\cos C.$$

এবং চিত্র – 2 হইতে,

$$a = BC = BD - CD$$

$$= AB\cos \widehat{ABD} - AC\cos \widehat{ACD}$$

$$= c\cos B - b\cos(\pi - C)$$

$$= c\cos B + b\cos C.$$

এবং চিত্র – 3 হইতে,

$$a = BD = AB\cos \widehat{ABD} = c\cos B$$

$$= c\cos B + b\cos C,\quad (\because\ C = 90°).$$

সুতরাং, সর্বক্ষেত্রেই,

$$a = b\cos C + c\cos B.$$

অনুরূপভাবে, অপর দুইটি সূত্র প্রমাণ করা যাইবে।

দ্বিতীয় পদ্ধতি:

আমরা জানি, $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ এবং $A + B + C = \pi$.

$$\therefore\quad b\cos C + c\cos B$$

$$= 2R(\sin B\cos C + \cos B\sin C)$$

$$= 2R\sin(B + C) = 2R\sin(\pi - A)$$

$$= 2R\sin A = a.$$

সুতরাং $a = b\cos C + c\cos B$.

অনুরূপভাবে অপর দুইটি সূত্র প্রমাণ করা যাইবে।

10-4. যে কোন ত্রিভুজে,

$$(1)\quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A\ ;$$

$$(2)\quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B\ ;$$

$$(3)\quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

আমরা জানি, যে কোন ত্রিভুজে,

$$a = b \cos C + c \cos B\ ;$$

$$b = c \cos A + a \cos C\ ;$$

$$c = a \cos B + b \cos A.$$

$$\therefore\quad b^2 + c^2 - a^2 = b \times b + c \times c - a \times a$$

$$= b(c \cos A + a \cos C)$$

$$+ c(a \cos B + b \cos A)$$

$$- a\,(b \cos C + c \cos B)$$

$$= 2bc \cos A$$

$$\therefore\quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

অনুরূপভাবে দেখানো যায়,

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

দ্বিতীয় পদ্ধতি :

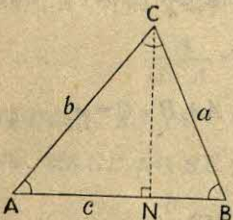


Fig. 1

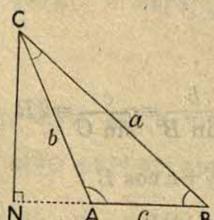


Fig. 2

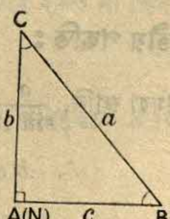


Fig. 3

ধরা যাক, ABC যে কোন ত্রিভুজ। চিত্র – 1 এতে A সূক্ষ্মকোণ, চিত্র – 2 এতে A স্থূলকোণ, এবং চিত্র – 3 এতে A সমকোণ। C হইতে AB(বা বর্ধিত BA) এর উপর CN লম্ব টানি।

চিত্র – 1 হইতে,

$$\begin{aligned} a^2 = BC^2 &= CN^2 + BN^2 \\ &= CN^2 + (AB - AN)^2 \\ &= (b \sin A)^2 + (c - b \cos A)^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A. \end{aligned}$$

চিত্র – 2 হইতে,

$$\begin{aligned} a^2 = BC^2 &= CN^2 + BN^2 \\ &= CN^2 + (BA + AN)^2 \\ &= b^2 \sin^2 (\pi - A) + \{c + b \cos (\pi - A)\}^2 \\ &= b^2 \sin^2 A + (c - b \cos A)^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A. \end{aligned}$$

চিত্র – 3 হইতে,

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \ (\because \ A = 90^\circ) \end{aligned}$$

সুতরাং, যে কোন ত্রিভুজে, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

অনুরূপভাবে, দেখানো যায়,

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$ এবং $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$.

বিশেষ দ্রষ্টব্য :

(a) (i) $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$;

(ii) $\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$;

(iii) $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

(b) (i) $\sin A = \dfrac{a}{2R}$; (ii) $\sin B = \dfrac{b}{2R}$; (iii) $\sin C = \dfrac{c}{2R}$.

(c) (i) $\tan A = \dfrac{abc}{R} \cdot \dfrac{1}{b^2 + c^2 - a^2}$;

(ii) $\tan B = \dfrac{abc}{R} \cdot \dfrac{1}{c^2 + a^2 - b^2}$;

(iii) $\tan C = \dfrac{abc}{R} \cdot \dfrac{1}{a^2 + b^2 - c^2}$.

(*d*) (i) $\cot B+\cot C=\dfrac{2aR}{bc}$;

(ii) $\cot C+\cot A=\dfrac{2bR}{ca}$;

(iii) $\cot A+\cot B=\dfrac{2cR}{ab}$.

10-5. ABC ত্রিভুজে A, B, C কোণের বিপরীত বাহু তিনটির পরিমাপ যথাক্রমে a, b, c হইলে, এবং $a+b+c=2s$ লিখিলে,

[1] (*i*) $\sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}}$; (*ii*) $\cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-a}{bc}}$;

[2] (*i*) $\sin\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{ca}}$; (*ii*) $\cos\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-b)}{ca}}$;

[3] (*i*) $\sin\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{ab}}$; (*ii*) $\cos\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-c)}{ab}}$.

$a+b+c=2s$ হইলে,

$a+b-c=2(s-c)$; $b+c-a=2(s-a)$; $c+a-b=2(s-b)$.

এখন, $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,

$$\therefore \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

সুতরাং,

$$1-\cos A=1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc};$$

বা, $2\sin^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}$;

বা, $\sin^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{a^2-(b-c)^2}{4bc}=\dfrac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}$

$$=\frac{2(s-c).2(s-b)}{4bc}=\frac{(s-b)(s-c)}{bc}.$$

$$\therefore \sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}};\quad (\because\ 0<\tfrac{1}{2}A<\pi/2.)$$

আবার,

$$1+\cos A=1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc};$$

$$\text{বা,}\quad 2\cos^2\frac{A}{2}=\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc};$$

$$\text{বা,}\quad \cos^2\frac{A}{2}=\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}$$

$$=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}$$

$$=\frac{2s.2(s-a)}{4bc}=\frac{s(s-a)}{bc}$$

$$\therefore\quad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}};\quad (\because\ 0<\tfrac{1}{2}A<\pi/2.)$$

অনুরূপভাবে, অপর ফলগুলি স্থাপন করা যাইবে।

দ্রষ্টব্য ঃ

[1] (i) $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$;

(ii) $\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$;

(iii) $\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$.

[*Hints* : $\tan\frac{A}{2}=\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=$ etc.]

[2] (i) $\sin A=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$;

(ii) $\sin B=\frac{2}{ca}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$;

(iii) $\sin C=\frac{2}{ab}.\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

[*Hints* : $\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=$ etc.]

10-6. *ABC* ত্রিভুজে,

$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}.$$

আমরা জানি, ABC ত্রিভুজে,

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

$$\therefore \quad \frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}$$

সুতরাং, যোগ ও ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা পাই,

$$\frac{b-c}{b+c}=\frac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}$$

$$=\frac{2\cos\frac{1}{2}(B+C).\sin\frac{1}{2}(B-C)}{2\sin\frac{1}{2}(B+C).\cos\frac{1}{2}(B-C)}$$

$$=\cot\frac{B+C}{2}.\tan\frac{B-C}{2}$$

$$=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B-C}{2}, \qquad \left[\because \frac{B+C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right]$$

$$\therefore \quad \tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}.$$

অনুরূপভাবে, দেখানো যাইবে,

$$\tan\frac{C-A}{2}=\frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2}; \quad \tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}.$$

10-7. ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\triangle$ দ্বারা সূচিত হইলে,
$\triangle=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C.$

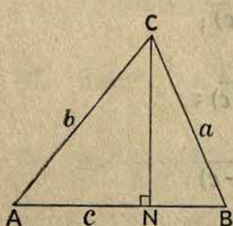


Fig. 1

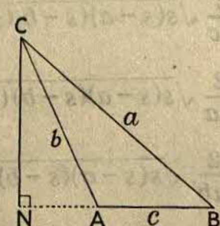


Fig. 2

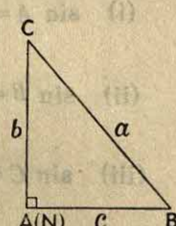


Fig. 3

চিত্র – 1 এতে, A সূক্ষ্মকোণ ; চিত্র – 2 এতে, A স্থূলকোণ ; চিত্র – 3 এতে, A সমকোণ। BA বা বর্ধিত BA এর উপর CN লম্ব। চিত্র – 1 হইতে,

$$\triangle=\tfrac{1}{2}AB.CN=\tfrac{1}{2}AB.AC\sin\widehat{CAN}$$

$$=\tfrac{1}{2}c.b\sin A=\tfrac{1}{2}bc\sin A.$$

চিত্র – 2 হইতে,

$$\Delta = \tfrac{1}{2} AB \,.\, CN = \tfrac{1}{2} AB \,.\, AC \sin \widehat{CAN}$$
$$= \tfrac{1}{2} c \,.\, b \sin (\pi - A) = \tfrac{1}{2} bc \sin A.$$

চিত্র – 3 হইতে,

$$\Delta = \tfrac{1}{2} AB \,.\, CA = \tfrac{1}{2} c.b$$
$$= \tfrac{1}{2} bc \sin A \;;\; [\because \; A = 90^\circ].$$

সুতরাং, যে কোন ত্রিভুজ ABC-এর ক্ষেত্রে,

$$\Delta = \tfrac{1}{2} bc \sin A.$$

আবার,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \text{ বলিয়া,}$$

$b \sin A = a \sin B$ এবং $c \sin B = b \sin C$.

$$\therefore \; \Delta = \tfrac{1}{2} bc \sin A$$
$$= \tfrac{1}{2} c\,(b \sin A) = \tfrac{1}{2} ca \sin B$$
$$= \tfrac{1}{2} a\,(c \sin B) = \tfrac{1}{2} ab \sin C.$$

বিশেষ দ্রষ্টব্য :

[1]. $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

[*Hints* : $\Delta = \tfrac{1}{2} bc \sin A = bc \sin \dfrac{A}{2} \cos \dfrac{A}{2}$

$$= bc. \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \times \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$
$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \;]$$

[2] $\Delta = \dfrac{abc}{4R}$.

$\left[\textit{Hints}: \; \Delta = \tfrac{1}{2} bc \sin A = \tfrac{1}{2} bc \,.\, \dfrac{a}{2R} = \dfrac{abc}{4R} \right]$.

[3] $4\Delta = \sqrt{(2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4)}$

[*Hints* : $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}.$$

$$\therefore\ 4\Delta = \sqrt{\{(b+c)^2 - a^2\}\{a^2 - (c-b)^2\}}$$
$$= \sqrt{\{2bc + (b^2+c^2-a^2)\}\{2bc - (b^2+c^2-a^2)\}}$$
$$= \sqrt{(2bc)^2 - (b^2+c^2-a^2)^2}$$
$$= \sqrt{2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4}.\ ]$$

উদাহরণ 1. ABC ত্রিভুজে, $a = 7$ সে. মি., $b = 5$ সে. মি., $c = 3$ সে. মি. **হইলে, A** কোণের পরিমাপ বাহির কর।

এখানে, $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{5^2+3^2-7^2}{2.5.3} = -\dfrac{1}{2}.$

$\therefore\ \cos A = -\frac{1}{2} = \cos 120°.\qquad \therefore\ A = 120°.$

উদাহরণ 2. ABC ত্রিভুজে, $a = 20$ একক, $b = 10$ একক, $C = 60°$ হইলে, A, B, c-এর মান বাহির কর।

এখানে, $A + B + C = 180°$, এবং, $C = 60°.$

$\therefore\ A + B = 120°.\qquad \cdots\qquad (1)$

আবার, আমরা জানি,

$$\tan\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}.$$

$$\therefore\ \tan\frac{A-B}{2} = \frac{20-10}{20+10}\cot 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30°.$$

$$\therefore\ \frac{A-B}{2} = 30°,$$

অর্থাৎ, $A - B = 60°.\qquad \cdots\qquad (2)$

সুতরাং, (1) এবং (2) হইতে,

$\mathbf{A = 90°,\ B = 30°.}\qquad \cdots\qquad (3)$

আবার, যেহেতু, $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C},$

$$\therefore\ \frac{20}{\sin 90°} = \frac{c}{\sin 60°}.$$

$\therefore\ c = 20\sin 60° = \mathbf{10\sqrt{3}}$ **একক।**

উদাহরণ 3. যে কোন ABC ত্রিভুজে প্রমাণ কর যে,

$$a \sin(B-C)+b \sin(C-A)+c \sin(A-B)=0. \qquad \textbf{[H. S. 1961]}$$

আমরা জানি,

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

$$\therefore \quad a=2R \sin A=2R \sin(B+C), \ [\because \ A+B+C=\pi]$$

তাহা হইলে,

$$a \sin(B-C)=2R \sin(B+C) \sin(B-C)$$
$$=2R(\sin^2 B-\sin^2 C).$$

অনুরূপভাবে,

$$b \sin(C-A)=2R(\sin^2 C-\sin^2 A),$$

এবং, $c \sin(A-B)=2R(\sin^2 A-\sin^2 B)$.

$\therefore$ বামপক্ষ $=2R(\sin^2 B-\sin^2 C)+2R(\sin^2 C-\sin^2 A)$
$+2R(\sin^2 A-\sin^2 B)=0.$

উদাহরণ 4. ABC নামক যে কোন ত্রিভুজে দেখাও যে,

$$b^2 \sin 2C+c^2 \sin 2B=4\triangle.$$

আমরা জানি,

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}, \qquad \cdots \qquad (1)$$

এবং, $a=b \cos C+c \cos B.$ $\qquad \cdots \qquad (2)$

$\therefore$ বামপক্ষ $=b^2.2 \sin C \cos C+c^2.2 \sin B \cos B$

$=2b \sin C.b \cos C+2(c \sin B).c \cos B$

$=2b \sin C.b \cos C+2(b \sin C).c \cos B$, [(1) হইতে]

$=2b \sin C.(b \cos C+c \cos B)$

$=2ab \sin C$, [(2) হইতে]

$=4.(\frac{1}{2} ab \sin C)=4\triangle.$

উদাহরণ 5. ABC নামক যে কোন ত্রিভুজে, দেখাও যে,

$$\frac{b^2-c^2}{a^2} \sin 2A+\frac{c^2-a^2}{b^2} \sin 2B+\frac{a^2-b^2}{c^2} \sin 2C=0.$$

আমরা জানি,

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R,$$

এবং $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, ইত্যাদি।

$$\therefore \quad \frac{b^2-c^2}{a^2} \sin 2A = \frac{b^2-c^2}{a^2} . 2 \sin A \cos A$$

$$= 2 . \frac{b^2-c^2}{a^2} . \frac{a}{2R} . \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$= \frac{1}{2R\, abc} (b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)$$

$$= \frac{1}{2R\, abc} \{(b^4-c^4) - a^2(b^2-c^2)\}.$$

অনুরূপভাবে,

$$\frac{c^2-a^2}{b^2} \sin 2B = \frac{1}{2R\, abc} \{(c^4-a^4) - b^2(c^2-a^2)\};$$

এবং, $\dfrac{a^2-b^2}{c^2} \sin 2C = \dfrac{1}{2R\, abc} \{(a^4-b^4) - c^2(a^2-b^2)\}.$

$$\therefore \quad \text{বামপক্ষ} = \frac{1}{2R\, abc} [b^4 - c^4 + c^4 - a^4 + a^4 - b^4 - a^2b^2 + a^2c^2$$
$$- b^2c^2 + a^2b^2 - a^2c^2 + b^2c^2]$$
$$= 0.$$

উদাহরণ 6. যে কোন ত্রিভুজ ABC এতে প্রমাণ কর,

$$(b-c) \cot \frac{A}{2} + (c-a) \cot \frac{B}{2} + (a-b) \cot \frac{C}{2} = 0.$$

[**Joint Ent. Ex. 1970**]

আমরা জানি,

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}; \quad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

এবং $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$\therefore \quad \cot \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}} = \frac{s(s-a)}{\Delta}.$$

অনুরূপভাবে, $\cot \dfrac{B}{2} = \dfrac{s(s-b)}{\Delta}$; $\cot \dfrac{C}{2} = \dfrac{s(s-c)}{\Delta}$.

$\therefore$ বামপক্ষ $=(b-c).\dfrac{s(s-a)}{\Delta}+(c-a)\,\dfrac{s.(s-b)}{\Delta}+(a-b).\dfrac{s(s-c)}{\Delta}$

$$=\frac{s}{\Delta}\,[(b-c)(s-a)+(c-a)(s-b)+(a-b)(s-c)]$$

$$=\frac{s}{\Delta}\,[s(b-c+c-a+a-b).$$

$$-a(b-c)-b(c-a)-c(a-b)]$$

$$=\frac{s}{\Delta}\times 0=0.$$

উদাহরণ 7. ABC ত্রিভুজে a, b, c সমান্তরীয় প্রগতিতে থাকিলে, দেখাও যে, $\cot\frac{A}{2},\ \cot\frac{B}{2},\ \cot\frac{C}{2}$ সমান্তরীয় প্রগতিতে থাকিবে।

a, b, c সমান্তরীয় প্রগতিতে থাকিলে,

$$a-b=b-c\,;$$

বা, $(s-b)-(s-a)=(s-c)-(s-b)\,;$

বা, $\dfrac{s(s-b)}{\Delta}-\dfrac{s(s-a)}{\Delta}=\dfrac{s(s-c)}{\Delta}-\dfrac{s(s-b)}{\Delta}\,;$

বা, $\cot\dfrac{B}{2}-\cot\dfrac{A}{2}=\cot\dfrac{C}{2}-\cot\dfrac{B}{2}\,;$

অর্থাৎ, $\cot\dfrac{A}{2},\ \cot\dfrac{B}{2},\ \cot\dfrac{C}{2}$ সমান্তরীয় প্রগতিতে থাকিবে।

উদাহরণ 8. ABC ত্রিভুজে, a^2, b^2, c^2 সমান্তর প্রগতিতে থাকিলে, দেখাও যে, $\cot A, \cot B, \cot C$ সমান্তর প্রগতিতে থাকিবে।

আমরা জানি,

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R\,;$$

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\,;\ \text{ইত্যাদি।}$$

$$\therefore\ \cot A=\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{R(b^2+c^2-a^2)}{abc}\,;\ \text{ইত্যাদি।}$$

এখন, a^2, b^2, c^2 সমান্তর প্রগতিতে থাকিলে,

$-2a^2,\ -2b^2,\ -2c^2$ সমান্তর প্রগতিতে থাকিবে ;

অর্থাৎ, $(a^2+b^2+c^2)-2a^2$; $(a^2+b^2+c^2)-2b^2$; $(a^2+b^2+c^2)-2c^2$ সমান্তর প্রগতিতে থাকিবে ;

অর্থাৎ, $b^2+c^2-a^2$; $c^2+a^2-b^2$; $a^2+b^2-c^2$ সমান্তর প্রগতিতে থাকিবে।

$$\therefore \quad \frac{R(b^2+c^2-a^2)}{abc}\ ; \quad \frac{R(c^2+a^2-b^2)}{abc}\ ; \quad \frac{R(a^2+b^2-c^2)}{abc}$$

সমান্তর প্রগতিতে থাকিবে।

অর্থাৎ, $\cot A$; $\cot B$; $\cot C$ সমান্তর প্রগতিতে থাকিবে।

উদাহরণ 9. যদি কোন ত্রিভুজে দুইটি কোণের cosines ঐ কোণদ্বয়ের বিপরীত বাহুদ্বয়ের অনুপাতে থাকে তবে দেখাও যে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

মনে করি, ABC ত্রিভুজে, $\dfrac{\cos B}{b}=\dfrac{\cos C}{c}$.

$$\therefore \quad \frac{a^2+c^2-b^2}{2abc}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2abc}\ ;$$

বা, $a^2+c^2-b^2=a^2+b^2-c^2$;

বা, $b^2=c^2$. $\quad \therefore \ b=c$.

সুতরাং, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

উদাহরণ 10. কোন ত্রিভুজে দুইটি কোণের cosines তাহাদের বিপরীত বাহুর ব্যস্ত অনুপাত থাকিলে দেখাও যে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু, অথবা সমকোণী।

মনে করি, ABC ত্রিভুজে, $\dfrac{\cos A}{\cos B}=\dfrac{b}{a}$.

তাহা হইলে, $\dfrac{\cos A}{\cos B}=\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sin B}{\sin A}$;

বা, $\sin A \cos A=\sin B \cos B$;

বা, $\sin 2A=\sin 2B$.

$\therefore \ 2A=2B \qquad$ বা, $2A=180^\circ-2B$.

অর্থাৎ, $A=B$, $\qquad$ অথবা, $A+B=90^\circ$. অতএব, ইত্যাদি।

প্রশ্নমালা 11

ABC যে কোন ত্রিভুজ হইলে, প্রমাণ কর : (1–17) :

1. $(b-c)\cos\dfrac{A}{2}=a\sin\dfrac{B-C}{2}$;

2. $(b+c)\sin\dfrac{A}{2}=a\cos\dfrac{B-C}{2}$;

3. $a(b\cos C-c\cos B)=b^2-c^2$;

4. $(b+c)\cos A+(c+a)\cos B+(a+b)\cos C=a+b+c$;

5. $2(bc\cos A+ca\cos B+ab\cos C)=a^2+b^2+c^2$;

6. $a\cos A+b\cos B+c\cos C=4R\sin A\sin B\sin C$; [H. S. 1971]

7. $(a^2-b^2-c^2)\tan A+(a^2-b^2+c^2)\tan B=0$; [Joint Ent. Ex. 1971]

8. $(b+c-a)\tan\dfrac{A}{2}=(c+a-b)\tan\dfrac{B}{2}=(a+b-c)\tan\dfrac{C}{2}$;

9. $a^2(\sin^2B-\sin^2C)+b^2(\sin^2C-\sin^2A)+c^2(\sin^2A-\sin^2B)=0$;

10. $a^2(\cos^2B-\cos^2C)+b^2(\cos^2C-\cos^2A)+c^2(\cos^2A-\cos^2B)=0$;

11. $(b^2-c^2)\cot A+(c^2-a^2)\cot B+(a^2-b^2)\cot C=0$;

12. $\dfrac{b-c}{a}\cos^2\dfrac{A}{2}+\dfrac{c-a}{b}\cos^2\dfrac{B}{2}+\dfrac{a-b}{c}\cos^2\dfrac{C}{2}=0$;

13. $a\sin\left(\dfrac{A}{2}+C\right)=(b+c)\sin\dfrac{A}{2}$; [H S. 1962]

14. $bc\cos^2\dfrac{A}{2}+ca\cos^2\dfrac{B}{2}+ab\cos^2\dfrac{C}{2}=s^2$;

15. $\dfrac{a^2\sin(B-C)}{\sin A}+\dfrac{b^2\sin(C-A)}{\sin B}+\dfrac{c^2\sin(A-B)}{\sin C}=0$;

16. $\dfrac{b^2-c^2}{\cos B+\cos C}+\dfrac{c^2-a^2}{\cos C+\cos A}+\dfrac{a^2-b^2}{\cos A+\cos B}=0$;

17. $a^2b^2c^2(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)=32\triangle^3$. [P. U. 1972]

18. ABC ত্রিভুজে প্রমাণ কর : $b\cos B+c\cos C=a\cos(B-C)$.

19. $a=5$ সে. মি., $b=5\sqrt{3}$ সে. মি., $c=5$ সে. মি., হইলে, ABC ত্রিভুজের কোণগুলির পরিমাপ নির্ণয় কর।

20. ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে, $A=108^\circ$ হইলে, $a:b$ অনুপাতটির মান বাহির কর। [H. S. 1972]

21. ABC ত্রিভুজে, $a=2b$ এবং $A=3B$ হইলে, উহার কোণগুলির পরিমাপ বাহির কর। [Joint Ent. Ex. 1975]

22. ABC ত্রিভুজে, $A=60°$ হইলে, দেখাও যে, $b+c=2a \cos \frac{B-C}{2}$

[Joint Ent. Ex. 1969]

23. ABC ত্রিভুজে, $\frac{1}{4} \sin A=\frac{1}{5} \sin B=\frac{1}{6} \sin C$ হইলে, $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ এর মান বাহির কর। [P. U. 1974]

24. ABC ত্রিভুজে,

$$\frac{\cos A+2 \cos C}{\cos A+2 \cos B}=\frac{\sin B}{\sin C}.$$

দেখাও যে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু অথবা সমকোণী। [Joint Ent. Ex. 1976]

25. ABC ত্রিভুজে $2 \cos A=\frac{\sin B}{\sin C}$ হইলে, দেখাও যে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

26. $(a^2+b^2) \sin (A-B)=(a^2-b^2) \sin (A+B)$ হইলে, দেখাও যে, ABC ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু অথবা সমকোণী। [Joint Ent. Ex. 1972]

27. $\cot A+\cot B+\cot C=\sqrt{3}$ হইলে, দেখাও যে, ABC ত্রিভুজটি সমবাহু। [Joint Ent. Ex. 1974]

28. ABC ত্রিভুজে $(a+b+c)(b+c-a)=3bc$ হইলে, A এর মান বাহির কর।

29. ABC ত্রিভুজে,

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{3}{a+b+c} \text{ হইলে,}$$

দেখাও যে, $C=60°$.

30. $c^4-2(a^2+b^2)c^2+a^4+a^2b^2+b^4=0$ হইলে দেখাও যে, $C=60°$, বা, $120°$.

31. ABC ত্রিভুজে, $a^4+b^4+c^4=2(a^2+b^2)c^2$ হইলে দেখাও যে, $C=45°$, বা, $135°$.

32. ABC ত্রিভুজের বাহুগুলির পরিমাপ 13 একক, 14 একক, 15 একক হইলে, উহার ক্ষেত্রফল বাহির কর।

33. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য

$$\frac{y}{z}+\frac{z}{x},\ \frac{z}{x}+\frac{x}{y},\ \frac{x}{y}+\frac{y}{z}$$

হইলে, ঐ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল বাহির কর।

34. $\sin A : \sin C = \sin(A-B) : \sin(B-C)$ হইলে, দেখাও যে, a^2, b^2, c^2 সমান্তর প্রগতিতে আছে।

35. ABC ত্রিভুজে, $a\ \cos^2 \dfrac{C}{2} + c \cos^2 \dfrac{A}{2} = \dfrac{3b}{2}$ হইলে, দেখাও যে, উহার বাহুগুলির দৈর্ঘ্য সমান্তর প্রগতিতে আছে।

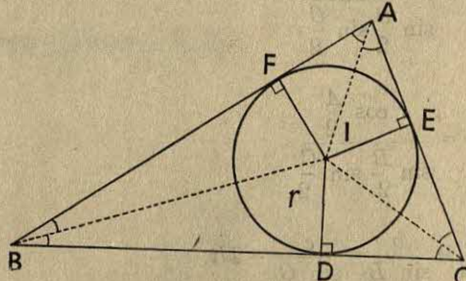
36. যে কোন ত্রিভুজ ABC এর জন্য প্রমাণ কর :

(i) $a^3 \sin(B-C) + b^3 \sin(C-A) + c^3 \sin(A-B) = 0$;

(ii) $a^3 \cos(B-C) + b^3 \cos(C-A) + c^3 \cos(A-B) = 3abc.$

37. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য : $\sqrt{b^2+c^2}$, $\sqrt{c^2+a^2}$, $\sqrt{a^2+b^2}$. উহার ক্ষেত্রফল কত ?

10-8. ত্রিভুজের অন্তর্ব্যাসার্ধ নির্ণয়।



ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র I ; এবং অন্তর্ব্যাসার্ধ r. মনে করি, অন্তর্বৃত্তটি BC CA এবং AB কে যথাক্রমে D, E, F বিন্দুতে স্পর্শ করে। DI, EI, FI, AI, BI, CI টানি। তাহা হইলে,

$DI = EI = FI = r$;

$\angle IDB = \angle IEC = \angle IFA = 90^\circ$;

এবং $\angle DBI = \frac{1}{2}B$; $\angle DCI = \frac{1}{2}C$; $\angle EAI = \frac{1}{2}A$.

ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\triangle$ দ্বারা সূচিত হইলে, এবং $a+b+c=2s$ ধরিলে,

$\triangle = ABC$-ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$= IBC$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $+ ICA$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $+ IAB$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}.BC.DI + \frac{1}{2}.CA.EI + \frac{1}{2}.AB.FI$

$= \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr$

$= \frac{1}{2}(a+b+c)r = rs.$

$$\therefore \quad r=\frac{\Delta}{s} \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

আবার,

$$a=BC=BD+DC$$

$$=r\cot\frac{B}{2}+r\cot\frac{C}{2}$$

$$=r\left[\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}\right]$$

$$=\frac{r\sin\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{r\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}.$$

কিন্তু, $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$

সুতরাং, $a=2R\sin A=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}.$

$$\therefore \quad 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\frac{r\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}.$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} \quad \ldots \quad (2)$$

অপিচ, চিত্র হইতে,

$$BD=BF\,;\ CD=CE\,;\ AE=AF.$$

$\therefore \quad AE+BD+CD=\frac{1}{2}(a+b+c)=s\,;$

অর্থাৎ, $AE+a=s$

$\therefore \quad AE=s-a\,;$

সেইরূপ, $BD=s-b\,;\ CD=s-c.$

তাহা হইলে, AEI ত্রিভুজ হইতে,

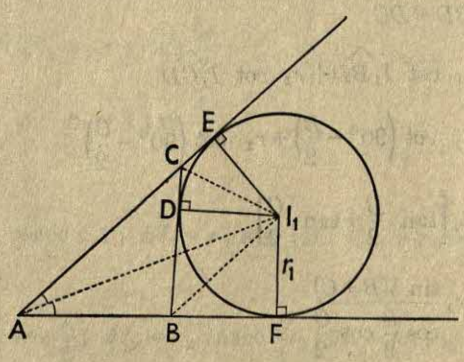
$$r = AE \tan\frac{A}{2} = (s-a)\tan\frac{A}{2}.$$

$$\left.\begin{aligned} \therefore\ r &= (s-a)\tan\frac{A}{2}. \\ \text{অনুরূপভাবে, } r &= (s-b)\tan\frac{B}{2}; \\ \therefore\ r &= (s-c)\tan\frac{C}{2}. \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (3)$$

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ

$$IA = r\operatorname{cosec}\frac{A}{2};\ IB = r\operatorname{cosec}\frac{B}{2};\ IC = r\operatorname{cosec}\frac{C}{2}.$$

10-9. ত্রিভুজের বহির্ব্যাসার্ধ নির্ণয়।



মনে করি, ABC ত্রিভুজের A, B, C কোণের বিপরীত বহির্বৃত্তত্রয়ের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে r_1, r_2, r_3. ধরা যাক. A কোণের বিপরীত বহির্বৃত্তের কেন্দ্র I_1 ; এবং এই বৃত্তটি BC কে D বিন্দুতে, এবং বর্ধিত AC ও AB কে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে স্পর্শ করে। DI_1, EI_1, FI_1, AI_1, BI_1, CI_1 টানি। তাহা হইলে,

$$DI_1 = EI_1 = FI_1 = r_1;$$
$$\angle I_1DB = \angle I_1EC = \angle I_1FB = 90^\circ;$$
$$\angle I_1AB = \tfrac{1}{2}A;\ \angle I_1BD = 90^\circ - \tfrac{1}{2}B;$$
$$\angle I_1CD = 90^\circ - \tfrac{1}{2}C.$$

ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\triangle$ দ্বারা সূচিত হইলে, এবং $a+b+c=2s$ ধরিলে,

$$\triangle=\triangle ABC=\triangle ABI_1+\triangle ACI_1-\triangle BCI_1$$
$$=\tfrac{1}{2}AB.FI_1+\tfrac{1}{2}\ AC.EI_1-\tfrac{1}{2}.BC.DI_1$$
$$=\tfrac{1}{2}cr_1+\tfrac{1}{2}br_1-\tfrac{1}{2}ar_1$$
$$=\tfrac{1}{2}(b+c-a)r_1$$
$$=\tfrac{1}{2}(2s-2a)r_1$$
$$=(s-a)r_1$$

$$\left.\begin{aligned} \therefore\quad r_1&=\frac{\triangle}{s-a}\,.\\ \text{অনুরূপভাবে}\quad r_2&=\frac{\triangle}{s-b}\,;\\ r_2&=\frac{\triangle}{s-c}\,.\end{aligned}\right\}\quad\cdots\quad(1)$$

আবার,

$$a=BC=BD+DC$$
$$=r_1\ \cot\ I_1\widehat{BD}+r_1\ \cot\ I_1\widehat{CD}$$
$$=r_1\ \cot\left(90^\circ-\frac{B}{2}\right)+r_1\ \cot\left(90^\circ-\frac{C}{2}\right)$$
$$=r_1\left[\tan\ \frac{B}{2}+\tan\ \frac{C}{2}\right]$$
$$=r_1\frac{\sin\tfrac{1}{2}(B+C)}{\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}}$$
$$=\frac{r_1\ \cos\dfrac{A}{2}}{\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}}\,;\qquad(\because\ A+B+C=180^\circ)$$

কিন্তু, $a=2R\ \sin\ A=4R\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}$.

$$\therefore\quad 4R\ \sin\frac{A}{2}\cos\ \frac{A}{2}=\frac{r_1\ \cos\dfrac{A}{2}}{\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}}\,.$$

$$\left.\begin{aligned} \therefore\ r_1 &= 4R \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}. \\ \text{অনুরূপভাবে, } r_2 &= 4R\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}; \\ r_3 &= 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}. \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (2)$$

আবার, $AE = AC + CE = b + CD$;

এবং, $AF = AB + BF = c + BD$.

কিন্তু, $AE = AF$. সুতরাং, AE, AF যোগ করিয়া পাই,

$$2AE = b + c + CD + BD = b + c + a = 2s.$$

$$\therefore\ AE = s = AF.$$

তাহা হইলে, AFI_1 ত্রিভুজ হইতে,

$$FI_1 = AF \tan \widehat{FAI_1}.$$

$$\left.\begin{aligned} \therefore\ r_1 &= s\tan\frac{A}{2}. \\ \text{অনুরূপভাবে, } r_2 &= s\tan\frac{B}{2}; \\ r_3 &= s\tan\frac{C}{2}. \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (3)$$

বিশেষ দ্রষ্টব্য :

(*i*) $AI_1 = r_1 \operatorname{cosec} \frac{1}{2}A$; $BI_1 = r_1 \sec \frac{1}{2}B$; $CI_1 = r_1 \sec \frac{1}{2}C$.

অনুরূপভাবে,

(*ii*) $AI_2 = r_2 \sec\frac{A}{2}$; $AI_2 = r_2 \operatorname{cosec}\frac{B}{2}$; $CI_2 = r_2 \sec\frac{C}{2}$;

(*iii*) $AI_3 = r_3 \sec\frac{A}{2}$; $BI_3 = r_3 \sec\frac{B}{2}$; $CI_3 = r_3 \operatorname{cosec}\frac{C}{2}$.

উদাহরণ 1. যে কোন ত্রিভুজে দেখাও যে,

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r}.$$

বামপক্ষ, $= \frac{s-a}{\Delta} + \frac{s-b}{\Delta} + \frac{s-c}{\Delta}$

$$= \frac{3s-(a+b+c)}{\Delta} = \frac{3s-2s}{\Delta} = \frac{s}{\Delta} = \frac{1}{r}.$$

উদাহরণ 2. যে কোন ত্রিভুজে প্রমাণ কর :

$$\frac{bc-r_2r_3}{r_1}=\frac{ca-r_3r_1}{r_2}=\frac{ab-r_1r_2}{r_3}.$$

এখন, $r_2r_3=\dfrac{\triangle^2}{(s-b)(s-c)}=s(s-a).$

$$\therefore\quad bc-r_2r_3=\tfrac{1}{4}\{4bc-2s(2s-2a)\}$$
$$=\tfrac{1}{4}\{4bc-(a+b+c)(b+c-a)\}$$
$$=\tfrac{1}{4}\{a^2-(b-c)^2\}$$
$$=\tfrac{1}{4}\{(a+b-c)(a-b+c)\}=(s-b)(s-c)$$

$$\therefore\quad \frac{bc-r_2r_3}{r_1}=\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{\triangle}=\frac{\triangle}{s}=r$$

অনুরূপভাবে, দেখানো যায় যে, অপর দুইটি অনুপাতের প্রত্যেকটির মান r হইবে।

উদাহরণ 3. যে কোন ত্রিভুজ ABC এতে প্রমাণ কর :

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}.$$

যেহেতু, $A+B+C=180^\circ$;

$$\therefore\quad \cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

কিন্তু, $r=4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}.$

$$\therefore\quad \cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}.$$

উদাহরণ 4. ABC ত্রিভুজে $r_1=R$ হইলে দেখাও যে,

$$\cos B+\cos C=\cos A.$$

দেওয়া আছে, $r_1=R.$

কিন্তু, $r_1=4R\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}.$

$$\therefore\quad 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=1 \qquad \ldots \qquad (1)$$

এখন, $\cos B+\cos C-\cos A$

$$=2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}-\left(1-2\sin^2\frac{A}{2}\right)$$

$$=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}+2\sin^2\frac{A}{2}-1, [\because\ A+B+C=\pi]$$

$$=2\sin\frac{A}{2}\left[\cos\frac{B-C}{2}+\sin\frac{A}{2}\right]-1$$

$$=2\sin\frac{A}{2}\left[\cos\frac{B-C}{2}+\cos\frac{B+C}{2}\right]-1$$

$$=4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-1=0, \quad [(1) \text{ হইতে }].$$

$\therefore \quad \cos B+\cos C=\cos A.$

উদাহরণ 5. কোন ত্রিভুজে $r_1=r_2+r_3+r$ হইলে, দেখাও যে, উহা সমকোণী ত্রিভুজ।

প্রদত্ত শর্ত হইতে, $r_1-r=r_2+r_3$;

বা, $\dfrac{\Delta}{s-a}-\dfrac{\Delta}{s}=\dfrac{\Delta}{s-b}+\dfrac{\Delta}{s-c}$;

বা, $\dfrac{a}{s(s-a)}=\dfrac{2s-(b+c)}{(s-b)(s-c)}$;

বা, $\dfrac{a}{s(s-a)}=\dfrac{a}{(s-b)(s-c)}$;

বা, $s(s-a)=(s-b)(s-c)$;

বা, $\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}=1.$

$\therefore \quad \tan^2\dfrac{A}{2}=1. \qquad \therefore \tan\dfrac{A}{2}=1, \qquad \because \quad 0<\dfrac{A}{2}<90^\circ.$

সুতরাং, $\dfrac{A}{2}=45^\circ. \qquad \therefore \quad A=90^\circ.$

উদাহরণ 6. কোন ত্রিভুজের একটি বহির্বৃত্তের ব্যাস ঐ ত্রিভুজের পরিসীমার সমান হইলে, দেখাও যে, ত্রিভুজটি সমকোণী।

মনে করি, ABC ত্রিভুজে,

$$2r_1=2s.$$

$\therefore \quad r_1=s$; অর্থাৎ, $s\tan\dfrac{A}{2}=s.$

$\therefore \quad \tan\dfrac{A}{2}=1. \qquad \therefore \quad A=90^\circ.$

প্রশ্নমালা 12

ABC ত্রিভুজে প্রমাণ কর (1—14) :

1. $r_2r_3+r_3r_1+r_1r_2=s^2$;

2. $r_1+r_2+r_3-r=4R$;

3. $(r_1-r)(r_2-r)(r_3-r)=4Rr^2$;

4. $\dfrac{b-c}{r_1}+\dfrac{c-a}{r_2}+\dfrac{a-b}{r_3}=0$;

5. $\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}+\dfrac{1}{r_3}=\dfrac{1}{r}$;

6. $\left(\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}+\dfrac{1}{r_3}\right)^2=\dfrac{4}{r}\left(\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}+\dfrac{1}{r_3}\right)$;

7. $\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}+\dfrac{1}{ab}=\dfrac{1}{2Rr}$; [P. U. 1971]

8. $bc+ca+ab=r^2+s^2+4Rr$;

9 $\triangle=\sqrt{rr_1r_2r_3}=r^2\cot\frac{1}{2}A\cot\frac{1}{2}B\cot\frac{1}{2}C$;

10. $\dfrac{1}{r^2}+\dfrac{1}{r_1^{\,2}}+\dfrac{1}{r_2^{\,2}}+\dfrac{1}{r_3^{\,2}}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{\triangle^2}$;

11. $\sin A+\sin B+\sin C=\dfrac{s}{R}$;

12. $a\cot A+b\cot B+c\cot C=2(R+r)$;

13. $4\left(\dfrac{s}{a}-1\right)\left(\dfrac{s}{b}-1\right)\left(\dfrac{s}{c}-1\right)=\dfrac{r}{R}$; [P. U. 1972]

14. $r_1(r_2+r_3)\operatorname{cosec}A=r_2(r_3+r_1)\operatorname{cosec}B$
$=r_3(r_1+r_2)\operatorname{cosec}C$.

15. ABC ত্রিভুজে, $a=13$ সে. মি., $b=14$ সে. মি., $c=15$ সে. মি. হইলে, r_1, r_2, r_3, r এবং R এর মান বাহির কর।

16. ABC ত্রিভুজের বাহুগুলির অনুপাত 8 : 7 : 3 হইলে, $R:r$ এর মান কত ?

17. ABC ত্রিভুজে $2R=5r$ হইলে, দেখাও যে,
$5(\cos A+\cos B+\cos C)=7$.
[$1\leqslant(\cos A+\cos B+\cos C)\leqslant 3/2$ মনে রাখিতে হইবে]।

18. ABC ত্রিভুজে $8R^2=a^2+b^2+c^2$ হইলে, দেখাও যে, উহা একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

19. $\left(1-\frac{r_1}{r_2}\right)\left(1-\frac{r_1}{r_3}\right)=2$ হইলে, দেখাও যে, ত্রিভুজটি সমকোণী।

20. ABC ত্রিভুজে $a, b, c,$ $A.P.$ তে থাকিলে, দেখাও যে, r_1, r_2, r_3, $H.P.$ তে থাকিবে।

21. ABC ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্তের ক্ষেত্রফল S এবং বহির্বৃত্ত তিনটির ক্ষেত্রফল S_1, S_2, S_3 হইলে দেখাও যে,

$$\frac{1}{\sqrt{S_1}}+\frac{1}{\sqrt{S_2}}+\frac{1}{\sqrt{S_3}}=\frac{1}{\sqrt{S}}.$$

22. প্রমাণ কর যে, ABC ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্তের ক্ষেত্রফল এবং ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের অনুপাত $\pi : \cot\frac{1}{2}A \cot\frac{1}{2}B \cot\frac{1}{2}C$.

23. ABC ত্রিভুজে $\Delta=rr_1$ হইলে, দেখাও যে, উহা একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

24. ABC ত্রিভুজে $C=90^\circ$ হইলে, দেখাও যে, $R+r=\frac{1}{2}(a+b)$.

25. ABC সমবাহু ত্রিভুজ হইলে, দেখাও যে, $R=2r$.

26. ABC সমবাহু ত্রিভুজ হইলে, দেখাও যে, অন্তর্বৃত্তের ক্ষেত্রফলের চারগুণ পরিবৃত্তের ক্ষেত্রফলের সমান হইবে।

27. দেখাও যে r_1, r_2, r_3,

$x^3-x^2(r+4R)+s^2x-s\Delta=0$ সমীকরণটির বীজত্রয়।

28. ABC ত্রিভুজের জন্য $R=2r$ হইলে, দেখাও যে, ত্রিভুজটি সমবাহু।

[এখানে, $(b+c-a)(b-c)^2+(c+a-b)(c-a)^2+(a+b-c)(a-b)^2=0.$]

29. যে কোন ত্রিভুজ ABC এর জন্য দেখাও যে, $R\geqslant 2r$.

একাদশ অধ্যায়

ত্রিকোণমিতিক তালিকার ব্যবহার

[Use of Trigonometrical Tables]

11-1. বিভিন্ন তালিকার ব্যবহার প্রণালী।

এই পুস্তকের অন্তর্গত বীজগণিত অংশের ষষ্ঠ অধ্যায়ের 6-10 অনুচ্ছেদে কোন সংখ্যার সাধারণ লগারিদম্-এর তালিকা এবং 6-11 অনুচ্ছেদে অ্যান্টিলগারিদম্-এর তালিকার ব্যবহার প্রণালী বিশদভাবে আলোচনা করা হইয়াছে। সেইজন্য ইহাদের আলোচনা আর এখানে করা হইল না।

এই পুস্তকের শেষে ছয়টি বিভিন্ন তালিকা দেওয়া আছে। Table—I এবং Table—II যথাক্রমে সাধারণ লগারিদম্ এবং অ্যান্টিলগারিদম্-এর তালিকা। অপর চারটি তালিকার ব্যবহার প্রণালী নিম্নে দেওয়া হইল।

[1] Table—III এর ব্যবহার :

0° হইতে আরম্ভ করিয়া $1'$ (এক মিনিট) ব্যবধানে 90° পর্যন্ত কোণগুলির সাধারণ *sine* এবং *cosine*-এর মানগুলিকে একই তালিকা (Table—III) তে দেওয়া আছে।

এই তালিকার সর্ববামে 0°, 1°, 2°,......, 88°, 89° পর্যন্ত কোণগুলি পরপর নীচে নীচে একটি স্তম্ভে এবং ঠিক মাথার উপর অনুভূমিক রেখা বরাবর $0'$, $10'$, $20'$, $30'$, $40'$, $50'$, $60'$ কোণগুলি পরপর লেখা আছে।

আবার ঐ তালিকার মাঝখানে একটি স্তম্ভে 89°, 88°, ..., 2°, 1°, 0° কোণগুলি এবং সর্বনিম্নে অনুভূমিক রেখা বরাবর $60'$, $50'$, $40'$, $30'$, $20'$, $10'$, $0'$ কোণগুলি পরপর লেখা আছে।

তালিকার অভ্যন্তরে পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত যে সমস্ত অঙ্কগুলি $0'$, $10'$, $20'$, $30'$, $40'$, $50'$, $60'$-এর নীচে নীচে লিপিবদ্ধ আছে তাহারা বিভিন্ন কোণের *sine* এবং *cosine*-এর মান। তালিকাটি এমনভাবে সাজানো আছে যে, কোন প্রদত্ত কোণের *sine*-এর মান উহার পূরক কোণের *cosine*-এর মানের সমান। এইভাবে সাজানোর জন্য একই তালিকা হইতে *sine* এবং *cosine*-এর মান নির্ণয় করা সম্ভবপর। কোন কোণের sine এর মান নির্ণয়ের জন্য স্তম্ভের উপরিভাগ হইতে নিচের দিকে এবং সারির বামদিক হইতে ডানদিকে পড়িতে হইবে; কিন্তু কোন কোণের cosine এর জন্য স্তম্ভের নিম্নভাগ হইতে উপরিভাগে এবং সারির ডানদিক হইতে বামদিকে পড়িতে হইবে।

উদাহরণস্বরূপ, $\sin 54^\circ\, 20' = 0{\cdot}81242$;

$\cos 35^\circ\, 40' = 0{\cdot}81242$.

ঐ তালিকার ডানপার্শ্বে *Difference* তালিকায় বিভিন্ন কোণের মিনিটে (দশের কম) পরিবর্ত্তনের জন্য *sine* এবং *cosine*-এর (পার্থক্যের) মানগুলি দেওয়া আছে। লক্ষণীয় যে, কোণের মান 0° হইতে বৃদ্ধি পাইতে পাইতে 90° পর্য্যন্ত যাইলে কোণগুলির *sine*-এর অনুরূপ মানগুলি 0 (শূন্য) হইতে 1 পর্যন্ত বৃদ্ধি পাইতে থাকিবে; কিন্তু *cosine* এর অনুরূপ মানগুলি 1 হইতে 0 পর্য্যন্ত কমিতে থাকিবে। সুতরাং, কোণের মান বৃদ্ধি পাইতে থাকিলে *Difference* তালিকা হইতে প্রাপ্তমান *sine* এর ক্ষেত্রে যোগ এবং *cosine* এর ক্ষেত্রে বিয়োগ করিতে হইবে। ঐ *Difference* তালিকাতে 1′ (এক মিনিট) অন্তর অন্তর কোণের পার্থক্যে *sine* এবং *cosine* এর পরিবর্তনটুকু দেওয়া আছে। এইগুলি আসলে পূর্ণসংখ্যা নহে; আসন্ন পাঁচ দশমিক স্থান পর্য্যন্ত অংশটির দশমিক বিন্দু না লিখিয়া সংক্ষেপে কেবলমাত্র সার্থক অঙ্কগুলিকে সঠিক স্থানে রাখিয়া লিপিবদ্ধ আছে।

উদাহরণস্বরূপ,

$$\sin 46^\circ\ 36' = \sin(46^\circ\ 30' + 6')$$
$$= 0{\cdot}72537 + {\cdot}00120$$
$$= 0{\cdot}72657.$$
$$\cos 46^\circ\ 36' = \cos(46^\circ\ 30' + 6')$$
$$= 0{\cdot}68835 - 0{\cdot}00127$$
$$= 0{\cdot}68708.$$

[2] Table—IV এর ব্যবহার :

Table—IV-এতে বিভিন্ন কোণের সাধারণ *tangent* এবং *cotangent* এর মানগুলি লিপিবদ্ধ আছে। Table—IV এর ব্যবহার ঠিক *Table—III* এর ব্যবহারের মত। পার্শ্বে *Difference* তালিকাতে 1′ (এক মিনিট) অন্তর অন্তর কোণের, পার্থক্যে *tangent* এবং *cotangent*-এর পরিবর্তন দেওয়া আছে। কোণের মান বৃদ্ধি পাইলে *Difference* তালিকা হইতে *tangent* এর ক্ষেত্রে যোগ এবং *cotangent* এর ক্ষেত্রে বিয়োগ করিতে হইবে।

কোন কোণের *tangent* এর মান নির্ণয়ের জন্য স্তম্ভের উপরিভাগ হইতে নিম্নভাগে এবং সারির বামদিক হইতে ডানদিকে পড়িতে হইবে; কিন্তু কোণের *cotangent*-এর জন্য স্তম্ভের নিম্নভাগ হইতে উপরিভাগে এবং সারির ডানদিক হইতে বামদিকে পড়িতে হইবে। তালিকাটি এমনভাবে তৈয়ারী যে, কোন কোণের *tangent* এর মান ঐ কোণের পূরক কোণের *cotangent* এর সমান।

উদাহরণস্বরূপ,

(*i*) $\tan 54^\circ 20' = 1{\cdot}39336$;

$\cot 54^\circ 20' = 0{\cdot}71769$.

(*ii*) $\tan 46^\circ 36' = \tan(46^\circ 30' + 6')$

$= 1{\cdot}05378 + {\cdot}00368$

$= 1{\cdot}05746$.

$\cot 46^\circ 36' = \cot(46^\circ 30' + 6')$

$= 0{\cdot}94896 - 0{\cdot}00332$

$= 0{\cdot}94564$.

[3] Table—V এর ব্যবহার ঃ

লক্ষ্য করার বিষয়, 0° ও 90° এর মধ্যবর্তী যে কোন কোণের sine অথবা cosine এর মান 0 এবং 1 এর মধ্যবর্তী। সুতরাং, এই সমস্ত ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণের sine এবং cosine এর লগারিদম্‌-এর মান ঋণাত্মক হইবে। ঋণাত্মক মানগুলিকে লইয়া তালিকা প্রস্তুত করিবার অসুবিধা দূরীকরণের জন্য উহাদের অনুরূপ মানগুলির সহিত 10 যোগ করিয়া তালিকা প্রস্তুত করা হইয়াছে। সেইজন্য $0^\circ < \theta < 90^\circ$ হইলে, $\log \sin \theta$ এর মানের পরিবর্তে, $10 + \log \sin \theta$ এর মান তালিকায় সন্নিবেশিত আছে। অনুরূপভাবে, $\log \cos \theta$ এর মানের পরিবর্তে $10 + \log \cos \theta$ এর মান তালিকায় লিপিবদ্ধ আছে। $10 + \log \sin \theta$ কে $L \sin \theta$ এবং $10 + \log \cos \theta$ কে $L \cos \theta$ সংক্ষেপে লেখা হইয়া থাকে।

সুতরাং, Table—V হইতে 0° এবং 90° এর মধ্যবর্তী θ এর বিভিন্ন মানের জন্য $L \sin \theta$ এবং $L \cos \theta$ এর মান পাওয়া যাইবে।

সাধারণ sine এবং cosine এর তালিকার ব্যবহারের মত, অর্থাৎ, Table—III এর ব্যবহারের মত এই Table—V ব্যবহার করা যাইবে।

উদাহরণস্বরূপ,

(*i*) $L \sin 45^\circ 30' = 9{\cdot}85324$;

$L \sin 45^\circ 38' = L \sin(45^\circ 30' + 8')$

$= 9{\cdot}85324 + 0{\cdot}00099$

$= 9{\cdot}85423$

(ii) $L \cos 64°50' = 9\text{·}62865$;

$L \cos 64°58' = L \cos (64°50' + 8')$

$= 9\text{·}62865 - 0\text{·}00212$

$= 9\ 62653.$

[4] Table—VI-এর ব্যবহার :

লক্ষ্য করার বিষয়, 0° এবং 45° এর মধ্যবর্তী যে কোন কোণের tangent 0 এবং 1 এর মধ্যবর্তী ; আবার, 45° এবং 90° এর মধ্যবর্তী যে কোন কোণের cotangent এর মান 0 এবং 1 এর মধ্যবর্তী। এই সমস্ত কোণের tangent এবং cotangent এর লগারিদম্ এর অনুরূপ মানগুলি ঋণাত্মক হইবে। ঋণাত্মক মানগুলিকে লইয়া তালিকা প্রস্তুত করিবার অসুবিধার জন্য $0° < \theta < 90°$ এর ক্ষেত্রে $\log \tan \theta$ এবং $\log \cot \theta$ এর মানের পরিবর্তে যথাক্রমে, $10 + \log \tan \theta$ এবং $10 + \log \cot \theta$ এর মানগুলি এই তালিকায় লিপিবদ্ধ আছে। $10 + \log \tan \theta$ কে $L \tan \theta$ এবং $10 + \log \cot \theta$ কে $L \cot \theta$ সংক্ষেপে লেখা হইয়া থাকে।

সাধারণ tangent এবং cotangent এর তালিকার ব্যবহারের মত, অর্থাৎ, Table—IV এর ব্যবহারের মত, Table—VI ব্যবহার করা যাইবে।

উদাহরণস্বরূপ,

(i) $L \tan 40°30' = 9\text{·}93150$;

$L \tan 40°36' = L \tan (40°30' + 6')$

$= 9\text{·}93150 + 0\text{·}00154$

$= 9\text{·}93304.$

(ii) $L \cot 40°30' = 10\text{·}06850$

$L \cot 40°36' = L \cot (40°30' + 6')$

$= 10\text{·}06850 - 0\text{·}00154$

$= 10\text{·}06696.$

11-2 "সমানুপাতের নিয়ম" (Principle of Proportional parts).

এই নিয়মটি হইল :

(1) কোন সংখ্যার হ্রাসবৃদ্ধিগুলি অতি সামান্য হইলে, উহাদের লগারিদম্ এর হ্রাসবৃদ্ধিগুলির ক্রমিক অনুপাত ঐ সংখ্যাগুলির হ্রাসবৃদ্ধিগুলির ক্রমিক অনুপাতের প্রায় সমান হইবে। ইহার উদাহরণ বীজগণিতের ষষ্ঠ অধ্যায়ে দেওয়া হইয়াছে।

(2) কোন কোণের হ্রাসবৃদ্ধিগুলি অতি সামান্য হইলে, ঐ কোণগুলির যে কোন একই শ্রেণীর ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মানগুলির হ্রাসবৃদ্ধিগুলির ক্রমিক অনুপাত ঐ কোণগুলির হ্রাসবৃদ্ধিগুলির ক্রমিক অনুপাতের প্রায় সমান হইবে।

উদাহরণ 1. দেওয়া আছে, $\sin 42°36' = 0·67688$, এবং $\sin 42°37' = 0·67709$; $\sin 42°36'25''$ এর মান বাহির কর।

$$\sin 42°37' = 0·67709$$
$$\sin 42°36' = 0·67688$$

∴ কোণটির $1' (= 60'')$ বৃদ্ধির জন্য অন্তর $= 0·00021$

∴ $25''$ বৃদ্ধির জন্য অন্তর $= \frac{·00021}{60} \times 25 = 0·0000875$

এখানে, কোণের পরিমাপ $60''$ বৃদ্ধি পাইলে, কোণটির sine এর মান ·00021 বৃদ্ধি পায়।

সুতরাং কোণের পরিমাপ $25''$ বৃদ্ধি পাইলে, কোণটির sin এর মান 0·00009 বৃদ্ধি পাইবে।

$$\therefore \sin 42°36'25'' = 0·67688 + 0·00009$$
$$= 0·67697 \text{ (প্রায়)।}$$

উদাহরণ 2. দেওয়া আছে, $\cos 32°16' = 0·84556$ এবং $\cos 32°17' = 0·84540$; $\cos 32°16'24''$ এর মান বাহির কর।

$$\cos 32°16' = 0·84556$$
$$\cos 32°17' = 0·84540$$

∴ $1' (= 60'')$ বৃদ্ধির জন্য অন্তর $= 0·00016$

কোণের পরিমাপ $60''$ বৃদ্ধি পাইলে, কোণের cosine এর মান 0·00016 কমে।

সুতরাং, কোণের পরিমাপ $24''$ বৃদ্ধি পাইলে, কোণটির cosine এর মান $\frac{0·00016}{60} \times 24$ অর্থাৎ 0 000064 কমে।

$$\therefore \cos 32°16'24'' = 0·84556 - 0·00006$$
$$= 0·84550 \text{ (প্রায়)।}$$

উদাহরণ 3. দেওয়া আছে, $L\tan 55°35' = 10·16423$ এবং $L \tan 55°36' = 10·16449$; $L\tan 55°35'37''$ এর বাহির কর।

$$L\tan 55°36' = 10·16449$$
$$L\tan 55°35' = 10·16423$$

$1'(=60'')$ বৃদ্ধির জন্য অন্তর $= 0·00026$

$\therefore$ $37''$ বৃদ্ধির জন্য অন্তর $= \dfrac{·00026}{60} \times 37 = ·00016$ (প্রায়)।

$\therefore$ $L\tan 55°35'37'' = 10·16423 + 0·00016$

$= 10·16439$ (প্রায়)।

উদাহরণ 4. $L \sin \theta = 9·91092$ হইলে তালিকার সাহায্যে θ এর মান বাহির কর।

তালিকা হইতে পাই

$$L\sin 54°33' = 9·91096$$
$$L\sin 54°32' = 9·91087$$

$\therefore$ $1'(=60'')$ বৃদ্ধির জন্য অন্তর $= 0·00009$

সুতরাং বুঝা যাইতেছে, θ এর মান $54°32'$ এবং $54°33'$ এর মধ্যবর্তী হইবে।

ধরি, $L\sin 54°32'x'' = 9·91092.$

আবার, $L\sin 55°32' = 9·91087$

$\therefore$ x'' বৃদ্ধির জন্য অন্তর $= 0·00005$

সুতরাং $\dfrac{x}{60} = \dfrac{·00005}{·00009}$

অর্থাৎ, $x : 60 = 5 : 9$

$\therefore$ $x = \frac{5}{9} \times 60 = 33·3$ (প্রায়)

$\therefore$ $\theta = 54°32'\,33''·3$ (প্রায়)

উদাহরণ 5. দেওয়া আছে,

$L\tan 79°51'40'' = 10·7475657$;

$L\tan 79°51'50'' = 10·7476872.$

যে কোণের $L\tan$ এর মান $10·7476532$ সেই কোণের পরিমাপ কত ?

$$L\tan 79°51'50'' = 10·7476872,$$
$$L\tan 79°51'40'' = 10·7475657$$

$\therefore$ $10''$ বৃদ্ধির জন্য অন্তর $= 0·0001215$

বুঝা যাইতেছে, $L \tan\theta = 10{\cdot}7476532$ হইলে,

$\theta = 79^\circ 51' 40'' + x''$ হইবে।

যেহেতু, $10{\cdot}7476532 - 10{\cdot}7475657 = {\cdot}0000875$

সুতরাং, $x : 10 = 875 : 1215$

$$\therefore \quad x = \frac{875 \times 10}{1215} = 7{\cdot}2 \text{ (প্রায়)।}$$

$$\theta = 79^\circ 51' 40'' + 7''{\cdot}2 = 79^\circ 51' 47''{\cdot}2 \text{ (প্রায়)।}$$

প্রশ্নমালা 13

1. তালিকা হইতে মান বাহির কর :

(i) $\sin 54^\circ 33'$; (ii) $\cos 54^\circ 33'$; (iii) $\tan 45^\circ 47'$;

(iv) $\cot 45^\circ 47'$; (v) $L \tan 50^\circ 26'$; (vi) $L \sec 50^\circ 26'$.

2. $\sec 23^\circ 6' = 1{\cdot}08717$ এবং $\sec 23^\circ 7' = 1{\cdot}08731$ দেওয়া থাকিলে, $\sec 23^\circ 6' 28''$ এর মান বাহির কর।

3. $\cot 56^\circ 20' = 0{\cdot}66608$ এবং $1'$ এর জন্য অন্তর ${\cdot}00042$ হইলে, $\cot 56^\circ 20' 36''$ এর মান বাহির কর।

4. দেওয়া আছে, $\tan 76^\circ 21' = 4{\cdot}1177784$ এবং $\tan 76^\circ 22' = 4{\cdot}1230079$; $\tan 76^\circ 21' 29''$ এর মান বাহির কর।

5. দেওয়া আছে, $\cos 32^\circ 16' = 0{\cdot}8455726$ এবং $\cos 32^\circ 17' = 0{\cdot}8454172$; $\cos\theta = 0{\cdot}8455176$ হইলে, θ এর মান বাহির কর।

6. $L \tan 13^\circ 47' = 9{\cdot}389724$ এবং $L \tan 13^\circ 48 = 9{\cdot}390270$ হইলে, θ এর মান বাহির কর, যেখানে $L \tan\theta = 9{\cdot}389744$.

7. মান নির্ণয় কর :

$$\frac{\sin 34^\circ 17' \times \cos 77^\circ 23'}{\tan 27^\circ 12'}$$

দেওয়া আছে, $L \sin 12^\circ 37' = 9{\cdot}3393$; $L \cos 55^\circ 43' = 9{\cdot}7507$;
$L \tan 62^\circ 48' = 10{\cdot}2891$; $\log 23{\cdot}94 = 1{\cdot}3791$.

[Joint Ent. Ex. 1968]

8. মান নির্ণয় কর :

(i) $L \sec 40^\circ 37'$; (ii) $L \operatorname{cosec} 38^\circ 43'$.

9. $L \sec 36^\circ 52' = 10{\cdot}0968916$ হইলে, $\log \sin 53^\circ 8'$ এর মান বাহির কর।

10. যদি $0^\circ < \theta < 90^\circ$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$L \sin\theta + L \operatorname{cosec}\theta = L \cos\theta + L \sec\theta = L \tan\theta + L \cot\theta = 20.$$

দ্বাদশ অধ্যায়

ত্রিভুজের সমাধান

[Solution of Triangles]

12-1. উপস্থাপন।

প্রত্যেক ত্রিভুজের তিনটি বাহু এবং তিনটি কোণ আছে। ইহাদের প্রত্যেকটিকে ত্রিভুজের অংশ বলা হয়। এই অংশ ছয়টি স্বাধীন নহে; তাহাদের মধ্যে পরস্পর সম্পর্ক আছে; এই পুস্তকের ত্রিকোণমিতির দশম অধ্যায়ে তাহা দেখানো হইয়াছে। সাধারণভাবে, একটি ত্রিভুজের তিনটি অংশ দেওয়া থাকিলে, বাকী তিনটি অংশ নির্ণয় করা যাইতে পারে। প্রদত্ত তিনটি অংশের সাহায্যে বাকী অংশগুলি নির্ণয় করাকে ত্রিভুজের সমাধান বলা হয়।

নিম্নলিখিত বিভিন্ন প্রকারে একটি ত্রিভুজের তিনটি অংশ দেওয়া থাকিতে পারে :

(1) **তিনটি কোণ ;**

(2) **তিনটি বাহু ;**

(3) **দুইটি কোণ এবং একটি বাহু ;**

(4) **দুইটি বাহু এবং উহাদের মধ্যবর্তী কোণ ;**

(5) **দুইটি বাহু এবং উহাদের একটির বিপরীত কোণ।**

12-2. একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণ প্রদত্ত :

কোনও ত্রিভুজের তিনটি কোণ দেওয়া থাকিলে, উহার বাহুগুলিকে সঠিকভাবে নির্ণয় করা যাইবে না ; কেবলমাত্র তাহাদের অনুপাতগুলি জানা যাইবে ; কারণ, প্রতিটি ত্রিভুজের জন্য $A+B+C=180°$ সম্পর্কটি বিদ্যমান থাকায়, তিনটি কোণ দেওয়া থাকার অর্থ মাত্র দুইটি অংশ দেওয়া আছে।

আবার, আমরা জানি, $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

অতএব, আমরা a, b, c এর অনুপাতগুলি পাইতে পারি। এইরূপক্ষেত্রে, অসংখ্য সদৃশকোণী ত্রিভুজ পাইব। অপর একটি দৈর্ঘসংশ্লিষ্ট শর্ত দেওয়া থাকিলে, তবেই অনন্য ত্রিভুজ পাওয়া সম্ভবপর।

উদাহরণ 1. একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণের পরিমাপ 60° এবং 45° ; উহার বাহুগুলির অনুপাত বাহির কর।

ত্রিভুজের তৃতীয় কোণের পরিমাপ

$$=180^\circ-(60^\circ+45^\circ)=75^\circ$$

$\therefore$ বাহুগুলির (ছোট হইতে বড়) অনুপাত $=\sin 45^\circ : \sin 60^\circ : \sin 75^\circ$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}} : \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=2 : \sqrt{6} : \sqrt{3}+1$$

উদাহরণ 2. একটি ত্রিভুজের কোণগুলির অনুপাত $1:2:3$ এবং উহার পরিবৃত্তের ব্যাস 6 সে. মি. হইলে, উহার বাহুগুলির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

ত্রিভুজের কোণগুলিকে α, 2α, 3α ধরা যাইতে পারে।

$\therefore\ \alpha+2\alpha+3\alpha=180^\circ.$ $\qquad\therefore\ \alpha=30^\circ$

সুতরাং, উহার কোণগুলি : $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.

$$\therefore\ \frac{a}{\sin 30^\circ}=\frac{b}{\sin 60^\circ}=\frac{c}{\sin 90^\circ}=2R=6 \text{ সে. মি.}$$

অর্থাৎ, $2a=\dfrac{2b}{\sqrt{3}}=c=6$ সে. মি.

$\therefore\ a=3$ সে. মি. ; $\quad b=3\sqrt{3}$ সে. মি. ; $\quad c=6$ সে. মি.।

12-3. একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু প্রদত্ত :

মনে করি, ABC ত্রিভুজের a, b, c এর মান দেওয়া আছে। তাহা হইলে,

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

এই সূত্রের সাহায্যে A কোণের পরিমাপ নির্দিষ্টরূপে নির্ণয় করা যাইবে ; কারণ, ত্রিভুজের প্রতিটি কোণ 0° এবং 180° এর মধ্যবর্তী হইবে। অনুরূপভাবে, B এর মান নির্ণয় করা যাইবে। তখন, $A+B+C=180^\circ$ হইতে C এর মান পাওয়া যাইবে।

অথবা, $\tan\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$;

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}; \quad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}};$$

যেখানে, $2s=a+b+c$,

—ইহাদের যে কোনও একটি সূত্রের সাহায্যে A এর মান নির্দিষ্টরূপে নির্ণয় করা যাইবে। অনুরূপভাবে, B এর মান পাওয়া যাইবে। তখন, $A+B+C=180^\circ$ এর সাহায্যে C এর মান পাওয়া যাইবে।

উদাহরণ 1. কোনও ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য 8 সে. মি., 15 সে. মি., 17 সে. মি.। উহার বৃহত্তম কোণের মান বাহির কর। **[P. U. 1961]**

মনে করি, ABC ত্রিভুজের $a=17$ সে. মি., $b=15$ সে. মি., $c=8$ সে. মি.।

তাহা হইলে, বাহুগুলির মধ্যে a এর দৈর্ঘ্য বৃহত্তম। সুতরাং উহার সম্মুখীন কোণ Aই বৃহত্তম কোণ।

এখন, $$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{15^2+8^2-17^2}{2\times 15\times 8}=0.$$

$\therefore\ A=90°.$ $\therefore$ নির্ণেয় উত্তর : 90°

উদাহরণ 2. কোনও ত্রিভুজের বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য 9 একক, 10 একক, 11 একক। যে বাহুর দৈর্ঘ্য 10 একক তাহার সম্মুখীন কোণের মান বাহির কর; দেওয়া আছে, $\log 2=0{\cdot}3010300$; $L\tan 29°30'=9{\cdot}7526420$;

$L\tan 29°29'=9{\cdot}7523472.$ **[Joint Ent. Ex. 1972 ; H. S. 1974]**

ABC ত্রিভুজে $a=10,\ b=11,\ c=9$ ধরিলে, $2s=a+b+c=30.$

$$\therefore\ \tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}=\sqrt{\frac{(15-11)(15-9)}{15(15-10)}}=\sqrt{\frac{32}{100}}$$

$$\therefore\ L\tan\frac{A}{2}=10+\tfrac{1}{2}\{\log 32-\log 100\}$$

$$=10+\tfrac{5}{2}\log 2-1$$

$$=9+\tfrac{5}{2}(0{\cdot}30103)=9{\cdot}7525750.$$

অতএব, বুঝা যাইতেছে যে, $\frac{1}{2}A$ এর মান 29°29′ এবং 29°30′ এর মধ্যবর্তী।

ধরা যাক, $\frac{1}{2}A=29°29'x''$.

এখন, $L\tan 29°30'=9{\cdot}7526420$

$L\tan 29°29'=9{\cdot}7523472$

$\therefore$ 60″ বৃদ্ধির জন্য অন্তর $=0{\cdot}0002948$

আবার, $L\tan 29°29'x''=9{\cdot}7525750$

$L\tan 20°29'\ =9{\cdot}7523472$

$\therefore$ x'' বৃদ্ধির জন্য অন্তর $=0{\cdot}0002278$

$$\therefore\ x:60=2278:2948$$

$$\therefore\ x=\frac{2278\times 60}{2948}=\frac{510}{11}=46{\cdot}36..$$

$\therefore\ \frac{1}{2}A=29°29'46''{\cdot}36$ প্রায় ;

$\therefore\ A=58°59'32''{\cdot}72$ (প্রায়)।

উদাহরণ 3. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য 5, 6, 7 ; উহার বৃহত্তম কোণের পরিমাপ নির্ণয় কর ; দেওয়া আছে, $\log 6 = \cdot 7781513$;

$L \cos 39°14' = 9\cdot 8890644$; এবং $1'$ এর জন্য অন্তর $= 1032$.

[Joint. Ent. Ex. 1971]

ABC ত্রিভুজে, $a = 7,\ b = 6,\ c = 5$ ধরি।

$\therefore\ 2s = a + b + c = 18$; অর্থাৎ, $s = 9$.

$$\therefore\ \cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} = \sqrt{\frac{9(9-7)}{6 \times 5}} = \sqrt{\frac{6}{10}}$$

$$\therefore\ L \cos \tfrac{1}{2} A = 10 + \tfrac{1}{2}\{\log 6 - \log 10\}$$
$$= 10 + \tfrac{1}{2}\{\cdot 7781513 - 1\}$$
$$= 9\cdot 88907565$$

সুতরাং, দেখা যাইতেছে, $\frac{1}{2} A = 39°14' - x''$.

$L \cos (39°14' - x'')$	$= 9\cdot 8890756$	5
$L \cos 39°14'$	$= 9\cdot 8890644$	
x'' এর জন্য অন্তর $=$	112	5

$\therefore\ x : 60 = 112\cdot 5 : 1032$

$$\therefore\ x = \frac{112\cdot 5 \times 60}{1032} = 6\cdot 54$$

তাহা হইলে, $\frac{1}{2} A = 39°14' - 6''\cdot 54$

বা, $A = 78°28' - 13''\cdot 08 = 78°27'46''\cdot 92$

$\therefore$ নির্ণেয় উত্তর : $78°27'46''\cdot 9$ (প্রায়)।

প্রশ্নমালা 14

1. কোন ত্রিভুজের কোণগুলি : 15°, 60°, 105° ; ইহার বাহুগুলির অনুপাত বাহির কর।

2. একটি ত্রিভুজের কোণগুলির অনুপাত 1 : 2 : 3 হইলে প্রমাণ কর যে, উহার বাহুগুলির অনুপাত 1 : $\sqrt{3}$: 2। **[H. S. 1960]**

3. একটি ত্রিভুজের কোণগুলির অনুপাত 2 : 3 : 7 এবং উহার পরিব্যাসার্ধ 10 সে. মি. হইলে, বাহুগুলির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। **[H. S. 1966 ; P. U. 1968]**

4. 2 মিটার দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটি সরু তারকে তিন অংশে বিভক্ত করিয়া একটি ত্রিভুজ তৈয়ারী করা হইল। ঐ ত্রিভুজের দুইটি কোণের পরিমাপ 35° এবং 60°

হইলে, উহার বাহুগুলির দৈর্ঘ্য দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত মিটারে নির্ণয় কর ; দেওয়া আছে, $\sin 35° = \cdot5736$; $\sin 60° = \cdot8660$; $\sin 85° = \cdot9962$.

[**Joint. Ent. Ex. 1976**]

5. কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহুর পরিমাপ $20'', 21'', 29''$. উহার বৃহত্তম কোণটির মান বাহির কর। [**H. S. 1963**]

6. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য 119 সে. মি., 120 সে. মি., 169 সে. মি.। উহার বৃহত্তম কোণটির মান বাহির কর।

7. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য 130 সে. মি., 123 সে. মি., 77 সে. মি.। উহার বৃহত্তম কোণটি পরিমাপ নির্ণয় কর ; দেওয়া আছে,

$\log 2 = \cdot3010300$; $L \tan 38°39' = 9\cdot9029376$;

$L \tan 38°40' = 9\cdot9031965$. [**P. U. 1971**]

8. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলি 2, 3 এবং 4 একক। উহার বৃহত্তম কোণটির পরিমাপ বাহির কর ; দেওয়া আছে,

$\log 2 = \cdot3010300$; $\log 3 = \cdot4771213$; $L \tan 52°14' = 10\cdot1108395$;

$L \tan 52°15' = 10\cdot1111004$. [**H. S. 1971**]

9. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলির অনুপাত 7 : 12 : 11 ; উহার ক্ষুদ্রতম কোণটির পরিমাপ নির্ণয় কর ; দেওয়া আছে, $L \tan 17°33' = 9\cdot500042$, এবং $1'$ এর জন্য অন্তর = 439. [**Joint. Ent. Ex. 1973**]

10. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলির অনুপাত 5 : 8 : 11. উহার বৃহত্তম কোণটির পরিমাপ নির্ণয় কর ; দেওয়া আছে,

$\log 7 = 0\cdot8450980$; $L \sin 56°47' = 9\cdot9225105$,

$L \sin 56°48' = 9\cdot9226032$. [**Joint. Ent. Ex. 1966**]

11. (*i*) ABC ত্রিভুজে, $a = 4, b = 5, c = 6$. B এর মান নির্ণয় কর ;

দেওয়া আছে, $\log 2 = 0\cdot30\dot{1}0300$; $L \cos 27°53' = 9\cdot9464040$,

$1'$ এর জন্য অন্তর = $\cdot0000669$. [**H. S. Comp. 1973**]

(*ii*) দেখাও যে, $C = 2A$; এবং A ও C বাহির কর।

12. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলি 32, 40, 66. উহার বৃহত্তম কোণের পরিমাপ বাহির কর, দেওয়া আছে,

$\log 207 = 2\cdot3159703$; $\log 1073 = 3\cdot0305997$;

$L \cot 66°18' = 9\cdot6424342$;

$1'$ এর জন্য অন্তর = $\cdot0003431$. [**H. S. 1973**]

13. একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর পরিমাপ 3 মি., 5 মি., 7 মি.। উহার বৃহত্তম কোণটি নির্ণয় কর; এবং তালিকার সাহায্যে অবশিষ্ট কোণ দুইটি নির্ণয় কর।

14. অসমান বাহুবিশিষ্ট কোনও ত্রিভুজের বাহুগুলি সমান্তর প্রগতিতে থাকিলে, দেখাও যে, উহার মধ্যম কোণটি 60° হইতে ছোট। মধ্যম কোণটি $2\tan^{-1}\frac{1}{2}$ হইলে, বাহুগুলির অনুপাত এবং অবশিষ্ট কোণ দুইটি বাহির কর।

12-4. একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ এবং একটি বাহু প্রদত্ত :

মনে করি, ABC ত্রিভুজের A এবং B এর মান এবং যে কোন বাহুর মান দেওয়া আছে। যেহেতু, $A+B+C=180^\circ$, সুতরাং, অপর কোণ C সহজেই জানা যাইবে।

তাহা হইলে,

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

সূত্র হইতে অপর দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য জানা যাইবে।

উদাহরণ 1. ABC ত্রিভুজে, $B=45^\circ$; $C=10^\circ$; $a=200$ ফুট; দেওয়া আছে। b এর মান বাহির কর; দেওয়া আছে $\log 2 = \cdot 3010300$;

$L\sin 55^\circ = 9\cdot 9133645$; $\log 1726\cdot 4 = 3\cdot 2371414$;

$\log 1726\cdot 5 = 3\cdot 2371666$. [C. U. 1947]

এখানে, $A=180^\circ-(B+C)=180^\circ-(45^\circ+10^\circ)=125^\circ$

এখন, $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ হইতে,

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{200\times\sin 45^\circ}{\sin 125^\circ}$$

$$=\frac{200}{\sqrt{2}\sin 55^\circ}$$

$$\therefore\ \log b=\log 200-\tfrac{1}{2}\log 2-L\sin 55^\circ+10$$
$$=2+\log 2-\tfrac{1}{2}\log 2-L\sin 55^\circ+10$$
$$=12+\tfrac{1}{2}\log 2-L\sin 55^\circ$$
$$=12+\tfrac{1}{2}\times\cdot 30103-9\cdot 9133645$$
$$=2\cdot 2371505.$$

বুঝা যাইতেছে, $b=172\cdot 64+x$.

এখন, $\log 172\cdot 65=2\cdot 2371666$,

$\log 172\cdot 64=2\cdot 2371414$.

$\therefore$ $\cdot 01$ এর জন্য অন্তর $=\ \cdot 0000252$

আবার, $\log(172{\cdot}64+x)=2{\cdot}2371505$

$\log 172{\cdot}64 \quad =2{\cdot}2371414$

$\therefore$ x এর জন্য অন্তর $= {\cdot}0000091$

তাহা হইলে, "সমানুপাতের নিয়ম" অনুযায়ী,

$$x : {\cdot}01 = 91 : 252$$

$$\therefore \quad x=\frac{91\times{\cdot}01}{252}=0{\cdot}00361\cdots$$

$\therefore$ $b=172{\cdot}64+{\cdot}0036=172{\cdot}6436$ (প্রায়)।

$\therefore$ নির্ণেয় উত্তর : $172{\cdot}6436$ ফুট, (প্রায়)।

12-5. একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু এবং উহাদের মধ্যবর্তী কোণ প্রদত্ত :

মনে করি, ABC ত্রিভুজের b এবং c এর দৈর্ঘ্য এবং A কোণের পরিমাপ দেওয়া আছে।

এখন, $A+B+C=180^\circ$ বলিয়া,

$$(B+C)=180^\circ-A \qquad \cdots \qquad (1)$$

আবার,

$\tan\dfrac{B-C}{2}=\dfrac{b-c}{b+c}\cot\frac{1}{2}A$ বলিয়া, এখান হইতে

$(B-C)$ এর মান পাওয়া যাইবে। $\cdots$ (2)

তাহা হইলে, (1) এবং (2) এর সাহায্যে, B এবং C এর মান জানা যাইবে।

তারপর, $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$

অথবা $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$

অথবা $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ হইতে a জানা যাইবে।

উদাহরণ 1. ABC ত্রিভুজের, $b=90$, $c=70$ এবং $A=72^\circ48'30''$; B এবং C এর মান নির্ণয় কর।

দেওয়া আছে, $\log 2={\cdot}3010300$; $L\cot 36^\circ24'15''=10{\cdot}1323111$;

$L\tan 9^\circ37'=9{\cdot}2290071$; $L\tan 9^\circ38'=9{\cdot}2297735$.

[P. U. 1970]

এখানে, $B+C=180^\circ-A=180^\circ-72^\circ48'30''$

$=107^\circ11'30''$.

$$\therefore\quad \frac{B}{2}+\frac{C}{2}=53^\circ 35' 45''. \quad \cdots \quad (1)$$

আবার, $\tan\dfrac{B-C}{2}=\dfrac{b-c}{b+c}\cot\dfrac{A}{2}$

$$=\frac{20}{160}\cot 36^\circ 24' 15''$$

$$=\frac{1}{8}\cot 36^\circ 24' 15''.$$

$$\therefore\quad L\tan\frac{B-C}{2}=L\cot 36^\circ 24' 15''-3\ \log 2$$

$$=10{\cdot}1323111-0{\cdot}9030900$$

$$=9{\cdot}2292211.$$

সুতরাং, দেখা যাইতেছে,

$$\frac{B-C}{2}=9^\circ 37' x''.$$

$$L\tan 9^\circ 38'=9{\cdot}2297735$$

$$L\tan 9^\circ 37'=9{\cdot}2290071$$

$\therefore$ 60″ এর জন্য অন্তর = ·0007664

আবার,

$$L\tan(9^\circ 37' x'')=9{\cdot}2292211$$

$$L\tan 9^\circ 37' \quad =9{\cdot}2290071$$

$\therefore$ x'' এর জন্য অন্তর = ·0002140

তাহা হইলে, সমানুপাতের নিয়মানুসারে,

$$x:60=2140:7764\ ;$$

$$\therefore\quad x=\frac{2140\times 60}{7764}=16{\cdot}754.$$

$\therefore\quad \dfrac{B}{2}-\dfrac{C}{2}=9^\circ 37' 16''{\cdot}75$ (প্রায়)। $\quad\cdots\quad$ (2)

এখন, (1) এবং (2) হইতে,

$$B=63^\circ 13' 1''{\cdot}75\ ;\ C=43^\circ 58' 28''{\cdot}25.$$

প্রশ্নমালা 15

1. ABC ত্রিভুজে, $A=38°20'$; $B=45°$; $b=64$ সে. মি.। c এর মান বাহির কর ; দেওয়া আছে, $\log 2 = \cdot 30103$;

$\log 8\cdot9896 = 0\cdot953745$; $L \sin 83°20' = 9\cdot99705$.

2. ABC ত্রিভুজে, $a=19$ একক ; $B=52°28'$; $C=93°40'$. b এর মান বাহির কর ; দেওয়া আছে,

$\log 19 = 1\cdot2787536$; $\log 27038 = 4\cdot4319746$; $\log 27037 = 4\cdot4319585$;

$L \sin 52°28' = 9\cdot8992727$; $L \sin 33°52' = 9\cdot7460595$.

3. ABC ত্রিভুজে, $b=10$ একক ; $A=45°$; $B=66°42'20''$. a এর মান বাহির কর , দেওয়া আছে,

$\log 2 = \cdot3010300$; $\log 7\cdot698622 = \cdot8864131$;

$L \sin 66°42'20'' = 9\cdot9630538$, এবং $0\cdot000001$ এর জন্য অন্তর $= 544$.

4. ABC ত্রিভুজে, $b=\sqrt{3}$, $c=1$ এবং $A=30°$ হইলে, ত্রিভুজটি সমাধান কর। [Joint Ent. Ex. 1971]

5. একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য 80 সে. মি., 100 সে. মি., এবং তাহাদের মধ্যবর্তী কোণের পরিমাপ 60°. উহার অপর দুই কোণের পরিমাপ বাহির কর ; দেওয়া আছে, $\log 3 = 0\cdot47712$; $L \tan 10°53'36'' = 9\cdot28432$.

[H. S. Comp. 1974]

6. একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য 11 সে. মি. ; 9 সে. মি. ; এবং তাহাদের মধ্যবর্তী কোণের পরিমাপ 60°. উহার অপর কোণ দুইটি নির্ণয় কর ; দেওয়া আছে,

$\log 3 = \cdot4771213$; $L \tan 9°49' = 9\cdot2381203$;

এবং $1'$ এর জন্য অন্তর $= 7514$. [P. U. 1964]

7. ABC ত্রিভুজে, $b=2\cdot25$; $c=1\cdot75$; $A=54°$. B এবং C বাহির কর ; দেওয়া আছে,

$\log 2 = \cdot301030$; $L \tan 63° = 10\cdot292834$; $L \tan 13°47' = 9\cdot389724$;

$L \tan 13°48' = 9\cdot390270$. [Joint Ent. Ex. 1966]

8. ABC ত্রিভুজে, $b=25{\cdot}16$ সে. মি. ; $c=14{\cdot}72$ সে. মি. ; $A=47^\circ18'$. B এবং C এর মান বাহির কর ; দেওয়া আছে,

$L \cot 23^\circ39'=10{\cdot}35860$; $L \tan 30^\circ52'=9{\cdot}77654$;

$\log 1044=3{\cdot}01870$; $\log 3988=3{\cdot}60076$. [**P. U. 1965**]

9. ABC ত্রিভুজে, $b=6840$ মিটার ; $c=5038$ মিটার ; $A=94^\circ16'$. C নির্ণয় কর ; দেওয়া আছে,

$\log 1802=3{\cdot}25576$; $\log 11878=4{\cdot}07475$; $L \cot 47^\circ8'=9{\cdot}96763$;

$L \tan 8^\circ1'=9{\cdot}14864$.

10. ABC ত্রিভুজে, $a:b=7:3$; $C=60^\circ$; A এবং B এর মান নির্ণয় কর ; দেওয়া আছে,

$\log 2={\cdot}3010300$; $\log 3={\cdot}4771213$; $L \tan 34^\circ42'=9{\cdot}8403776$;

এবং $1'$ এর জন্য অন্তর $=2699$.

12-6. একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু এবং উহাদের একটির বিপরীত কোণ প্রদত্ত :

মনে করি, ABC ত্রিভুজের b, c এবং B প্রদত্ত। তাহা হইলে, c, A, C নির্ণয় করিতে হইবে।

এখন, $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ সূত্র হইতে পাই : $\sin C=\dfrac{c \sin B}{b}$.

(1) যদি $b=c \sin B$ হয় $(0^\circ<B<90^\circ)$,

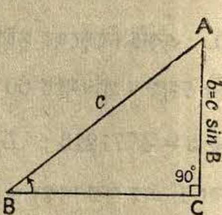
তাহা হইলে, $\sin C=1=\sin 90^\circ$.

$\therefore \quad C=90^\circ$.

এবং তখন, $A=90^\circ-B$.

আবার, ত্রিভুজটি সমকোণী বলিয়া,

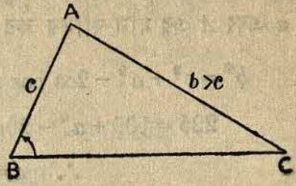
$a=\sqrt{c^2-b^2}$.



(2) যদি $b>c \sin B$ হয় $(0^\circ<B<90^\circ)$, তাহা হইলে, C এর মান নির্ণয় করা যাইবে এবং এইরূপ ক্ষেত্রে C এর মান সূক্ষ্মকোণ অথবা, স্থূলকোণ হইতে পারে।

দ্রষ্টব্য : সম্পূরক কোণদ্বয়ের sine এর মান একই থাকে। নিম্নের *(iii)* এর চিত্র দ্রষ্টব্য। এখানে, তিন প্রকারের সম্ভাবনা দেখা দিতে পারে।

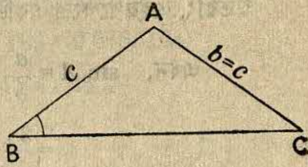
(i) $b>c$ হইলে $B>C$ হইবে ; এইরূপ ক্ষেত্রে, C স্থূলকোণ হইতে পারে না।



সুতরাং, C এর মান সূক্ষ্মকোণ হইবে। C পাওয়ার পর, $A=180°-(B+C)$ হইতে A পাওয়া যাইবে। তারপর,

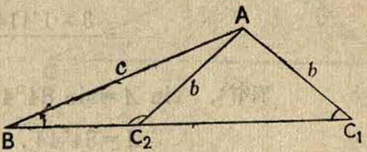
$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ হইতে a পাওয়া যাইবে।

(ii) $b=c$ হইলে, $B=C$ হইবে। এইরূপ ক্ষেত্রেও, C সূক্ষ্মকোণ হইবে।

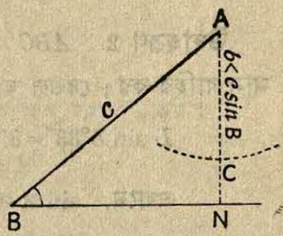


সুতরাং, (i) এর মত অপর অংশগুলি জানা যাইবে।

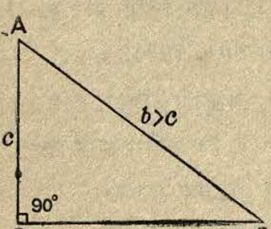
(iii) $c\sin B<b<c$ হইলে, $B<C$ হইবে। এইরূপ ক্ষেত্রে, C সূক্ষ্মকোণ, অথবা, স্থূলকোণ হইতে পারে।

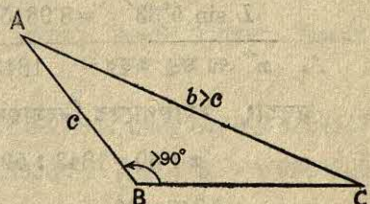


মন্তব্য : $b<c\sin B$ হইলে, C এর বাস্তব মান পাওয়া যাইবে না ; অর্থাৎ, এইরূপ ক্ষেত্রে, ABC ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব হইবে না।



(3) $B\geqslant 90°$ হইলে, $b>c$ অতি অবশ্যই হইবে।





বিশেষ দ্রষ্টব্য : $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$ থেকে a এর মান নির্ণয় করা যাইতে পারে।

উদাহরণ 1. ABC ত্রিভুজে, $b=15$ সে. মি. ; $c=10$ সে. মি. ; $B=60°$. a এবং A এর মান বাহির কর ; দেওয়া আছে, $\sin 84°44' = \cdot 99578$.

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$ সূত্র হইতে পাই,

$$225 = 100 + a^2 - 20a \cos 60°. \quad \text{অর্থাৎ,} \quad a^2 - 10a - 125 = 0.$$

$$\therefore \quad a = 5 \pm 5\sqrt{6}.$$

ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হইবে না বলিয়া, $a = (5 + 5\sqrt{6})$ সে. মি.।

সুতরাং, এইরূপক্ষেত্রে একটি সমাধান থাকিবে।

$$\text{এখন,} \quad \sin A = \frac{a}{b} \sin B = \frac{5(1+\sqrt{6}) \sin 60°}{15}$$

$$= \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{3}}{6}$$

$$= \frac{3 \times 1 \cdot 41421 + 1 \cdot 73205}{6} = 0 \cdot 99578 \ ;$$

$$\text{অর্থাৎ,} \quad \sin A = \sin 84°44'.$$

$$\therefore \quad A = 84°44'.$$

উদাহরণ 2. ABC ত্রিভুজে, $a = 4 \cdot 5$ মি. ; $c = 45$ মি. ; $C = 90°$. A এর মান বাহির কর ; দেওয়া আছে,

$L \sin 5°33' = 8 \cdot 98157$ এবং $1'$ এর জন্য অন্তর $= 5260$.

$$\text{এখানে,} \quad \sin A = \frac{a \sin C}{c} = \frac{4 \cdot 5 \times \sin 90°}{45} = \frac{1}{10}.$$

$\therefore \quad L \sin A = 10 - \log 10 = 10 - 1 = 9.$

সুতরাং দেখা যাইতেছে, $A = 5°33'x''$.

$\therefore \quad L \sin 5°33'x'' = 9 \cdot 00000$

$\quad\quad L \sin 5°33' \ = 8 \cdot 98157$

$\therefore \quad x''$ এর জন্য অন্তর $= \quad 1843$

সুতরাং, সমানুপাতের নিয়মানুসারে,

$$x : 60 = 1843 : 5260.$$

$$\therefore \quad x = \frac{1843 \times 60}{5260} = 21 \cdot 02 \cdots\cdots$$

$\therefore \quad A = 5°33'21''\cdot 02$ (প্রায়)

উদাহরণ 3. ABC ত্রিভুজে, $b=127$ সে, মি., $c=85$ সে. মি., $C=26°26'$ হইলে B এর মান নির্ণয় কর।

[$\log 1{\cdot}27 = {\cdot}1038037$; $\log 8{\cdot}5 = {\cdot}9294189$;

$L \sin 26°26' = 9{\cdot}6485124$; $L \sin 41°41'28'' = 9{\cdot}8228972$.]

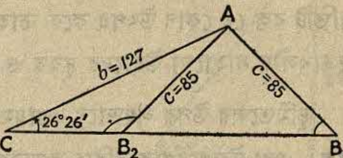
এখানে, $\sin B = \dfrac{b \sin C}{c} = \dfrac{127 \sin 26°26'}{85}$

$$\therefore \quad L \sin B = \log 127 - \log 85 + L \sin 26°26'$$
$$= 2{\cdot}1038037 - 1{\cdot}9294189 + 9{\cdot}6485124$$
$$= 9{\cdot}8228972 = L \sin 41°41'28''.$$

অর্থাৎ, $\sin B = \sin 41°41'28''$.

যেহেতু, $b \sin C < c$ এবং $c < b$,

সুতরাং, B সূক্ষ্মকোণ অথবা স্থূলকোণ হইতে পারে।



$$\therefore \quad B = 41°41'28'', \quad বা, \quad 180° - 41°41'28''.$$

অর্থাৎ, $B = 41°41'28''$, বা, $138°\ 18'32''$.

প্রশ্নমালা 16

1. ABC ত্রিভুজের অংশগুলি নিম্নরূপে দেওয়া থাকিলে, সমাধান কর :

(i) $B=30°$; $b=6$ সে মি. ; $c=6$ সে. মি. ;

(ii) $B=60°$; $b=5$ মি. ; $c=5$ মি. ;

(iii) $B=45°$; $b=4$ মি. ; $c=4$ মি.।

2. ABC ত্রিভুজের $b=5$ একক ; $c=4$ একক এবং $B=45°$ হইলে, A এবং C এর মান বাহির কর। [$\log 2 = {\cdot}30103$; $L \sin 34°26' = 9{\cdot}7523919$;

$L \sin 34°27' = 9{\cdot}7525761$.]

3. ABC ত্রিভুজে, $a = 73{\cdot}4$ একক ; $b = 64{\cdot}9$ একক ; $B = 48°13'25''$. A এর মান বাহির কর ;

দেওয়া আছে, $\log 734 = 2{\cdot}8656961$; $\log 649 = 2{\cdot}8122447$;

$L \sin 48°13'25'' = 9{\cdot}8725936$; $L \sin 57°30' = 9{\cdot}9260292$

এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, $1'$ এর জন্য অন্তর $= 804$.

4. ABC ত্রিভুজে, $b=100$ মি, $c=100\sqrt{2}$ মি, $B=30°$ হইলে উহার অপর অংশগুলি নির্ণয় কর।

ত্রয়োদশ অধ্যায়

উচ্চতা ও দূরত্ব সম্বন্ধীয় প্রশ্নাবলী

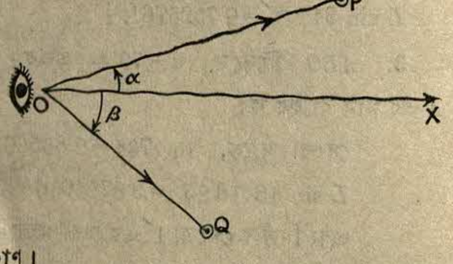
[Problems relating to Heights and Distances]

13-1. উপস্থাপন।

অনেক সময় পর্যবেক্ষকের নিকট হইতে সূর্য, চন্দ্র, পর্বত, জাহাজ, উচ্চ বৃক্ষ বা দণ্ড প্রভৃতির দূরত্ব ও তাহাদের উচ্চতা এবং সমতলভূমি হইতে উড়োজাহাজের উচ্চতা এবং নদীর প্রস্থ প্রভৃতি নির্ণয় করা সম্ভবপর হয় না। এই সমস্ত ক্ষেত্রে, দর্শকের চক্ষুতে প্রতিটি বস্তু যে কোণ উৎপন্ন করে তাহার পরিমাপ দ্বারা এবং ত্রিকোণমিতির বিভিন্ন সূত্রাবলীর সাহায্যে উহাদের দূরত্ব ও উচ্চতা নির্ণয় করা যাইতে পারে।

ভূমিতলের উপর লম্বভাবে দণ্ডায়মান সরলরেখাকে **উল্লম্বরেখা** (*Vertical line*) বলে; এবং উল্লম্বরেখার সহিত লম্বভাবে ভূমিতলে অবস্থিত সরলরেখাকে **অনুভূমিক রেখা** (*Horizontal line*) বলে।

দৃষ্টিপথ সর্বদা সরলরেখা। লক্ষ্যবস্তু চক্ষুগামী অনুভূমিক রেখা হইতে উপরের দিকে থাকিলে, ঐ বস্তুর দৃষ্টিপথ (সরলরেখা) অনুভূমিক রেখার সহিত যে কোণ উৎপন্ন করে তাহাকে পর্যবেক্ষকের চক্ষুর সাপেক্ষে ঐ বস্তুর **উন্নতি কোণ** (*Angle of Elevation*) বলে। কিন্তু, লক্ষ্যবস্তু চক্ষুগামী অনুভূমিক রেখার নীচে থাকিলে ঐ বস্তুর দৃষ্টিপথ অনুভূমিক রেখার সহিত যে কোণ উৎপন্ন করে তাহাকে পর্যবেক্ষকের চক্ষুর সাপেক্ষে ঐ বস্তুর **অবনতি কোণ** (*Angle of Depression*) বলে। বস্তুর উন্নতি কোণ বা অবনতি কোণ, Theodolite, Sextant, প্রভৃতি যন্ত্রের সাহায্যে মাপা যাইতে পারে। পার্শ্ববর্তী চিত্রে, O বিন্দু পর্যবেক্ষকের চক্ষুর অবস্থান; P এবং Q, দ্রষ্টব্য বস্তুর অবস্থান; এবং OX অনুভূমিক রেখা, যেখানে, OP, OQ, OX একই উল্লম্ব সমতলে অবস্থিত।



তাহা হইলে,

$\angle XOP = \alpha = P$ এর উন্নতি কোণ;

$\angle XOQ = \beta = Q$ এর অবনতি কোণ।

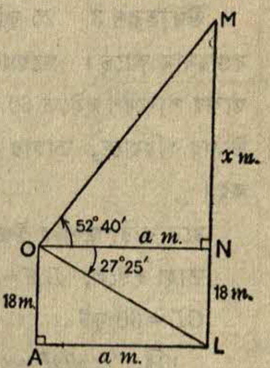
পরবর্তী দৃষ্টান্তগুলি লক্ষ্যণীয়।

উদাহরণ 1. যে অনুভূমিক তলে একটি মন্দির উল্লম্বভাবে অবস্থিত সেই তল হইতে 18 মিটার উচ্চ একটি স্তম্ভের শীর্ষ হইতে মন্দিরের শীর্ষ এবং পাদদেশের উন্নতি কোণ ও অবনতি কোণ যথক্রমে $52°40'$ এবং $27°25'$ পরিলক্ষিত হইল। মন্দিরের উচ্চতা এবং স্তম্ভ হইতে মন্দিরের দূরত্ব নির্ণয় কর।

[$\tan 52°40' = 1.3111$; $\tan 27°25 = 0.5187$.]

মনে করি, মন্দিরের উচ্চতা LM ; স্তম্ভের উচ্চতা AO.

তাহা হইলে, $AO = 18$ মিটার। LM এর উপর ON লম্ব টানি ; এবং ধরি, $ON = a$ মিটার ও $MN = x$ মিটার।



সুতরাং, OLN সমকোণী ত্রিভুজ হইতে,

$\tan 27°25' = 18/a$;

বা, $0.5187 = 18/a$.

$\therefore \quad a = 34.7021$.

এবং, OMN সমকোণী ত্রিভুজ হইতে,

$\tan 52°40' = x/a$; বা, $1.3111 = x/a$.

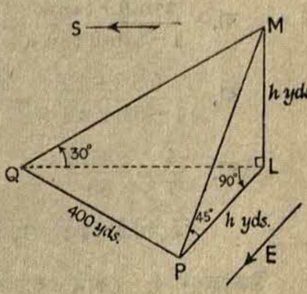
$\therefore \quad x = 1.3111 \times 34.7021 = 45.4979$.

$\therefore$ মন্দিরের উচ্চতা $= (18 + x)$ মি. $= 63.4979$ মি.$\rightarrow 63.498$ মি.

এবং নির্ণেয় দূরত্ব $= a$ মি. $\rightarrow 34.702$ মি.।

উদাহরণ 2. যে সমতলের উপরে একটি পাহাড় অবস্থিত সেই সমতলে পাহাড়টির ঠিক পূর্বে P স্থানে এবং দক্ষিণে Q স্থানে উহার শীর্ষের উন্নতি কোণ যথাক্রমে 45° এবং 30° পরিলক্ষিত হইলে, এবং $PQ = 400$ গজ হইলে, পাহাড়ের উচ্চতা নির্ণয় কর।

[Joint Ent. Ex. 1970]



মনে করি, পাহাড়ের উচ্চতা LM ;

তাহা হইলে, $\angle MPL = 45°$;

$\angle MQL = 30°$; $\angle QLM = \angle PLM$

$= \angle QLP = 90°$.

ধরা যাক্, $ML = h$ গজ। তখন, $PL = ML = h$ গজ।

আবার, LMQ ত্রিভুজ হইতে,

$$\tan 30^\circ = \frac{ML}{QL}; \quad বা, \quad \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{QL};$$

$\therefore \quad QL = h\sqrt{3}.$

এখন, যেহেতু, $\angle QLP = 90^\circ$; $\quad \therefore \quad QL^2 + PL^2 = PQ^2$;

বা, $3h^2 + h^2 = 400^2$; $\quad$ বা, $4h^2 = 16 \times 100^2$.

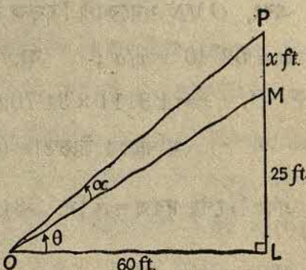
$\therefore \quad h = 2 \times 100 = 200.$ $\quad \therefore$ পাহাড়ের উচ্চতা = 200 গজ।

উদাহরণ 3. 25 ফুট উচ্চ কোন স্তম্ভের উপর একটি পতাকাদণ্ড উল্লম্বভাবে দণ্ডায়মান আছে। স্তম্ভের পাদদেশ যে অনুভূমিক তলের উপর অবস্থিত সেই তলে স্তম্ভের পাদদেশ হইতে 60 ফুট দূরে অবস্থিত একটি বিন্দুতে পতাকাদণ্ডটি যে কোণ উৎপন্ন করিয়াছে, তাহার tangent এর মান 0·125 ; ঐ পতাকাদণ্ডের উচ্চতা নির্ণয় কর। **[H. S. 1974]**

মনে করি, স্তম্ভটির উচ্চতা LM; পতাকাদণ্ডটি MP এবং O বিন্দু পর্যবেক্ষকের চক্ষু।

তাহা হইলে, $LM = 25$ ফুট;

$OL = 60$ ফুট।



ধরি, $\angle MOP = \alpha$;

$\therefore \quad \tan \alpha = 0{\cdot}125 = \frac{1}{8}.$

ধরা যাক্, $MP = x$ ফুট

এবং $\angle LOM = \theta.$

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{ML}{OL} = \frac{25}{60} = \frac{5}{12}.$$

এখন, $\tan(\theta + \alpha) = \dfrac{PL}{OL}$;

বা, $\dfrac{\tan\theta + \tan\alpha}{1 - \tan\theta\tan\alpha} = \dfrac{x+25}{60}$;

বা, $\dfrac{5/12 + 1/8}{1 - 5/12 \times 1/8} = \dfrac{x+25}{60}$;

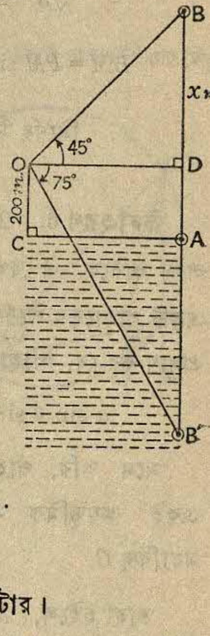
বা, $\dfrac{4}{7} = \dfrac{x+25}{60}$. $\quad \therefore \quad x = 9\frac{2}{7}$.

$\therefore$ নির্ণেয় উত্তর : $9\frac{2}{7}$ ফুট।

উদাহরণ 4. কোন একটি হ্রদের জলের উপরিভাগের 200 মিটার ঊর্ধ্বে একটি স্থান হইতে একটি উড়োজাহাজের উন্নতি কোণ 45° এবং জলের উপরিভাগের সাপেক্ষে

উহার প্রতিবিম্বের অবনতি কোণ 75°। উড়োজাহাজটি জলের উপরিভাগ হইতে যতটা উপরে আছে, উহার প্রতিবিম্ব একই উল্লম্বরেখায় জলের ঠিক ততটা নীচে থাকিলে, জলের উপরিভাগ হইতে উড়োজাহাজের উচ্চতা নির্ণয় কর।

মনে করি, উড়োজাহাজের অবস্থান B ; জলের উপরিভাগ AC; B এর প্রতিবিম্ব B' তাহা হইলে, AB এবং AB' $(=AB)$ একই সরলরেখায় অবস্থিত এবং সমতল AC এর উপর লম্ব। AB এর উপর OD লম্ব।



তাহা হইলে, $AD=OC=200$ মিটার।

ধরি, $BD=x$ মিটার।

তাহা হইলে, $OD=BD=x$ মি.; কারণ, $B\widehat{O}D=45°$.

সুতরাং, ODB' ত্রিভুজ হইতে,

$$\tan 75° = \frac{DB'}{OB} = \frac{AD+AB'}{OD} = \frac{AD+AB}{OD},$$

বা, $$\tan(45°+30°) = \frac{2AD+BD}{OD},$$

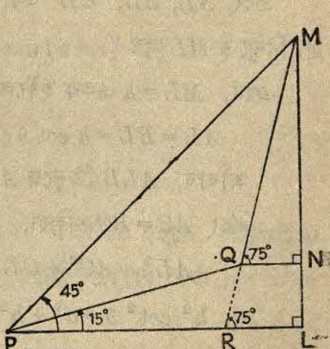
বা, $$\frac{1+\tan 30°}{1-\tan 30°} = \frac{400+x}{x},$$

বা, $$\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{400+x}{x},\quad \text{বা, } 2+\sqrt{3} = \frac{400+x}{x}.$$

$\therefore\ x = 200\times(\sqrt{3}-1).$

$\therefore$ নির্ণেয় উচ্চতা $=AB=(x+200)$ মি. $=200\sqrt{3}$ মিটার।

উদাহরণ 5. যে অনুভূমিক তলের উপরে একটি পাহাড় উল্লম্বভাবে অবস্থিত সেই তলের কোন এক স্থান হইতে পাহাড়ের শীর্ষের উন্নতি কোণ 45° দেখা গেল। ঐ তলের সহিত 15° কোণে নত চড়াই পথে উহার শীর্ষের দিকে 300 মিটার যাওয়ার পর পাহাড়ের শীর্ষের উন্নতি কোণ 75° দেখা গেল। পাহাড়টির উচ্চতা নির্ণয় কর।



মনে করি, পাহাড়ের উচ্চতা LM, P বিন্দুতে M এর উন্নতি কোণ 45°; $\angle QPL=15°$; Q বিন্দুতে M এর উন্নতি কোণ 75°; $PQ=300$ মিটার। LM এর উপর QN লম্ব।

সুতরাং, $\angle MPQ = 30°$, $\angle PMQ = 30°$, $\angle PQM = 120°$.

তাহা হইলে, PMQ ত্রিভুজ হইতে,

$$\frac{PM}{\sin 120°} = \frac{PQ}{\sin 30°}$$

বা, $\frac{2PM}{\sqrt{3}} = 2 \times 300.$ $\quad \therefore \quad PM = 300\sqrt{3}.$

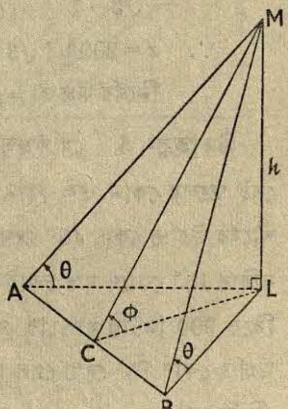
$$LM = PM \sin 45° = 300\sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 150\sqrt{6}$$

$\therefore$ নির্ণেয় উচ্চতা $= 150\sqrt{6}$ মিটার।

উদাহরণ 6. $2a$ একক দৈর্ঘ্যের একটি অনুভূমিক রেখার প্রত্যেক প্রান্ত হইতে লক্ষ্য করিলে, ঐ রেখাগামী অনুভূমিক সমতলের উপরে উল্লম্বভাবে অবস্থিত কোন একটি পাহাড়ের শীর্ষের উন্নতি কোণ θ এবং ঐ রেখার মধ্যবিন্দুতে উহার উন্নতি কোণ ϕ. প্রমাণ কর যে, পাহাড়ের উচ্চতা

$a \sin \theta \sin \phi / \sqrt{\sin(\phi + \theta) \sin(\phi - \theta)}.$ [H. S. 1969]

মনে করি, পাহাড়ের উচ্চতা LM, যেখানে $AB = 2a$ একক, এবং A, B, L একই অনুভূমিক সমতলে অবস্থিত। AB এর মধ্যবিন্দু C.



তাহা হইলে, $AC = BC = a$,

$\angle MAL = \angle MBL = \theta$; $\angle MCL = \phi$,

এবং AL, BL, CL এর প্রত্যেকটির উপর L বিন্দুতে ML লম্ব।

এখন, $ML = h$ একক হইলে,

$AL = BL = h \cot \theta$; $CL = h \cot \phi$.

আবার, ALB ত্রিভুজে $AL = BL$ এবং $AC = BC$ বলিয়া, $\angle ACL = 90°$.

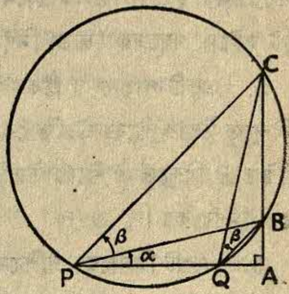
$\therefore \quad AL^2 = AC^2 + CL^2$,

বা, $h^2 \cot^2 \theta = a^2 + h^2 \cot^2 \phi.$

$$\therefore \quad h = \frac{a}{\sqrt{\cot^2 \theta - \cot^2 \phi}} = \frac{a \sin \theta \sin \phi}{\sqrt{\sin(\phi + \theta) \sin(\phi - \theta)}}.$$

উদাহরণ 7. যে অনুভূমিক তলের উপরে উল্লম্বভাবে অবস্থিত একটি স্তম্ভের উপর একটি পতাকাদণ্ড অবস্থিত, সেই তলের কোন এক বিন্দুতে স্তম্ভ এবং পতাকাদণ্ড যথাক্রমে α ও β কোণ উৎপন্ন করে। আবার ঐ স্থান হইতে স্তম্ভের দিকে d মিটার যাওয়ার পরে, নূতন স্থানটিতে পতাকাদণ্ডটি β কোণ উৎপন্ন করে। স্তম্ভের উচ্চতা এবং পতাকাদণ্ডের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

মনে করি, AB নির্দিষ্ট স্তম্ভ এবং BC পতাকাদণ্ড। P, Q, A একই অনুভূমিকতলে অবস্থিত, যেখানে, $PQ = d$ মিটার;



$\angle APB = \alpha$; $\angle BPC = \angle BQC = \beta$;

$\angle PAB = 90°$.

যেহেতু, $\angle BPC = \angle BQC$,

$\therefore$ P, Q, B, C এক বৃত্তস্থ।

$$\therefore \angle AQB = 90° - \angle ABQ$$
$$= 90° - \angle APC = 90° - (\alpha + \beta).$$

ধরি, $AB = h$ মিটার; $BC = x$ মিটার।

$$\therefore PA = h \cot \alpha,\ QA = h \tan(\alpha + \beta).$$

$$\therefore d = PQ = AP - QA = h[\cot \alpha - \tan(\alpha + \beta)]$$

$$= h\left[\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}\right] = \frac{h \cos(2\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cos(\alpha + \beta)}.$$

$$\therefore h = d \sin \alpha \cos(\alpha + \beta) \sec(2\alpha + \beta).$$

এখন, $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{x + h}{PA}$.

$$\therefore x = PA \tan(\alpha + \beta) - h = h[\cot \alpha \tan(\alpha + \beta) - 1]$$
$$= d \sin \beta \sec(2\alpha + \beta).$$

প্রশ্নমালা 17

1. সূর্যের উন্নতি কোণ 60° হইতে 45° তে পরিবর্তিত হইলে, অনুভূমিক সমতলের উপরে উল্লম্বভাবে অবস্থিত একটি টেলিগ্রাফ্ পোষ্টের ছায়ার দৈর্ঘ্য 10 মিটার বাড়িয়া যায়। টেলিগ্রাফ্ পোষ্টটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

2. 200 মিটার উচ্চতাবিশিষ্ট একটি পাহাড়ের শীর্ষ হইতে কোন একটি উল্লম্ব স্তম্ভের শীর্ষবিন্দু এবং পাদবিন্দুর উন্নতি কোণ ও অবনতি কোণ যথাক্রমে 30° এবং 60° পরিলক্ষিত হইলে, স্তম্ভটির উচ্চতা নির্ণয় কর। **[H. S. Comp. 1975]**

3. কোন উড়োজাহাজ হইতে উহার পশ্চিমে এবং দক্ষিণে অবস্থিত দুইটি জাহাজের অবনতি কোণ যথাক্রমে 45° এবং 30°. জাহাজ দুইটির ব্যবধান 2·6 কিলোমিটার হইলে, উহারা যে অনুভূমিক সমতলে অবস্থিত তাহার সাপেক্ষে উড়োজাহাজের উচ্চতা নির্ণয় কর।

4. একটি গম্বুজের দক্ষিণ দিকে উহার পাদদেশস্থ অনুভূমিক সমতলে অবস্থিত এক স্থানে উহার শীর্ষের উন্নতি কোণ 60° এবং ঐ স্থানের ঠিক পূর্বে একই অনুভূমিক সমতলে অবস্থিত অপর এক স্থানে ঐ শীর্ষের উন্নতি কোণ 30°. ঐ দুইটি স্থানের দূরত্ব a ফুট হইলে, গম্বুজের উচ্চতা নির্ণয় কর। [Joint Ent. Ex. 1976]

5. একটি পাহাড়ের ঠিক দক্ষিণে উহার পাদদেশগামী অনুভূমিক সমতলে অবস্থিত A বিন্দুতে উহার শীর্ষের উন্নতি কোণ 45° ; এবং A এর ঠিক পূর্বে ঐ একই সমতলে অবস্থিত B বিন্দুতে ঐ শীর্ষের উন্নতি কোণ 30°. $AB=500$ গজ হইলে, পাহাড়ের উচ্চতা নির্ণয় কর। [H. S. Comp. 1974]

6. একটি মিনারের পশ্চিমে উহার পাদদেশগামী অনুভূমিক সমতলে অবস্থিত P স্থান হইতে মিনারের শীর্ষের উন্নতি কোণ 60° এবং P এর ঠিক দক্ষিণে ঐ একই সমতলে অবস্থিত Q স্থান হইতে ঐ শীর্ষের উন্নতি কোণ 30°. মিনারের উচ্চতা 250 ফুট হইলে, P এবং Q এর দূরত্ব নির্ণয় কর। [Joint Ent. Ex. 1969]

7. একটি স্তম্ভের চূড়ার উন্নতি কোণ উহার ঠিক উত্তরে স্তম্ভের পাদদেশগামী অনুভূমিক সমতলে অবস্থিত A বিন্দুতে 30° এবং A এর ঠিক পূর্বে B বিন্দুতে উন্নতি কোণ 18° ; $AB=a$ ফুট হইলে, দেখাও যে, স্তম্ভের উচ্চতা $\frac{a}{\sqrt{2+2\sqrt{5}}}$ ফুট।

[Joint Ent. Ex. 1967]

8. একটি গম্বুজের পাদদেশ যে অনুভূমিক সমতলে অবস্থিত সেই সমতলের এক স্থানে উহার শীর্ষের উন্নতি কোণ 60° এবং সেই স্থান হইতে 40 ফুট উচ্চে ঐ শীর্ষের উন্নতি কোণ 45° ; গম্বুজের উচ্চতা বাহির কর। [Joint. Ent. Ex. 1968]

9. কোন এক পাহাড়ের পাদদেশের সহিত একই অনুভূমিক তলে অবস্থিত কোন বিন্দুতে উহার শীর্ষের উন্নতি কোণ 45° ; ঐ তলের সহিত 30° কোণে নত চড়াই পথে শীর্ষের দিকে এক মাইল যাইলে, শীর্ষের উন্নতি কোণ 60° হয়। পাহাড়টির উচ্চতা নির্ণয় কর।

10. অনুভূমিক তলের উপর উল্লম্বভাবে দণ্ডায়মান 106 মিটার উচ্চ একটি স্তম্ভের ছায়ার দৈর্ঘ্য যখন 53 মিটার তখন সূর্যের উন্নতি কোণ বাহির কর; দেওয়া আছে, $L \tan 63^\circ 26' = 10{\cdot}3009994$; $1'$ এর জন্য অন্তর $= 3159$ এবং $\log 2 = {\cdot}3010300$.

11. সমুদ্রের জলের উপরিভাগ হইতে 720 মিটার ঊর্ধ্বে অবস্থিত কোন বেলুন হইতে দুইটি যুদ্ধ জাহাজের অবনতি কোণ যথাক্রমে $30°$ এবং $45°$. ঐ জাহাজ দুইটি যথাক্রমে বেলুনের ঠিক পূর্বে এবং দক্ষিণে অবস্থিত হইলে, জাহাজ দুইটির দূরত্ব নির্ণয় কর।

12. অনুভূমিক তলের উপরে উল্লম্বভাবে দণ্ডায়মান একটি দণ্ডের দৈর্ঘ্য 100 ফুটের অধিক, এবং উহা দুইটি অংশ এমনভাবে চিহ্নিত যে নিম্নের অংশটি সমগ্রের এক-তৃতীয়াংশ। ঐ অনুভূমিক তলে দণ্ডের পাদদেশ হইতে 40 ফুট দূরত্বের একটি স্থানে দণ্ডের উপরের অংশটি যে সম্মুখীন কোণ উৎপন্ন করে তাহার tangent $\frac{1}{2}$ হইলে, দণ্ডটির দৈর্ঘ্য বাহির কর। দণ্ডের পাদদেশ হইতে কতদূরে (উপরোক্ত অনুভূমিক তলে) দণ্ডের উপরের অংশ বৃহত্তম সম্মুখীন কোণ উৎপন্ন করিবে, এবং ঐ কোণের পরিমাণ কত ?

13. অনুভূমিক সমতলের উপর উল্লম্বভাবে অবস্থিত ABC গম্বুজটি AB এবং BC এই দুই অংশে বিভক্ত, এবং উহার পাদদেশ A এবং E, D একই অনুভূমিক সমতলে অবস্থিত। D বিন্দুতে শীর্ষ C এর উন্নতি কোণ $45°$ এবং E বিন্দুতে B ও C এর উন্নতি কোণ যথাক্রমে $30°$ ও $60°$; $DE=120$ মিটার হইলে, AB ও BC এর দৈর্ঘ্য বাহির কর। [H. S. 1976]

14. অনুভূমিক সমতলে একটি সোজা রাস্তার উপর 1 কিলোমিটার দূরত্বে A এবং B দুইটি স্থান অবস্থিত এবং ঐ তলে উহাদের মাঝখানে C অবস্থিত। A, B, C হইতে একটি উড়োজাহাজের উন্নতি কোণ যথাক্রমে $60°$, $30°$, $45°$ হইলে, উড়োজাহাজের উচ্চতা এবং AC আসন্ন মিটারে নির্ণয় কর।

[Joint Ent. Ex. 1974]

15. একটি গম্বুজ, তাহার পাদদেশের সহিত একই অনুভূমিক তলে অবস্থিত, P বিন্দুতে α কোণ উৎপন্ন করে ; এবং P বিন্দু হইতে উল্লম্বভাবে h ফুট উপরে Q বিন্দুতে গম্বুজের পাদদেশের অবনতি কোণ β. গম্বুজের উচ্চতা নির্ণয় কর।

[H. S. 1972]

16. একটি গোলাকারাকৃতি বেলুনের ব্যাসার্ধ r ফুট। এক ব্যক্তি লক্ষ্য করিল যে, যখন বেলুনের কেন্দ্রের উন্নতি কোণ β, ঠিক তখন বেলুনটি তাহার চক্ষুতে α কোণ উৎপন্ন করে। বেলুনের কেন্দ্রের উচ্চতা বাহির কর।

17. DE গম্বুজটি যে অনুভূমিক সমতলের উপর উল্লম্বভাবে অবস্থিত, সেই সমতলে $ABCD$ একটি সোজা পথ। A, B, C বিন্দুতে গম্বুজটি যথাক্রমে $\theta, 2\theta, 3\theta$ কোণ উৎপন্ন করিলে, এবং $AB=50$ ফুট ও $BC=20$ ফুট হইলে, গম্বুজের উচ্চতা, CD ও θ কোণ বাহির কর। [P. U. 1970]

18. একটি হ্রদের জলের উপরিভাগের h ফুট উর্ধ্বে অবস্থিত একটি বিন্দুতে মেঘের উন্নতি কোণ α এবং হ্রদের জলে উহার প্রতিবিম্বের অবনতি কোণ β ; মেঘটি জলের উপরিভাগের যতটা উর্ধ্বে আছে উহার প্রতিবিম্ব জলের উপরিভাগ হইতে ঠিক ততটা নীচে থাকিলে, দেখাও যে, জলের উপরিভাগ হইতে মেঘের উচ্চতা $\dfrac{h \sin(\beta+\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)}$ ফুট।

19. নদীর যে তীরে h ফুট উচ্চতা বিশিষ্ট একটি গম্বুজ অবস্থিত, সেইখান হইতে নদীর সহিত লম্বভাবে অবস্থিত বিপরীত তীরস্থ বিন্দু হইতে নদীর স্রোতের দিকে a ফুট এবং স্রোতের বিপরীত দিকে b ফুট দূরে A এবং B স্থানে উহার শীর্ষের উন্নতি কোণ যথাক্রমে 30° এবং 60° হইলে, দেখাও যে, $3(a^2-b^2)=8h^2$.

[Joint Ent. Ex. 1972]

20. সমুদ্রের জলের উপরিভাগ হইতে h ফুট উর্ধ্বে অবস্থিত একটি স্থান হইতে দেখা গেল, কোন জাহাজের আলোকের অবনতি কোণ θ, এবং জলে উহা প্রতিবিম্বের অবনতি কোণ ϕ. দেখাও যে, অনুভূমিক তল বরাবর পর্যবেক্ষকের নিকট হইতে জাহাজের দূরত্ব $2h \cos\theta \cos\phi \operatorname{cosec}(\theta+\phi)$ ফুট। জলের উপরিভাগ হইতে জাহাজের আলোর উচ্চতা কত ?

[Joint. Ent. Ex. 1973]

21. কোন অট্টালিকার শীর্ষ A হইতে একই অনুভূমিক সমতলের উপরে দণ্ডায়মান h ফুট উচ্চতা বিশিষ্ট একটি আলোক স্তম্ভ BC এর শীর্ষ বিন্দু B এবং পাদদেশ C এর অবনতি কোণ যথাক্রমে α এবং β. অট্টালিকার উচ্চতা বাহির কর, এবং দেখাও যে, $AB=\{h \cos\beta/\sin(\beta-\alpha)\}$ ফুট।

[H. S. 1971]

22. কোন সোজা রাস্তার ঠিক উপরের দিকে অবস্থিত একটি উড়োজাহাজ হইতে একই সময়ে উহার দুইদিকে অবস্থিত পরপর দুইটি মাইল নির্দেশক ফলকের অবনতি কোণ যথাক্রমে α এবং β পরিলক্ষিত হইল। রাস্তার সমতল হইতে উড়োজাহাজের উচ্চতা বাহির কর।

23. কোন বেলুন হইতে h উচ্চতা বিশিষ্ট একটি স্তম্ভের শীর্ষ এবং পাদবিন্দুর অবনতি কোণ যথাক্রমে α এবং β পরিলক্ষিত হইল। দেখাও যে, বেলুনটির উচ্চতা এবং স্তম্ভ হইতে অনুভূমিক তলে বেলুনের দূরত্ব যথাক্রমে $h \cos\alpha \sin\beta \operatorname{cosec}(\beta-\alpha)$ এবং $h \cos\alpha \cos\beta \operatorname{cosec}(\beta-\alpha)$.

[H. S. 1975]

24. সরলপথে প্রবহমান একটি নদীর তীরে একটি পাহাড় উল্লম্বভাবে উপরের দিকে উঠিয়াছে। ঐ পাহাড়ের চূড়ায় অবস্থিত একজন লোক একসময়ে উহার ঠিক নীচে তীরের দিকে ধাবমান একটি নৌকার অবনতি কোণ 30° লক্ষ্য করিল ; এবং উহার ঠিক 3 মিনিট পরে ঐ নৌকায় অবনতি কোণ 60° লক্ষ্য করিল। যদি

নৌকাটি সমবেগে চলিতে থাকে, তবে তীরে পৌছিতে নৌকাটির আর কত সময় লাগিবে?

25. নদীর উপকূলের উপর একই সরলরেখায় A, B, C তিনটি বস্তু এমনভাবে অবস্থিত যে $AB = BC = 4$ কি. মি.। উপকূলের সহিত লম্বভাবে বরাবর B এর দিকে ধাবমান কোন ষ্টীমারের একটি নির্দিষ্ট অবস্থানে AC এর সম্মুখে উহা 60° কোণ উৎপন্ন করে। ঐ একই দিকে সমবেগে 10 মিনিট চলিবার পর নূতন অবস্থানে উহা AC এর সম্মুখে 120° কোণ উৎপন্ন করে। ষ্টীমারের গতিবেগ বাহির কর।

26. অনুভূমিক তলের উপর উল্লম্বভাবে অবস্থিত কোন এক স্তম্ভের চূড়ায় উল্লম্বভাবে একটি পতাকা দণ্ড আছে। ঐ তলে অবস্থিত কোন এক স্থানে স্তম্ভটি α কোণ এবং পতাকাদণ্ডটি β কোন উৎপন্ন করে। স্তম্ভের পাদদেশের a মিটার নিকটতর ঐ তলে এক স্থানে পতাকাদণ্ডটি আবার β কোণ উৎপন্ন করে। দেখাও যে স্তম্ভের উচ্চতা $\dfrac{a \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \tan (\alpha + \beta)}$ মিটার; এবং পতাকাদণ্ডের দৈর্ঘ্য $a \sin \beta \sec (2\alpha + \beta)$ মিটার।

27. অনুভূমিক সমতলের উপর অবস্থিত একটি স্তম্ভ ঠিক উত্তর দিকে কিছুটা হেলিয়া আছে। উহার ঠিক দক্ষিণে স্তম্ভের পাদদেশ হইতে a মিটার ও b মিটার $(b > a)$ দূরত্বের দুইটি স্থানে স্তম্ভটির শীর্ষের উন্নতি কোণ যথাক্রমে α এবং β. প্রমাণ কর যে, স্তম্ভটি অনুভূমিক সমতলের সহিত $\cot^{-1}\left(\dfrac{b \cot \alpha - a \cot \beta}{b - a}\right)$ পরিমাণ কোণে উত্তরে হেলিয়া আছে।

28. অনুভূমিক সমতলভূমির উপর দণ্ডায়মান একটি স্তম্ভ উত্তর দিকে হেলিয়া আছে। উহার পাদদেশ হইতে ঐ সমতলে সমান দূরত্বে ঠিক উত্তরে ও দক্ষিণে অবস্থিত দুইটি স্থানে স্তম্ভটির শীর্ষের উন্নতি কোণ যথাক্রমে α এবং β পরিলক্ষিত হইল। প্রমাণ কর যে, অনুভূমিক তলের সহিত স্তম্ভটি $\tan^{-1}\left\{\dfrac{2 \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha - \beta)}\right\}$ কোণে নত।

29. একটি পাখী অনুভূমিক তল হইতে একই উচ্চতায় সমবেগে একই দিকে উড়িতে থাকিলে এবং ঐ তলে অবস্থিত কোন নির্দিষ্ট স্থান হইতে একই সময় অন্তর পরপর চারবার উহার উন্নতি কোণ যথাক্রমে $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ হইলে, দেখাও যে,

$$\cot^2\alpha - \cot^2\delta = 3(\cot^2\beta - \cot^2\gamma).$$

30. *ABCD* আয়তাকৃতি অনুভূমিক সমতলের উপরে যে কোন স্থানে উল্লম্বভাবে একটি দণ্ড আছে। A, B, C, D বিন্দুতে ঐ দণ্ডের শীর্ষের উন্নতি কোণ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\cot^2\beta - \cot^2\alpha = \cot^2\gamma - \cot^2\delta.$$

31. একই অনুভূমিক সমতলের উপরে একটি পাহাড় এবং a, b, c উচ্চতাবিশিষ্ট তিনটি গম্বুজ উল্লম্বভাবে অবস্থিত। ঐ পাহাড়ের শীর্ষে গম্বুজ তিনটি সমান কোণ উৎপন্ন করিলে, এবং উহাদের পাদদেশের অবনতি কোণ যথাক্রমে α, β, γ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{\sin(\beta-\gamma)}{a\sin\alpha}+\frac{\sin(\gamma-\alpha)}{b\sin\beta}+\frac{\sin(\alpha-\beta)}{c\sin\gamma}=0.$$

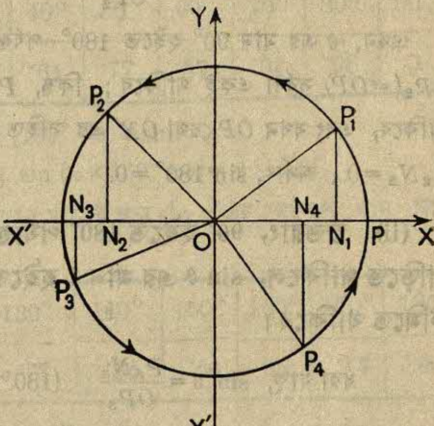
32. একটি অনুভূমিক সমতল ভূমির উপর সোজা পথ দিয়া যাইবার সময় কোন একস্থানে ঐ সমতলে অবস্থিত দুইটি বস্তু দর্শকের চোখে বৃহত্তম কোণ α উৎপন্ন করে এবং সেই স্থান হইতে d দূরত্বে গিয়া ঐ দর্শক দেখিল বস্তু দুইটি একই বস্তু মনে হইতেছে এবং বস্তুগামী সরলরেখা পথের সহিত β কোণ উৎপন্ন করিতেছে। দেখাও যে, বস্তু দুইটির পরস্পরের দূরত্ব $\dfrac{2\,d\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$.

ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের লেখ
[Graphs of Trigonometrical Functions]

12-1. বিভিন্ন কোণানুপাতের পরিবর্তন।

θ এর মান 0° হইতে 360° পর্যন্ত ক্রমশঃ বর্ধিত হইতে থাকিলে, $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\cot\theta$, $\sec\theta$, $\operatorname{cosec}\theta$ এর মানের কিরূপ পরিবর্তন হইবে তাহা এই অধ্যায়ের আলোচনার বিষয়।

মনে করি, $X'OX$ এবং $Y'OY$ সরলরেখাদ্বয় পরস্পর লম্বভাবে O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। O কে কেন্দ্র করিয়া $OP=a$ একক ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন করি, যেখানে a যে কোন নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য।



OP সরলরেখা O বিন্দুতে সর্বদা যুক্ত থাকিয়া উহার প্রথম অবস্থান OX হইতে ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীতক্রমে ঘুরিতে থাকিয়া এবং OP_1, OP_2, OP_3, OP_4 প্রভৃতি বিভিন্ন অবস্থানে আসিয়া, OX এর সহিত যথাক্রমে $\widehat{XOP_1}$, $\widehat{XOP_2}$, $\widehat{XOP_3}$, $\widehat{XOP_4}$ প্রভৃতি কোণগুলি উৎপন্ন করিয়াছে, যেখানে P_1, P_2, P_3, $P_4\cdots$ বিন্দুগুলি একই বৃত্তের উপর অবস্থিত ; এবং উহারা যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় ও চতুর্থ পাদে অবস্থিত।

চিত্রে, P_1N_1, P_2N_2, P_3N_3, P_4N_4 এর প্রত্যেকে $X'OX$ এর উপর লম্ব।

এখন, $\widehat{XOP_1}$, $\widehat{XOP_2}$, $\widehat{XOP_3}$, $\widehat{XOP_4}$ এর যে কোনটিকে θ দ্বারা সূচিত করা যাক। প্রথানুসারে, OP_1, OP_2, OP_3, OP_4 ; P_1N_1, P_2N_2 ; ON_1, ON_4 ধনাত্মক এবং P_3N_3, P_4N_4 ; ON_2, ON_3 ঋণাত্মক।

[1] θ এর পরিবর্তনে Sin θ এর পরিবর্তন :

OP রেখা OX বরাবর থাকিলে, $\theta=0^\circ$; এবং তখন P হইতে OX এর লম্ব দূরত্ব $=0$ (শূন্য) বলিয়া, $\sin 0^\circ=0$.

ধরা যাক, $\sin\theta=\dfrac{P_1N_1}{OP_1}$, $(0^\circ<\theta<90^\circ)$.

এখন, θ এর মান 0° হইতে 90° পর্যন্ত ক্রমশঃ বৃদ্ধি পাইতে থাকিলে, অতিভুজ $OP_1 (=OP)$ সর্বদা একই থাকিবে এবং P_1N_1 ক্রমশঃ নিরবচ্ছিন্নভাবে বৃদ্ধি পাইতে থাকিবে, এবং যখন OP রেখা OY এর সহিত মিলিত হইবে, তখন $\theta = 90^\circ$ হইবে ; এবং এইরূপক্ষেত্রে, $\sin 90^\circ = 1$; কারণ, তখন, P_1N_1 এবং OP_1 পরস্পর সমান হইবে।

(i) সুতরাং, 0° হইতে 90° পর্যন্ত θ এর মান নিরবচ্ছিন্নভাবে ক্রমশঃ বাড়িতে থাকিলে, $\sin \theta$ এর মান, 0 হইতে 1 পর্য্যন্ত নিরবচ্ছিন্নভাবে (Continuously) ক্রমশঃ (gradually) বাড়িতে থাকিবে।

ধরা যাক্, $\sin \theta = \dfrac{P_2N_2}{OP_2}$, $(90^\circ < \theta < 180^\circ)$.

এখন, θ এর মান 90° হইতে 180° পর্যন্ত ক্রমশঃ বাড়িতে থাকিলে, অতিভুজ $OP_2 (=OP)$ সর্বদা একই থাকিবে ; কিন্তু, P_2N_2 ক্রমশঃ নিরবচ্ছিন্নভাবে কমিতে থাকিবে, এবং যখন OP রেখা OX' এর সহিত মিলিত হইবে, তখন $\theta = 180^\circ$ এবং $P_2N_2 = 0$; অর্থাৎ, $\sin 180^\circ = 0$.

(ii) সুতরাং, 90° হইতে 180° পর্য্যন্ত θ এর মান নিরবচ্ছিন্নভাবে ক্রমশঃ বাড়িতে থাকিলে, $\sin \theta$ এর মান 1 হইতে 0 পর্য্যন্ত নিরবচ্ছিন্নভাবে ক্রমশঃ কমিতে থাকিবে।

ধরা যাক্, $\sin \theta = \dfrac{P_3N_3}{OP_3}$, $(180^\circ < \theta < 270^\circ)$.

এখন, θ এর মান 180° হইতে 270° পর্য্যন্ত ক্রমশঃ বাড়িতে থাকিলে, অতিভুজ $OP_3 (=OP)$ সর্বদা একই থাকিবে ; কিন্তু, P_3N_3 সর্বদা ঋণাত্মক থাকিয়া সাংখ্যমানে ক্রমশঃ বাড়িতে থাকিবে এবং যখন, OP রেখা OY' এর সহিত মিলিত হইবে, তখন, $\theta = 270^\circ$ এবং বাস্তব মানে $P_3N_3 = -OP_3$ হইবে ; অর্থাৎ, $\sin 270^\circ = -1$.

(iii) সুতরাং, 180° হইতে 270° পর্য্যন্ত θ এর মান নিরবচ্ছিন্নভাবে বাড়িতে থাকিলে, $\sin \theta$ এর মান 0 হইতে -1 পর্য্যন্ত নিরবচ্ছিন্নভাবে ক্রমশঃ কমিতে থাকিবে।

ধরা যাক্, $\sin \theta = \dfrac{P_4N_4}{OP_4}$, $(270^\circ < \theta < 360^\circ)$.

এখন, θ এর মান 270° হইতে 360° পর্যন্ত ক্রমশঃ বাড়িতে থাকিলে, অতিভুজ $OP_4 (=OP)$ সর্বদা একই থাকিবে ; কিন্তু, P_4N_4 সর্বদা ঋণাত্মক থাকিয়া সাংখ্যমানে

ক্রমশঃ কমিতে থাকিবে এবং যখন OP রেখা OX এর সহিত মিলিত হইবে, তখন, $\theta = 360°$ এবং $P_4N_4 = 0$, অর্থাৎ, $\sin 360° = 0$.

(iv) সুতরাং, 270° হইতে 360° পর্য্যন্ত θ এর মান নিরবচ্ছিন্নভাবে ক্রমশঃ বাড়িতে থাকিলে, $\sin \theta$ এর মান -1 হইতে 0 পর্য্যন্ত নিরবচ্ছিন্নভাবে ক্রমশঃ বাড়িতে থাকিবে।

মন্তব্য : θ এর মান 360° অপেক্ষা অধিক হইতে থাকিলে, $\sin \theta$ এর মানের পুনরাবৃত্তি হইতে থাকিবে।

(a) $y = \sin x$ এর লেখ :

"Natural sine" তালিকা হইতে x এর মান 0° হইতে 90° এর মধ্যে 10° ব্যবধানে দুই দশমিক স্থান পর্য্যন্ত লইয়া নিম্নের তালিকা প্রস্তুত করা হইল :

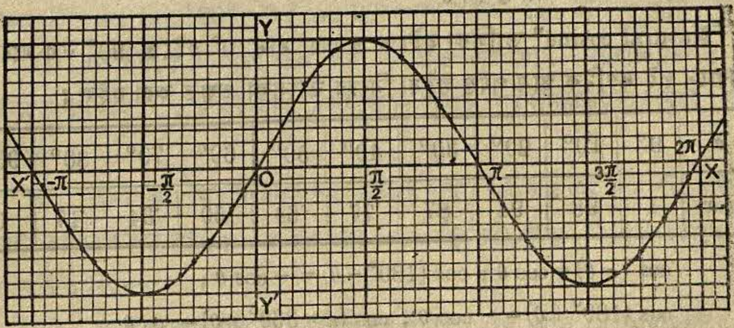
x	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\sin x$	0	·17	·34	·50	·64	·77	·87	·94	·98	1

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta \;;\; \sin(180° - \theta) = \sin\theta \;;$$
$$\sin(180° + \theta) = -\sin\theta \;;\; \sin(n \times 360° \pm \theta) = \pm \sin\theta,$$

সূত্রের সাহায্যে x এর অপর যে কোন মানের জন্য $\sin x$ এর অনুরূপ মান জানা যাইবে। যেমন :

x	100°	110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°	180°
$\sin x$	·98	·94	·87	·77	·64	·50	·34	·17	0

Sine—Graph



একটি বর্গাঙ্কিত কাগজে ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের বাহু বরাবর পরস্পর লম্বভাবে $X'OX$ এবং $Y'OY$ সরলরেখাদ্বয় টানিয়া উহাদিগকে যথাক্রমে x-অক্ষ এবং y-অক্ষ ধরিলাম। এখন,

x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে 10° দ্বারা এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 10টি বাহুর দৈর্ঘ্যকে 1 দ্বারা সূচিত করিয়া x এর বিভিন্ন মানের জন্য $\sin x$ এর অনুরূপ মানগুলি লইয়া বিন্দুগুলিকে সংস্থাপন করিলাম। এখন ঐ বিন্দুগুলিকে সন্তত (অবিচ্ছিন্ন ; *continuous*) বক্ররেখা দ্বারা যুক্ত করিয়া নির্ণেয় লেখ পাইলাম।

দ্রষ্টব্য ঃ 0 এবং 2π এর মধ্যবর্তী লেখটি, 2π এবং 4π , 4π এবং 6π ; ইত্যাদি এবং -2π এবং 0 ; -4π এবং -2π ; ইত্যাদি এর মধ্যে পুনরাবৃত্ত হইবে এবং এইভাবে উভয় দিকে অসীম পর্য্যন্ত পুনরাবৃত্তি ঘটিতে থাকিবে।

[2] θ এর পরিবর্তনে $\cos\theta$ এর পরিবর্তন ঃ

[1] এর অনুরূপ আলোচনার সাহায্যে দেখা যাইবে,

(*i*) 0° হইতে 90° পর্য্যন্ত θ এর মান নিরবচ্ছিন্নভাবে ক্রমশঃ বাড়িতে থাকিলে, $\cos\theta$ এর মান 1 হইতে 0 পর্য্যন্ত নিরবচ্ছিন্নভাবে ক্রমশঃ কমিতে থাকিবে ;

(*ii*) 90° হইতে 180° পর্যন্ত θ এর মান নিরবচ্ছিন্নভাবে ক্রমশঃ বাড়িতে থাকিলে, $\cos\theta$ এর মান 0 হইতে -1 পর্য্যন্ত নিরবচ্ছিন্নভাবে ক্রমশঃ কমিতে থাকিবে ;

(*iii*) 180° হইতে 270° পর্যন্ত θ এর মান নিরবচ্ছিন্নভাবে ক্রমশঃ বাড়িতে থাকিলে, $\cos\theta$ এর মান -1 হইতে 0 পর্যন্ত নিরবচ্ছিন্নভাবে ক্রমশঃ বাড়িতে থাকিবে ;

(*iv*) 270° হইতে 360° পর্যন্ত θ এর মান নিরবচ্ছিন্নভাবে ক্রমশঃ বাড়িতে থাকিলে, $\cos\theta$ এর মান 0 হইতে 1 পর্য্যন্ত নিরবচ্ছিন্নভাবে ক্রমশঃ বাড়িতে থাকিবে।

মন্তব্য ঃ θ এর মান 360° অপেক্ষা অধিক হইতে থাকিলে, $\cos\theta$ এর মানের পুনরাবৃত্তি হইতে থাকিবে।

(*b*) $y=\cos x$ এর লেখ ঃ

"Natural cosine" তালিকা হইতে x এর মান 0° হইতে 90° এর মধ্যে 10° ব্যবধানে দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত লইয়া নিম্নের তালিকা প্রস্তুত করা হইল :

x	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\cos x$	1	·98	·94	·87	·77	·64	·50	·34	·17	0

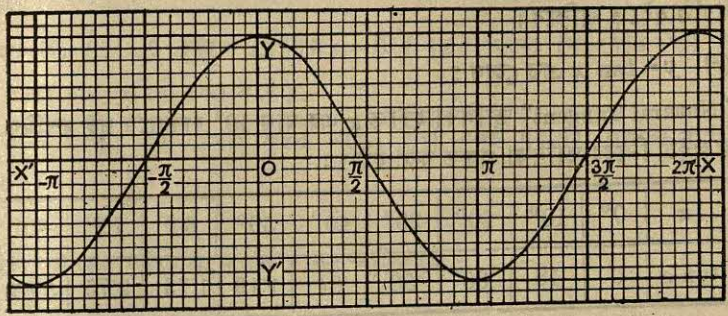
$$\cos(-\theta)=\cos\theta\ ;\ \cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta\ ;$$

$$\cos(180^\circ+\theta)=-\cos\theta\ ;\ \cos(n\times360^\circ\pm\theta)=\cos\theta\ ;$$

সূত্রের সাহায্যে x এর অপর যে কোন মানের জন্য $\cos x$ এর অনুরূপ মান জানা যাইবে। বর্গাঙ্কিত কাগজে ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের বাহু বরাবর পরস্পর লম্বভাবে $X'OX$ এবং

$Y'OY$ সরলরেখাদ্বয় টানিয়া উহাদিগকে যথাক্রমে x-অক্ষ এবং y-অক্ষ ধরিলাম। এখন, x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে 10° দ্বারা এবং y-অক্ষ

Cosine—Graph



বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের দশটি বাহুর দৈর্ঘ্যকে 1 দ্বারা সূচিত করিয়া বিন্দুগুলি সংস্থাপন করিলাম। এখন ঐ বিন্দুগুলি একটি সন্তত বক্র রেখা দ্বারা সংযুক্ত করিয়া নির্ণেয় লেখ পাইলাম।

দ্রষ্টব্য ঃ 0 এবং 2π এর মধ্যবর্তী লেখটি, 2π এবং 4π ; 4π এবং 6π ; ইত্যাদি এবং -2π এবং 0 ; -4π এবং -2π ; ইত্যাদি এর মধ্যে পুনরাবৃত্ত হইবে, এবং এইভাবে উভয় দিকে অসীম পর্য্যন্ত পুনরাবৃত্তি ঘটিতে থাকিবে।

[3] θ এর পরিবর্তনে $\tan\theta$ এর পরিবর্তন ঃ

[1] এর অনুরূপ চিত্রের সাহায্যে আলোচনার মাধ্যমে দেখা যাইবে ঃ

$\tan 0° = 0$; $\tan 180° = 0$; $\tan 90°$ = অনির্ণীত ; $\tan 270°$ = অনির্ণীত, এবং,

(i) 0° হইতে 90°-এর ঠিক পূর্ব পর্য্যন্ত θ এর মান নিরবচ্ছিন্নভাবে ক্রমশঃ বাড়িতে থাকিলে, $\tan\theta$ এর মান 0 হইতে ∞ পর্য্যন্ত নিরবচ্ছিন্নভাবে ক্রমশঃ বাড়িতে থাকিবে ;

(ii) 90° এর অব্যবহিত পর হইতে 180° পর্য্যন্ত θ এর মান নিরবচ্ছিন্নভাবে ক্রমশঃ বাড়িতে থাকিলে, $\tan\theta$ এর মান $-\infty$ হইতে 0 পর্যন্ত নিরবচ্ছিন্নভাবে ক্রমশঃ বাড়িতে থাকিবে ;

(iii) 180° হইতে 270° এর ঠিক পূর্ব পর্য্যন্ত θ এর মান নিরবচ্ছিন্নভাবে ক্রমশঃ বাড়িতে থাকিলে, $\tan\theta$ এর মান 0 হইতে ∞ পর্য্যন্ত নিরচ্ছিন্নভাবে ক্রমশঃ বাড়িতে থাকিবে ;

(*iv*) 270° এর অব্যবহিত পর হইতে 360° পর্য্যন্ত θ এর মান নিরবচ্ছিন্নভাবে ক্রমশঃ বাড়িতে থাকিলে, tan θ এর মান $-\infty$ হইতে 0 পর্য্যন্ত নিরবচ্ছিন্নভাবে ক্রমশঃ বাড়িতে থাকিবে।

মন্তব্য : θ এর মান 180° অপেক্ষা অধিক হইতে থাকিলে, tan θ এর মানের পুনরাবৃত্তি হইতে থাকিবে।

(*c*) **$y = \tan x$ এর লেখ :**

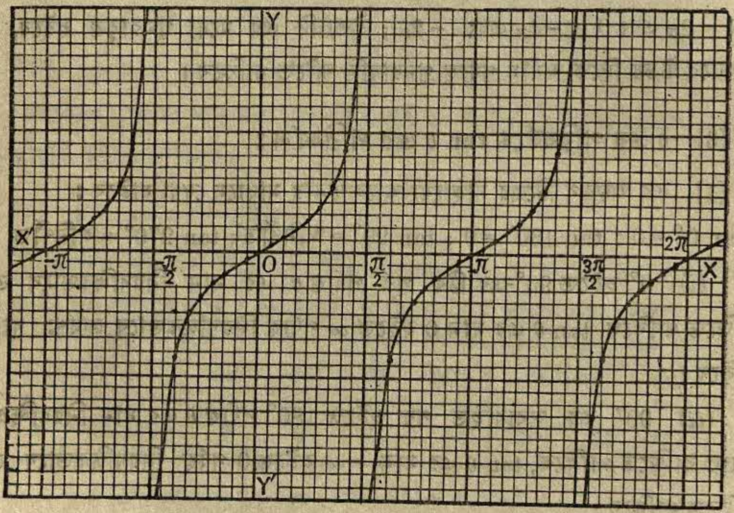
"Natural Tangent" তালিকা হইতে x-এর মান 10° ব্যবধানে দুই দশমিক স্থান পর্য্যন্ত লইয়া নিম্নের তালিকা প্রস্তুত করা হইল :

x	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
tan x	0	·18	·36	·58	·84	1·19	1·73	2·75	5·67

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta\,; \quad \tan(180° - \theta) = -\tan\theta\,;$$
$$\tan(180° + \theta) = \tan\theta\,; \ \tan(n \times 180° \pm \theta) = \pm\tan\theta,$$

সূত্রের সাহায্যে x এর অপর যে কোন মানের জন্য tan x এর অনুরূপ মান জানা যাইবে। বর্গাঙ্কিত কাগজে পরস্পর লম্বভাবে ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের বাহু বরাবর

Tangent—Graph



x-অক্ষ এবং y-অক্ষ লইলাম; এবং x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে 10° এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর 3 গুণকে একক ধরিয়া $y = \tan x$ এর লেখ অঙ্কন করিলাম।

দ্রষ্টব্য : $-\pi/2$ এবং $+\pi/2$ এর মধ্যবর্তী লেখটি, $\pi/2$ এবং $3\pi/2$; $3\pi/2$ এবং $5\pi/2$; ইত্যাদি ও $-3\pi/2$, এবং $-\pi/2$; $-5\pi/2$ এবং $-3\pi/2$; ইত্যাদি এর মধ্যে পুনরাবৃত্ত হইবে ; এবং এইভাবে উভয়দিকে অসীম পর্য্যন্ত পুনরাবৃত্তি ঘটিতে থাকিবে।

$x=(2n+1)\pi/2$ হইলে যেখানে $n=0$ (শূন্য) অথবা যে কোন পূর্ণ সংখ্যা, $\tan x$ এর মান অনির্ণীত থাকিবে।

তাহা ছাড়া, এই লেখটি সন্তত নহে ; ইহা একই ধরণের অসংখ্য শাখা দ্বারা গঠিত।

[4] θ এর পরিবর্ত্তনে $\cot\theta$ এর পরিবর্তন :

আমরা জানি, $\cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}$.

সুতরাং, এইখান হইতে অথবা [1] এর অনুরূপ চিত্রের মাধ্যমে আলোচনার সাহায্যে দেখা যাইবে :

$\cot 90°=0$; $\cot 270°=0$; $\cot 0°$; $\cot 180°$ এবং $\cot 360°$ অনির্ণীত ; তাহা ছাড়া,

(*i*) 0° এর অব্যবহিত পর হইতে 90° পর্য্যন্ত θ এর মান নিরবচ্ছিন্নভাবে ক্রমশঃ বাড়িতে থাকিলে, $\cot\theta$ এর মান ∞ হইতে 0 পর্য্যন্ত নিরবচ্ছিন্নভাবে ক্রমশঃ কমিতে থাকিবে ;

(*ii*) 90° হইতে 180° এর ঠিক পূর্ব পর্য্যন্ত θ এর মান নিরবচ্ছিন্নভাবে ক্রমশঃ বাড়িতে থাকিলে, $\cot\theta$ এর মান 0 হইতে $-\infty$ পর্য্যন্ত নিরবচ্ছিন্নভাবে ক্রমশঃ কমিতে থাকিবে ;

(*iii*) 180° এর অব্যবহিত পর হইতে 270° পর্য্যন্ত θ এর মান নিরবচ্ছিন্নভাবে ক্রমশঃ বাড়িতে থাকিলে, $\cot\theta$ এর মান ∞ হইতে 0 পর্য্যন্ত নিরবচ্ছিন্নভাবে ক্রমশঃ কমিতে থাকিবে ;

(*iv*) 270° হইতে 360° এর পূর্ব পর্য্যন্ত θ এর মান নিরবচ্ছিন্নভাবে ক্রমশঃ বাড়িতে থাকিলে, $\cot\theta$ এর মান 0 হইতে $-\infty$ পর্য্যন্ত নিরবচ্ছিন্নভাবে ক্রমশঃ কমিতে থাকিবে।

মন্তব্য : θ এর মান 180° অপেক্ষা অধিক হইলে, $\cot\ \theta$ এর মানের পুনরাবৃত্তি হইতে থাকিবে।

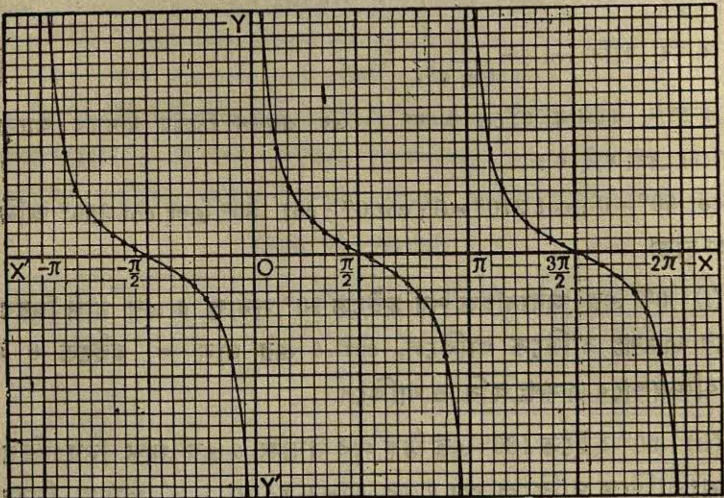
(*d*) $y=\cot x$ এর লেখ :

'Natural cotangent" তালিকা হইতে x এর মান $10°$ ব্যবধানে দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত লইয়া নিম্নের তালিকা প্রস্তুত করা হইল :

x	$10°$	$20°$	$30°$	$40°$	$50°$	$60°$	$70°$	$80°$	$90°$
$\cot x$	5·67	2·75	1·73	1·19	·84	·58	·36	·18	0

$\cot(-\theta)=-\cot\theta$; $\cot(180°-\theta)=-\cot\theta$; $\cot(180°+\theta)=\cot\theta$; $\cot(n\times180°\pm\theta)=\pm\cot\theta$ সূত্রের সাহায্যে x এর অপর যে কোন মানের জন্য $\cot x$ অনুরূপ মান জানা যাইবে।

Cotangent—Graph



বর্গাঙ্কিত কাগজে পরস্পর লম্বভাবে ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের বাহু বরাবর x-অক্ষ এবং y-অক্ষ লইলাম ; এবং x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে $10°$ আর y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর 3 গুণকে 1 একক ধরিয়া $y=\cot x$ এর লেখ অঙ্কন করা হইয়াছে।

দ্রষ্টব্য : 0 এবং π এর মধ্যবর্তী লেখটি, π এবং 2π ; 2π এবং 3π ; ইত্যাদি এবং $-\pi$ এবং 0 ; -2π এবং $-\pi$; ইত্যাদি এর মধ্যে পুনরাবৃত্ত হইবে ; এবং এইভাবে উভয়দিকে অসীম পর্যন্ত পুনরাবৃত্তি ঘটিতে থাকিবে।

$x=n\pi$ হইলে, যেখানে, $n=0$ (শূন্য) অথবা যে কোন পূর্ণ সংখ্যা, $\cot x$ অনির্ণীত থাকিবে ; অর্থাৎ, এই সমস্ত স্থানে লেখটি ভাঙ্গা (অবিচ্ছিন্ন বা সন্তত নহে) ; এবং একই ধরনের অসংখ্য শাখা দ্বারা লেখটি গঠিত।

[5] θ এর পরিবর্ত্তনে $\sec\theta$ এর পরিবর্তন :

আমরা জানি, $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$.

সুতরাং, এইখান হইতে অথবা [1] এর অনুরূপ চিত্রের মাধ্যমে আলোচনার সাহায্যে দেখা যাইবে :

$\sec 90^\circ$ এবং $\sec 270^\circ$ অনির্ণীত ; তাহা ছাড়া,

(i) 0° হইতে 90° এর অব্যবহিত পূর্ব পর্য্যন্ত θ এর মান নিরবচ্ছিন্নভাবে ক্রমশঃ বাড়িতে থাকিলে, $\sec\theta$ এর মান 1 হইতে ∞ পর্যন্ত নিরবচ্ছিন্নভাবে ক্রমশঃ বাড়িতে থাকিবে ;

(ii) 90° এর অব্যবহিত পর হইতে 180° পর্য্যন্ত θ এর মান নিরবচ্ছিন্নভাবে ক্রমশঃ বাড়িতে থাকিলে, $\sec\theta$ এর মান $-\infty$ হইতে -1 পর্য্যন্ত নিরবচ্ছিন্নভাবে ক্রমশঃ বাড়িতে থাকিবে ;

(iii) 180° হইতে 270° এর অব্যবহিত পূর্ব পর্য্যন্ত θ এর মান নিরবচ্ছিন্ন ভাবে ক্রমশঃ বাড়িতে থাকিলে, $\sec\theta$ এর মান -1 হইতে $-\infty$ পর্যন্ত নিরবচ্ছিন্নভাবে ক্রমশঃ কমিতে থাকিবে ;

(iv) 270° এর অব্যবহিত পর হইতে 360° পর্যন্ত θ এর মান নিরবচ্ছিন্নভাবে ক্রমশঃ বাড়িতে থাকিলে, $\sec\theta$ এর মান ∞ হইতে 1 পর্যন্ত নিরবচ্ছিন্নভাবে ক্রমশঃ কমিতে থাকিবে।

মন্তব্য : θ এর মান 360° অপেক্ষা অধিক হইলে, $\sec\theta$ এর মানের পুনরাবৃত্তি হইবে।

(e) $y=\sec x$ এর লেখ :

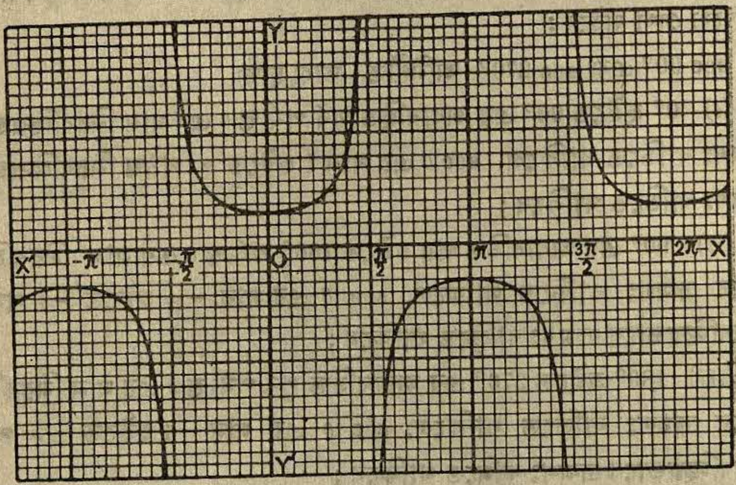
"Natural secant' তালিকা হইতে অথবা, '"Natural cosine" তালিকা হইতে $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ এর সাহায্যে x এর মান 10° ব্যবধানে দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত লইয়া নিম্নের তালিকা প্রস্তুত হইল :

x	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
$\sec x$	1·00	1·02	1·06	1·15	1·31	1·56	2·00	2·92	5·76

$\sec(-\theta)=\sec\theta$; $\sec(180^\circ-\theta)=-\sec\theta$; $\sec(180^\circ+\theta)=-\sec\theta$; $\sec(n\times360^\circ\pm\theta)=\sec\theta$ সূত্রের সাহায্যে x এর অপর যে কোন মানের জন্য $\sec x$ এর অনুরূপ মান জানা যাইবে।

বর্গাঙ্কিত কাগজে ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের বাহু বরাবর পরস্পর লম্বভাবে $X'OX$ এবং $Y'OY$ সরলরেখাদ্বয় টানিয়া উহাদিগকে যথাক্রমে x-অক্ষ এবং y-অক্ষ ধরিলাম।

Secant—Graph



x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে 10° দ্বারা এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর 3 গুণকে 1 একক দ্বারা সূচিত করিয়া লেখ অঙ্কন করা হইল।

দ্রষ্টব্য : $\sec(2n\pi + x) = \sec x$ বলিয়া প্রত্যেক 2π অন্তর লেখটির পুনরাবৃত্ত হইবে।

$x = (2n+1)\pi/2$ হইলে, যেখানে, $n = 0$ (শূন্য) অথবা যে কোন পূর্ণ সংখ্যা $\sec x$ অনির্ণীত থাকিবে ; অর্থাৎ, x এর এই সমস্ত মানের জন্য লেখটি ভাঙ্গা অবস্থায় থাকিবে ; একই ধরণের অসংখ্য শাখা দ্বারা লেখটি গঠিত।

[6] θ এর পরিবর্তনে $\operatorname{cosec}\theta$ এর পরিবর্তন :

আমরা জানি, $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$; এইখান হইতে, অথবা, [1] এর অনুরূপ চিত্রের সাহায্যে আলোচনার মাধ্যমে দেখা যাইবে,

cosec 0°, cosec 180°, cosec 360° অনির্ণীত ; তাহা ছাড়া,

(i) 0° এর অব্যবহিত পর হইতে 90° পর্যন্ত θ এর মান নিরবচ্ছিন্নভাবে ক্রমশঃ বাড়িতে থাকিলে, c sec θ এর মান ∞ হইতে 1 পর্য্যন্ত নিরবচ্ছিন্নভাবে ক্রমশঃ কমিতে থাকিবে ;

(*ii*) 90° হইতে 180° এর ঠিক পূর্ব পর্যন্ত θ এর মান নিরবচ্ছিন্নভাবে ক্রমশঃ বাড়িতে থাকিলে, cosec θ এর মান 1 হইতে ∞ পর্যন্ত নিরবচ্ছিন্নভাবে ক্রমশঃ বাড়িতে থাকিবে ;

(*iii*) 180° এর অব্যবহিত পর হইতে 270° পর্য্যন্ত θ এর মান নিরবচ্ছিন্নভাবে ক্রমশঃ বাড়িতে থাকিলে, cosec θ এর মান $-\infty$ হইতে -1 পর্য্যন্ত নিরবচ্ছিন্নভাবে ক্রমশঃ বাড়িতে থাকিবে ;

(*iv*) 270° হইতে 360° এর ঠিক পূর্বে পর্য্যন্ত θ এর মান নিরবচ্ছিন্নভাবে ক্রমশঃ বাড়িতে থাকিলে, cosec θ এর মান -1 হইতে $-\infty$ পর্য্যন্ত নিরবচ্ছিন্নভাবে ক্রমশঃ কমিতে থাকিবে।

মন্তব্য ঃ θ এর মান 360° অপেক্ষা অধিক হইলে, cosec θ এর মানের পুনরাবৃত্তি হইবে।

(*f*) $y = \text{cosec } x$ এর লেখ ঃ

"Natural cosecant" তালিকা হইতে, অথবা, "Natural sine" তালিকা হইতে $\text{cosec } x = \dfrac{1}{\sin x}$ এর সাহায্যে x এর মান 10° ব্যবধানে দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত লইয়া নিম্নের তালিকাটি প্রস্তুত করা হইল ঃ

x	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
cosec x	5·76	2·92	2	1·56	1·31	1·15	1·06	1·02	1

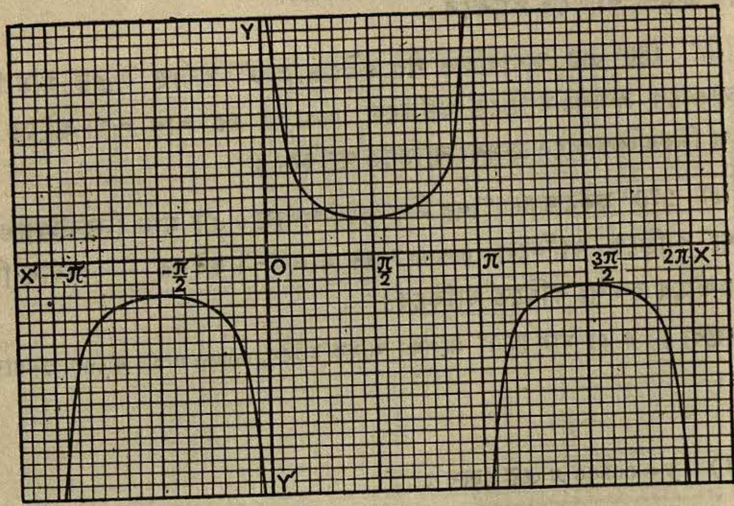
$\text{cosec}(-\theta) = -\text{cosec }\theta$; $\text{cosec}(180° - \theta) = \text{cosec }\theta$; $\text{cosec}(180° + \theta) = -\text{cosec }\theta$; $\text{cosec}(n \times 360° \pm \theta) = \pm\,\text{cosec }\theta$ সূত্রের সাহায্যে x এর অপর যে কোন মানের জন্য cosec x এর অনুরূপ মান জানা যাইবে।

বর্গাঙ্কিত কাগজে ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের বাহু বরাবর পরস্পর লম্বভাবে $X'OX$ এবং $Y'OY$ সরলরেখাদ্বয় টানিয়া উহাদিগকে যথাক্রমে x-অক্ষ এবং y-অক্ষ ধরিলাম। x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে 10° দ্বারা এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একবাহুর 3 গুণকে 1 একক দ্বারা সূচিত করিয়া লেখ অঙ্কন করা হইল।

দ্রষ্টব্য ঃ $\text{cosec}(2n\pi + x) = \text{cosec } x$ বলিয়া, প্রত্যেক 2π অন্তর লেখটির পুনরাবৃত্তি হইবে।

$x = n\pi$ হইলে, যেখানে, $n = 0$ (শূন্য), অথবা, যে কোন পূর্ণসংখ্যা, cosec x

Cosecant—Graph



অনির্ণীত থাকিবে ; অর্থাৎ, x-এর এই সমস্ত মানের জন্য লেখটি ভাঙ্গা অবস্থায় থাকিবে ; একই ধরণের অসংখ্য শাখা দ্বারা লেখটি গঠিত।

উদাহরণ 1. $x = -30$ এবং $x = 60$ এর সীমার মধ্যে $y = 2 \sin x^\circ + \cos x^\circ$ এর লেখ অঙ্কন কর। দেওয়া আছে, **[H. S. 1971]**

x	10	20	30	40	50	60	70	80
$\cos x^\circ$	·98	·94	·87	·77	·64	·50	·34	·17

সমাধান : $y = 2 \sin x^\circ + \cos x^\circ$, $(-30^\circ \leq x^\circ \leq 60^\circ)$,

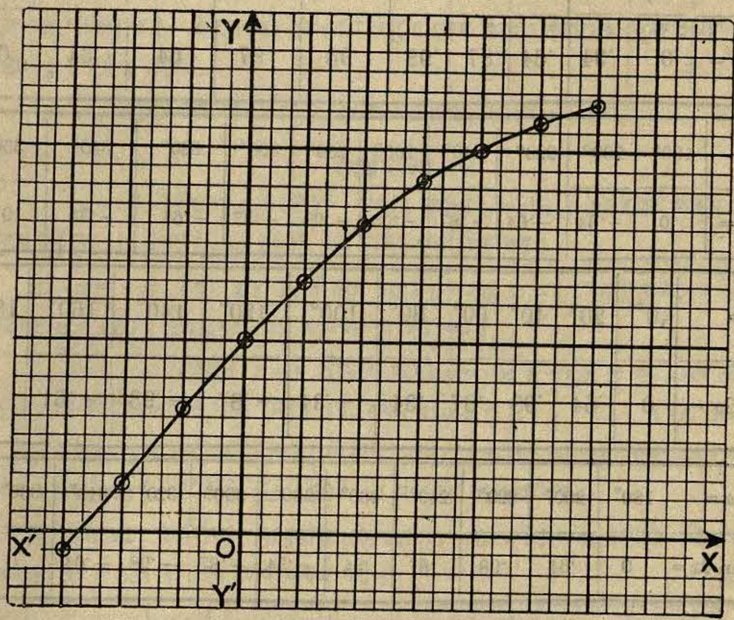
এখন, $\sin(-\theta) = -\sin\theta$; $\cos(-\theta) = \cos\theta$; $\sin\theta = \cos(90^\circ - \theta)$

এবং প্রদত্ত তালিকা হইতে পাই,

x	−30	−20	−10	0	10	20	30	40	50	60
$\cos x^\circ$	·87	·94	·98	1	·98	·94	·87	·77	·64	·50

x	−30	−20	−10	0	10	20	30	40	50	60
$\sin x^\circ$	−·50	−·34	−·17	0	·17	·34	·50	·64	·77	·87

$x=$	-30	-20	-10	0	10	20	30	40	50	60
$y=$	$-{\cdot}13$	$\cdot26$	$\cdot64$	1	1·32	1·62	1·87	2·05	2·18	2·24



একটি বর্গাঙ্কিত কাগজে ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের বাহু বরাবর পরস্পর লম্বভাবে $X'OX$ $Y'OY$ সরলরেখা টানিয়া উহাদিগকে যথাক্রমে x-অক্ষ এবং y-অক্ষ ধরিলাম। এখন x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যের 3 গুণকে $10°$ দ্বারা এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যের 10 গুণকে 1 একক ধরিয়া তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক সংস্থাপন করিলাম। এখন ঐ বিন্দুগুলিকে একটি নিরবচ্ছিন্ন (continuous) বক্ররেখা দ্বারা যুক্ত করিয়া নির্ণেয় লেখ পাইলাম।

উদাহরণ 2. $\sin 2x = \sin x$ এর লৈখিক সমাধান নির্ণয় কর ; যখন x এর মান $0°$ এবং $360°$ এর মধ্যবর্তী।

সমাধান :

এখানে, $y=\sin 2x$ এবং $y=\sin x$ এর লেখ একই বর্গাঙ্কিত কাগজে একই অক্ষ-দ্বয়ের সাপেক্ষে অঙ্কন করা যাক্।

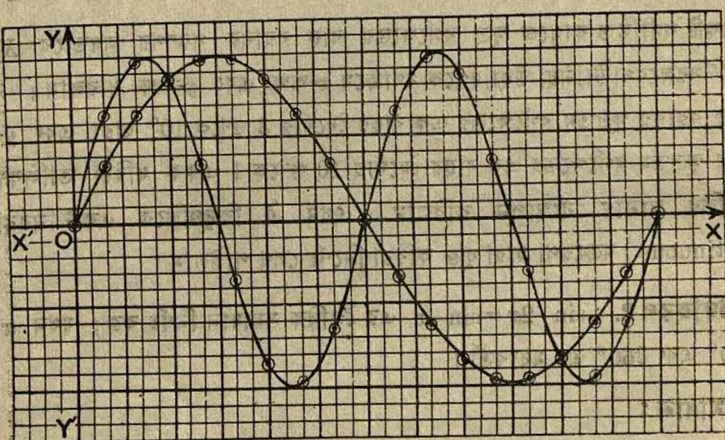
"Natural sine" তালিকা হইতে x এর মান $0°$ হইতে $90°$ এর মধ্যে $20°$ ব্যবধানে দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত লইয়া এবং $\sin\ \theta=\sin\ (180°-\theta)$; $\sin\theta=-\sin(180°+\theta)$; $\sin\theta=-\sin\ (360°-\theta)$; $\sin\ \theta=\sin\ (360°+\theta)$ এর সাহায্যে তালিকা প্রস্তুত করা হইল :

$x=$	0°	20°	40°	60°	80°	100°	120°	140°	160°	180°
$\sin x=$	0	·34	·64	·87	·98	·98	·87	·64	·34	0

$x=$	180°	200°	220°	240°	260°	280°	300°	320°	340°	360°
$\sin x=$	0	−·34	−·64	−·87	−·98	−·98	−·87	−·64	−·34	0

$x=$	0°	20°	40°	60°	80°	100°	120°	140°	160°	180°
$\sin 2x=$	0	·64	·98	·87	·34	−·34	−·87	−·98	−·64	0

$x=$	180°	200°	220°	240°	260°	280°	300°	320°	340°	360°
$\sin 2x=$	0	·64	·98	·87	·34	−·34	−·87	−·98	−·64	0



একটি বর্গাঙ্কিত কাগজে ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের বাহু বরাবর পরস্পর লম্বভাবে $X'OX$ এবং

$Y'OY$ সরলরেখাদ্বয় টানিয়া উহাদিগকে যথাক্রমে x-অক্ষ এবং y-অক্ষ ধরিলাম। এখন, x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যের 2 গুণকে $20°$ দ্বারা এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যের 10 গুণকে 1 একক দ্বারা সূচিত করিয়া তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক সংস্থাপন করিলাম। এখন $y=\sin x$ এবং $y=\sin 2x$ এর অনুরূপ বিন্দুগুলি নিরবচ্ছিন্ন বক্ররেখা দ্বারা যুক্ত করিয়া নির্ণেয় লেখদ্বয় পাইলাম। ঐ লেখদ্বয় যে যে বিন্দুতে ছেদ করে তাহাদের ভুজ : $0°$; $60°$; $180°$; $300°$; $360°$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $0°$; $60°$: $180°$; $300°$; $360°$.

প্রশ্নমালা 18

1. $x=0°$ হইতে $x=360°$ সীমার মধ্যে $y=\sin x$ এর লেখ অঙ্কন কর এবং লেখ হইতে $\sin 162°$, $\sin 240°$ এর মানদ্বয় বাহির কর।

2. $x=-\pi$ এবং $x=\pi$ সীমার মধ্যে $y=\cos x$ এর লেখ অঙ্কন কর এবং লেখ হইতে $\cos 120°$, $\cos 144°$ এর মানদ্বয় বাহির কর।

3. $x=-\pi$ হইতে $x=\pi$ সীমার মধ্যে $y=\cos x-\sin x$ এর লেখ অঙ্কন কর এবং লেখ হইতে x এর মান নির্ণয় কর, যখন $\tan x=1$. [H. S. 1964]

4. $x=-\pi$ হইতে $x=\pi$ সীমার মধ্যে $y=\sin 2x$ এর লেখ অঙ্কন কর এবং লেখ হইতে $\sin(-270°)$, $\sin 150°$ এর মানদ্বয় বাহির কর।

5. নিম্নের তালিকা ব্যবহার করিয়া $x=0$ হইতে $x=100$ সীমার মধ্যে $y=\sin x^\circ+\cos x^\circ$ এর লেখ অঙ্কন কর।

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$\sin x^\circ$	0	·17	·34	·50	·64	·77	·87	·94	·98	1

[H. S . Comp. 1973]

6. $x=-90$ হইতে $x=+90$ এর মধ্যে $y=\cos x^\circ-\sin x^\circ$ এর লেখ অঙ্কন কর ; এবং লেখ হইতে x এর মান নির্ণয় কর, যাহাতে $\tan x^\circ=1$ হয় ; দেওয়া আছে,

x	10	20	30	40	50	60	70	80
$\sin x^\circ$	·17	·34	·50	·64	·77	·87	·94	·98

[H. S. 1975]

7. নিম্নে প্রদত্ত তালিকার সাহায্যে $x=0$ হইতে 180 এর মধ্যে $y=3\sin x^\circ+4\cos x^\circ$, এর লেখ অঙ্কন কর; এবং লেখ হইতে y এর চরম মান বাহির কর:

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$\cos x^\circ$	1	·98	·94	·87	·77	·64	·50	·34	·17	0

[**H. S. Comp. 1974**]

8. $x=-40$ হইতে $+50$ এর মধ্যে $y=\frac{1}{2}+\cos(x^\circ+70^\circ)$ এর লেখ অঙ্কন কর; দেওয়া আছে,

x :	30	40	50	60	70	80
$\cos x^\circ$:	·87	·77	·64	·50	·34	·17

9. $x=+90$ হইতে $+150$ এর মধ্যে $y=2+\cos x^\circ$ এবং $y=2\sin x^\circ$ এর লেখ অঙ্কন কর; দেওয়া আছে,

$x=$	10	20	30	40	50	60	70	80
$\sin x^\circ=$	·17	·34	·50	·64	·77	·87	·94	·98

[**H. S. 1972**]

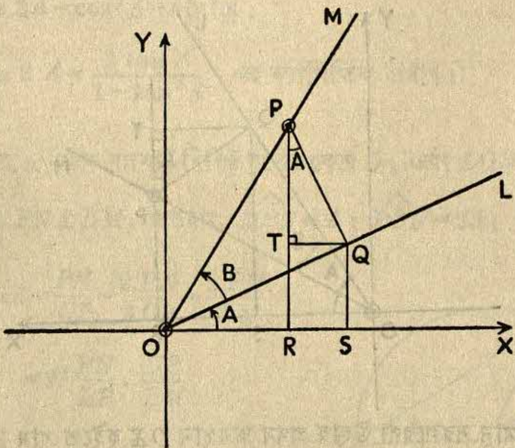
10. $x=0$ এবং $x=\pi/2$ সীমার মধ্যে $\tan x=\cos x$ এর লৈখিক সমাধান কর।

11. $x=0$ এবং $x=\pi/2$ সীমার মধ্যে $\tan x-2x=0$ এর লৈখিক সমাধান কর।

12. $x=-\pi/2$ এবং $3\pi/2$ এর মধ্যে $2\sin^2 x=\cos 2x$ এর লৈখিক সমাধান কর।

A-1. A, B, এবং $A+B$ ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ হইলে,

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$ এর জ্যামিতিক প্রমাণ।



একটি ঘূর্ণায়মান সরলরেখা উহার প্রথম অবস্থান OX হইতে বাম আবর্তে ঘুরিতে থাকিয়া $\widehat{XOL}=A$ এবং $\widehat{LOM}=B$ উৎপন্ন করিয়াছে, যেখানে,

$$\widehat{XOM}=A+B<90^\circ.$$

$PR\perp OX$; $PQ\perp OL$ এবং $QT\perp PR$ অঙ্কন করা হইয়াছে।

তাহা হইলে, $\widehat{QPT}=A.$ সুতরাং $\triangle OSQ$ এবং $\triangle PTQ$ সদৃশ।

$$\therefore\quad \frac{OS}{PT}=\frac{OQ}{PQ};$$

অর্থাৎ, $\dfrac{PT}{OS}=\dfrac{PQ}{OQ}=\tan B.$

আবার, $\dfrac{QS}{OS}=\tan A$ এবং $\dfrac{TQ}{PT}=\tan A.$

$$\therefore\quad \tan(A+B)=\tan\widehat{POR}=\frac{PR}{OR}$$

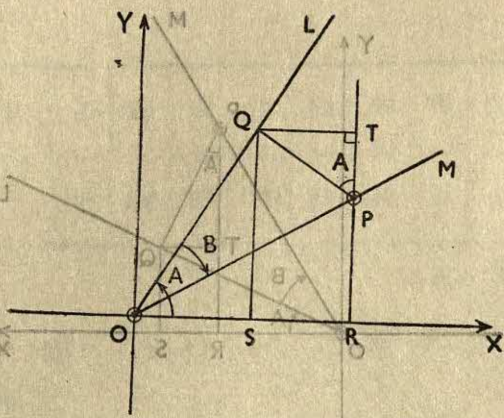
$$=\frac{TR+PT}{OS-RS}=\frac{QS+PT}{OS-TQ}$$

$$=\frac{\dfrac{QS}{OS}+\dfrac{PT}{OS}}{1-\dfrac{TQ}{PT}\cdot\dfrac{PT}{OS}}$$

$$=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}.$$

A-2. A এবং B ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ এবং $A>B$ হইলে,

$$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$$ এর জ্যামিতিক প্রমাণ।



একটি ঘূর্ণায়মান সরলরেখা উহার প্রথম অবস্থান OX হইতে বাম আবর্তে ঘুরিতে থাকিয়া $\widehat{XOL}=A$ এবং পরে ডান আবর্তে ঘুরিতে থাকিয়া $\widehat{LOM}=B$ উৎপন্ন করিয়াছে, যেখানে, $\widehat{XOM}=A-B>0°$.

$PR\perp OX$; $PQ\perp OL$; $QT\perp RP$ অঙ্কন করা হইয়াছে।

তাহা হইলে, $\widehat{QPT}=A$; সুতরাং, $\triangle OSQ$ এবং $\triangle PTQ$ সদৃশ।

$$\therefore\ \frac{OS}{PT}=\frac{OQ}{PQ}.$$

অর্থাৎ, $$\frac{PT}{OS}=\frac{PQ}{OQ}=\tan B.$$

আবার, $\frac{QS}{OS}=\tan A$ এবং $\frac{QT}{PT}=\tan A.$

$$\therefore\ \tan(A-B)=\tan\widehat{POR}=\frac{PR}{OR}$$

$$=\frac{TR-PT}{OS+SR}=\frac{QS-PT}{OS+QT}$$

$$=\frac{\frac{QS}{OS}-\frac{PT}{OS}}{1+\frac{QT}{PT}\cdot\frac{PT}{OS}}$$

$$=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$$

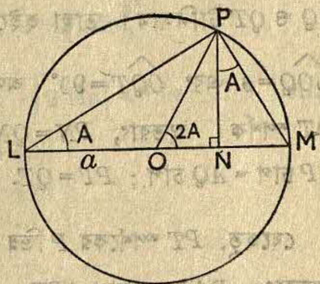
A-3. A একটি ধনাত্মক কোণ হইলে,

(*i*) $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$;

(*ii*) $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$;

(*iii*) $\tan 2A = \dfrac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$ এর জ্যামিতিক প্রমাণ।

পার্শ্ববর্তী চিত্রে, a একক ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র O ; এবং LOM উহার ব্যাস। $\widehat{PLM} = A$. এবং $PN \perp LM$; সুতরাং, $\widehat{MPN} = A$; $\widehat{PON} = 2A$; $\widehat{LPM} = 90°$.



(*i*) $\sin 2A = \dfrac{PN}{OP} = \dfrac{2.PN}{2.OP} = \dfrac{2.PN}{LM}$

$= 2. \dfrac{PN}{LP} \cdot \dfrac{LP}{LM}$

$= 2.\sin \widehat{PLN}.\cos \widehat{PLM}$

$= 2 \sin A \cos A.$

(*ii*) $\cos 2A = \dfrac{ON}{OP} = \dfrac{2.ON}{2.OP} = \dfrac{ON + ON}{LM}$

$= \dfrac{(LN - LO) + (OM - NM)}{LM} = \dfrac{LN - NM}{LM}$

$= \dfrac{LN}{LP} \cdot \dfrac{LP}{LM} - \dfrac{NM}{PM} \cdot \dfrac{PM}{LM}$

$= \cos A.\cos A - \sin A.\sin A$

$= \cos^2 A - \sin^2 A.$

(*iii*) $\tan 2A = \dfrac{PN}{ON} = \dfrac{2.PN}{2.ON} = \dfrac{2.PN}{LN - NM}$

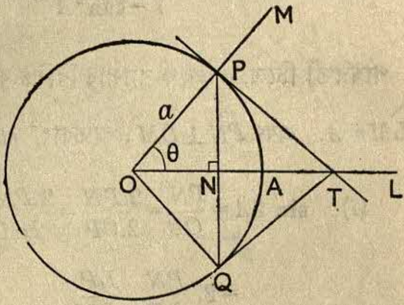
$= \dfrac{2. \dfrac{PN}{LN}}{1 - \dfrac{NM}{PN} \cdot \dfrac{PN}{LN}}$

$= \dfrac{2 \tan A}{1 - \tan A.\tan A} = \dfrac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}.$

A-4. $0<\theta<\pi/2$ হইলে,

$$\sin\theta<\theta<\tan\theta.$$

মনে করি, $\widehat{LOM}=\theta$ রেডিয়ান্। a একক ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত অঙ্কন করিলাম, যাহার কেন্দ্র O; এবং যাহা OL এবং OM কে যথাক্রমে A এবং P বিন্দুতে ছেদ করে। $PN\perp OL$ টানিয়া বর্ধিত করিলাম, যেন উহা বৃত্তকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল। PT স্পর্শক টানিলাম এবং OQ ও QT টানিলাম। তাহা হইলে, $\widehat{LOQ}=\theta$ এবং $\widehat{OQT}=90^\circ$ অর্থাৎ QT স্পর্শক। সুতরাং, $PN=QN$; AP চাপ $=AQ$ চাপ; $PT=QT$.



যেহেতু, PT স্পর্শকের P ভিন্ন উহার উপরিস্থিত প্রতিবিন্দু বৃত্তের বাহিরে অবস্থিত, সুতরাং, PAQ বৃত্ত-চাপ$<PT+QT$.

আবার, PQ সরল জ্যা-এর P এবং Q ভিন্ন প্রতিটি বিন্দু বৃত্তের মধ্যে অবস্থিত বলিয়া,

PQ-জ্যা$<PAQ$ চাপ।

$\therefore$ PQ-জ্যা$<PAQ$ চাপ$<PT+QT$,

বা, $2PN<2.PA$ চাপ$<2.PT$

অর্থাৎ, $PN<PA$ চাপ$<PT$. ... (1)

কিন্তু, $\sin\theta=\sin\ \widehat{PON}=\dfrac{PN}{OP}$.

$\therefore$ $PN=a\sin\theta$; PA চাপ$=a\theta$.

আবার, $\tan\theta=\tan\ \widehat{PON}=\dfrac{PT}{OP}=\dfrac{PT}{a}$;

$\therefore$ $PT=a\tan\theta$.

সুতরাং, (1) হইতে,

$a\sin\theta<a\theta<a\tan\theta$ অর্থাৎ, $\sin\theta<\theta<\tan\theta$.

A-5. (*i*) $\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)+\cdots+\sin\{\alpha+(n-1)\beta\}$

$$=\frac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\cdot\sin\left(\alpha+\frac{n-1}{2}.\beta\right)$$

(*ii*) $\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+\cdots+\cos\{\alpha+(n-1)\beta\}$

$$=\frac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\cdot\cos\left(\alpha+\frac{n-1}{2}.\beta\right).$$

প্রমাণ : মনে করি,

$$S=\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)+\ldots+\sin\{\alpha+(n-1)\beta\}$$

$$\therefore\ 2S.\sin\frac{\beta}{2}=\left\{2\sin\alpha.\sin\frac{\beta}{2}\right\}+\left\{2\sin(\alpha+\beta).\sin\frac{\beta}{2}\right\}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\left[2\sin\left\{\alpha+(n-1)\beta.\right\}.\sin\frac{\beta}{2}\right]$$

$$=\{\cos(\alpha-\tfrac{1}{2}\beta)-\cos(\alpha+\tfrac{1}{2}\beta)\}$$

$$+\{\cos(\alpha+\tfrac{1}{2}\beta)-\cos(\alpha+\tfrac{3}{2}\beta)\}$$

$$\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots$$

$$\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots$$

$$+\{\cos(\alpha+\tfrac{1}{2}(2n-3)\beta)-\cos(\alpha+\tfrac{1}{2}(2n-1)\beta)\}$$

$$=\cos(\alpha-\tfrac{1}{2}\beta)-\cos\{\alpha+\tfrac{1}{2}(2n-1)\beta\}$$

$$=2\sin\{\alpha+\tfrac{1}{2}(n-1)\beta\}.\sin\frac{n\beta}{2}\text{ ; ইত্যাদি।}$$

(*ii*) ধরা যাক্, প্রদত্ত শ্রেণীর যোগফল S.

এখন, $2\cos\alpha\sin\frac{1}{2}\beta=\sin(\alpha+\frac{1}{2}\beta)-\sin(\alpha-\frac{1}{2}\beta)$

$$2\cos(\alpha+\beta).\sin\tfrac{1}{2}\beta=\sin(\alpha+\tfrac{3}{2}\beta)-\sin(\alpha+\tfrac{1}{2}\beta),$$

$$\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots$$

$$\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots$$

$$2\cos\{\alpha+(n-1)\beta\}.\sin\tfrac{1}{2}\beta$$

$$=\sin\{\alpha+\tfrac{1}{2}(2n-1)\beta\}-\sin\{\alpha+\tfrac{1}{2}(2n-3)\beta\}$$

উভয় পক্ষের অনুরূপ পদগুলি যোগ করিয়া পাই,

$$S.\ 2\sin\tfrac{1}{2}\beta=\sin\{\alpha+\tfrac{1}{2}(2n-1)\beta\}-\sin(\alpha-\tfrac{1}{2}\beta)$$

$$=2\cos\{\alpha+\tfrac{1}{2}(n-1)\beta\}.\sin\frac{n\beta}{2}\text{ ; ইত্যাদি।}$$

A–6. প্রয়োজনীয় ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাত।

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
$0°-0°$	$0-$	$1-$	$0-$
$0°+0°$	$0+$	$1-$	$0+$
$7\frac{1}{2}°$			$(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)$
$15°$	$(\sqrt{3}-1)/2\sqrt{2}$	$(\sqrt{3}+1)/2\sqrt{2}$	$(2-\sqrt{3})$
$18°$	$(\sqrt{5}-1)/4$		
$22\frac{1}{2}°$	$\sqrt{2-\sqrt{2}}/2$	$\sqrt{2+\sqrt{2}}/2$	$(\sqrt{2}-1)$
$30°$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$
$36°$		$(\sqrt{5}+1)/4$	
$37\frac{1}{2}°$			$(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)$
$45°$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1
$52\frac{1}{2}°$			$(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)$
$54°$	$(\sqrt{5}+1)/4$		
$60°$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
$67\frac{1}{2}°$	$\sqrt{2+\sqrt{2}}/2$	$\sqrt{2-\sqrt{2}}/2$	$(\sqrt{2}+1)$
$72°$		$(\sqrt{5}-1)/4$	
$75°$	$(\sqrt{3}+1)/2\sqrt{2}$	$(\sqrt{3}-1)/2\sqrt{2}$	$(2+\sqrt{3})$
$82\frac{1}{2}°$			$(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)$
$90°-0°$	$1-$	$0+$	$+\infty$
$90°+0°$	$1-$	$0-$	$-\infty$

TRIGONOMETRY

উত্তরমালা

প্রশ্নমালা 1 (পৃষ্ঠা—6)

1. $(0{\cdot}6536)^c$, (প্রায়) ; 2. 65° ; 25° ; 3. $(\pi/2)^c$;
5. 30° ; 60° ; 90° ; 6. 60° ; 80° ; 100° ; 120° ;
7. 5 : 4 ; 8. $2(R_1\theta_1 + R_2\theta_2)/(\theta_1 + \theta_2)$;
9. 6087 ফুট (প্রায়) ; 10. $\frac{1}{16}$ মাইল (প্রায়) ;
11. 865, 680 মাইল, (প্রায়) ;
12. $0{\cdot}16$ ইঞ্চি (আসন্ন দুই দশমিক স্থান পর্য্যন্ত) ; 13. $(7\pi/12)^c$;
14. 4 টা $10\frac{10}{11}$ মি. ; 4 টা $32\frac{8}{11}$ মি. ।

প্রশ্নমালা 2 (পৃষ্ঠা —15)

7. $5/14$; 8. $16/63$; 9. (*i*) $-1/\sqrt{5}$; (*ii*) $1/\sqrt{5}$;
10. $\sin\theta = 3/5$; $\sec\theta = -5/4$;
11. (*i*) $\sin\theta = 4/5$; $\tan\theta = -4/3$; (*ii*) $\sin\theta = -4/5$; $\tan\theta = 4/3$;
12. $\pm(3/4)$; $\mp(\sqrt{5}/2)$;
14. $\tan\theta = (a^2 - b^2)/(2ab)$; $\operatorname{cosec}\theta = (a^2 + b^2)/(a^2 - b^2)$;

প্রশ্নমালা 3 (পৃষ্ঠা—28)

1. (*i*) $\frac{1}{2}$, (*ii*) $\frac{1}{2}$, (*iii*) $-\sqrt{3}$, (*iv*) 2, (*v*) $-\sqrt{3}/2$, (*vi*) $\sqrt{3}$, (*vii*) $-2/\sqrt{3}$, (*viii*) -1, (*ix*) $-2/\sqrt{3}$, (*x*) $-\sqrt{3}$, (*xi*) 1, (*xii*) $2/\sqrt{3}$.
2. (*i*) 1 ; (*ii*) 1, (*iii*) $9/2$, (*iv*) $-\sqrt{3}/2$, (*v*) 2, (*vi*) 1, (*vii*) 1,
3. (*i*) $1/2$, (*ii*) $1/2$, (*iii*) 1, (*iv*) ± 2 ; $\pm 2/\sqrt{3}$;
4. -1 ; 5. $-\cot^2\theta$; $-1/3$; 6. $\frac{84}{89}$.
7. (*i*) $\sin 25^\circ$, (*ii*) $\tan 26^\circ$, (*iii*) $-\sec 39^\circ$, (*iv*) $\sec 20^\circ$;
8. (*i*) 300°, (*ii*) 570°, (*iii*) -240°, -120°, 120°, 240° ;
9. (*i*) 30°, 150°, 210°, 330°, (*ii*) 30°, 150°, 180°, (*iii*) 30°, 150° ;
13. -1 ; 15. + চিহ্ন ।

প্রশ্নমালা 4 (পৃষ্ঠা—41)

1. (*i*) 1/2, (*ii*) 1/2, (*iii*) 1 ;
7. (*a*) (*i*) $\frac{63}{65}$, (*ii*) $\frac{56}{65}$; (*b*) (*i*) $\frac{92}{533}$, (*ii*) $\frac{533}{435}$.
8. (*i*) $-\frac{85}{36}$, (*ii*) $\frac{84}{13}$; 9. (*i*) $\frac{4}{5}$, (*ii*) $\frac{117}{125}$;
10. $\frac{16}{65}$; 11. (*i*) 1/2, (*ii*) $\sqrt{3}/2$; 23. $A+B+C=n\pi$;
24. $\cot(A+B+C)=\dfrac{\cot A\cot B\cot C-\cot A-\cot B-\cot C}{\cot B\cot C+\cot C\cot A+\cot A\cot B-1}$

36. $A\neq\cos\beta$ বা, $\sec\beta$.

প্রশ্নমালা 6 (পৃষ্ঠা—59)

3. (*i*) $\dfrac{-7\sqrt{5}}{27}$; (*ii*) $\dfrac{7\sqrt{5}}{27}$;
4. (*i*) 1/5 ; (*ii*) $-1/5$; 9. *a*.

প্রশ্নমালা 7 (পৃষ্ঠা—74)

2. (*i*) $\sqrt{4-2\sqrt{2}}$; (*ii*) $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$;
(*iii*) $\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)\{4-\sqrt{(10+2\sqrt{5})}\}$;
(*iv*) $\frac{1}{8}(\sqrt{3}+1)\sqrt{(5-\sqrt{5})}-\frac{1}{16}(\sqrt{5}+1)(\sqrt{6}-\sqrt{2})$;
(*v*) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{8}$; 7. 2 ;

13. (*i*) $\sec\frac{1}{2}\theta=-13/12$; (*ii*) $\cot\dfrac{\theta}{2}=-12/5$;
14. $1/\sqrt{2}$; 15. $-3/2$: 16. ± এর স্থানে + হইবে ;
17. ± এর স্থানে + হইবে ; 18. $\sqrt{2}+1$;
19. $\sin\frac{1}{2}\theta=-\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin\theta}-\frac{1}{2}\sqrt{1-\sin\theta}$;
20. $\cos\frac{1}{2}\theta=-\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin\theta}+\frac{1}{2}\sqrt{1-\sin\theta}$.

প্রশ্নমালা 9 (পৃষ্ঠা—101)

1. (*i*) $n\pi$; (*ii*) $(2n+1)\pi/4$: (*iii*) $n\pi\pm\pi/4$; (*iv*) $n\pi\pm\pi/3$;
(*v*) $n\pi\pm\pi/4$; (*vi*) $n\pi+\pi/4$; (*vii*) $\frac{1}{2}n\pi+\pi/8$;
(*viii*) $\frac{1}{2}n\pi+(-1)^n\pi/12$; (*ix*) $n\pi-\pi/4$; $2n\pi\pm\alpha-\pi/4$;
$\cos\alpha=(\sqrt{10}-\sqrt{2})/4$; (*x*) $\frac{1}{2}n\pi+\frac{1}{2}\alpha$; $\tan\alpha=2$

(*xi*) $(2n+1)\pi/10$, $\frac{1}{2}n\pi \pm \pi/12$, (*xii*) $\frac{1}{3}n\pi$; $n\pi \pm \pi/6$;

(*xiii*) $(2n+1)\pi/2$; $(4n+1)\pi/14$, $(4n-1)\pi/6$,

(*xiv*) $2n\pi$; $2n\pi/3+\pi/6$; (*xv*) $n\pi/4$, $n\pi \pm \pi/3$; (*xvi*) $n\pi/8$; $n\pi/4 \pm \pi/24$; (*xvii*) $2n\pi \pm 2\pi/3$; (*xviii*) $n\pi+\pi/12$; $n\pi+5\pi/12$: (*xix*) $\frac{1}{3}n\pi$; (*xx*) $n\pi/3$;

(*xxi*) $n\pi \pm \pi/6$; (*xxii*) $2n\pi+\pi/12$, $2n\pi+7\pi/12$,

(*xxiii*) $-3\pi/2$, $-\pi/6$, $\pi/2$, $11\pi/6$;

(*xxiv*) $2n\pi+\pi/2$, $2n\pi-\pi/2+\beta$, $\sin\beta=4/5$, $\cos\beta=3/5$.

(*xxv*) $2n\pi+\pi/6$; (*xxvi*) $2n\pi$; (*xxvii*) $2n\pi+\pi/2$;

(*xxviii*) $2n\pi+\pi/2$, $2n\pi+3\pi/4$; $2n\pi-\pi/4$;

(*xxix*) $2n\pi+\pi/2$; $2n\pi-2\alpha$; $2n\pi-2\beta$; $\tan\alpha=2$; $\tan\beta=3$.

2. $0°$; $120°$; $360°$; **3.** $15°$; $105°$; $375°$; $465°$;

4. $30°, 150°, 210°, 330°$; **5.** $135°, 315°$;

6. $90°, 450°, 810°$; **7.** $90°, 337° 23'$;

8. $-\pi/3, \pi/2, -\pi/4, \pi/4$; **9.** $0°, 30°, 60°, 120°, 150°, 180°$;

10. $30°, 150°$; **11.** $\pi/6, 2\pi/3, 5\pi/6$,

12. $0°, 30°, 150°, 360°$; **13.** $3\pi/4, 7\pi/4, \pi/6, 5\pi/6$;

15. (*i*) $\alpha=(4m+1)\pi/4+n\pi/2$; $\beta=(4m+1)\pi/4-n\pi/2$;

(*ii*) $\alpha=(4m+1)\pi/4+n\pi$; $\beta=(4m+1)\pi/4-n\pi$.

প্রশ্নমালা 10 (পৃষ্ঠা—118)

1. (i) $\pi/2$; (ii) 0 ; (iii) $\pi/6$; (iv) 0 ;
(v) $\pi/6$ (vi) $\pi/3$; (vii) $2\pi/3$; (viii) $-\pi/4$;
(ix) $-\pi/6$; (x) $3\pi/4$.

2. (i) $n\pi+(-1)^n\pi/6$; (ii) $n\pi+(-1)^{n+1}\,.\,\pi/3$;
(iii) $(2n+1)\pi/2$; (iv) $2n\pi \pm 2\pi/3$; (v) $n\pi-\pi/4$;
(vi) $n\pi+\pi/3$; (vii) $n\pi+\pi/6$; (viii) $2n\pi \pm \pi/3$;
(ix) $n\pi+(-1)^{n+1}\pi/6$; (x) $2n\pi \pm 3\pi/4$.

3. (i) ঠিক আছে (ii) ঠিক আছে (iii) ঠিক আছে
(iv) ঠিক আছে (v) ঠিক আছে (vi) ঠিক আছে
(vii) ঠিক আছে (viii) ঠিক আছে (ix) ঠিক নাই
সঠিক উত্তরটি : 60° (x) ঠিক নাই ; সঠিক উত্তরটি 120°.

4. (i) 1 (ii) $-1/\sqrt{3}$ (iii) π^{c} (iv) $-\pi/2$.

7. (i) ± 1 (ii) $\pm 1/\sqrt{3}$ (iii) 1/2 (iv) ± 1
(v) 1/6 (vi) $\pm\sqrt{5}/3$ (vii) 3
(viii) $(2-\sqrt{3})$; $-(2+\sqrt{3})$ (ix) 1/2 (x) 13
(xi) $\pm\sqrt{2}$ (xii) 1 (xiii) 1/2 (xiv) $2\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$
(xv) $1/\sqrt{3}$ (xvi) $(2-\sqrt{3})$; $-(2+\sqrt{3})$.

প্রশ্নমালা 11 (পৃষ্ঠা—137)

19. $A=30^\circ$ $B=120^\circ$ $C=30^\circ$

20. $(1+\sqrt{5})/2$ 21. $A=90^\circ$ $B=30^\circ$ $C=60^\circ$

23. $\cos A=3/4$ $\cos B=9/16$ $\cos C=1/8$

28. 60° 32. 84 বর্গ একক

33. $\sqrt{(y/z+z/x+x/y)}$.

37. $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)}$.

প্রশ্নমালা 12 (পৃষ্ঠা—146)

15. $r_1=10{\cdot}5$ সে.মি. $r_2=12$ সে.মি.
$r_3=14$ সে.মি. $r=4$ সে.মি.
$R=65/8$ সে.মি. 16. 7 : 2.

প্রশ্নমালা 13 (পৃষ্ঠা—154)

1. (i) 0·81463 (ii) 0·57999 (iii) 1·02769
(iv) 0·97300 (v) 10·08287 (vi) 10·19588

2. 1·08724 3. 0·66583

4. 4·1203060 5. 32°16′21″ (প্রায়)

6. 13° 47′ 2·2″ (প্রায়) 7. 0·2394

8. (i) 10·11972 (ii) 10·20379

9. $\bar{1}{\cdot}9031084$.

প্রশ্নমালা 14 (পৃষ্ঠা—158)

1. $\sqrt{3}-1 : \sqrt{6} : \sqrt{3}+1$

3. 10 সে.মি. ; $10\sqrt{2}$ সে.মি. ; $5(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ সে.মি.

4. 0·47 মি. ; 0·71 মি. ; 0·82 মি.

5. $90°$ 6. $90°$ 7. $77° 19' 10''·6$ (প্রায়)

8. $104° 28' 39''$ (প্রায়) 9. $35° 5' 48''·5$ (প্রায়)

10. $113° 34' 49''·8$ (প্রায়) 11. (i) $B=55° 46' 16''·14$ (প্রায়)
(ii) $A=41° 24' 34''·62$ (প্রায়) ; $C=82^2 49' 9''·24$.

12. $132° 34' 32''·18$ (প্রায়) 13. $A=120^2$,
$B=38° 12' 47''·7$ (প্রায়), $C=21° 47°' 12''·3$ (প্রায়).

14. $a:b:c=5:4:3$;
মধ্যম কোণটি $=B=2\tan^{-1}(1/2)$; $A=90°$; $C=2\tan^{-1}(1/3)$.

প্রশ্নমালা 15 (পৃষ্ঠা—163)

1. $c=89·896$ সে.মি. (প্রায়) 2. $b=27·03752$ একক (প্রায়)

3 $a=7·69862233$ একক (প্রায়) 4. $a=1$

5. $B=70° 53' 36''$, $C=49°6' 24''$.

6. $B=69° 49' 35''·16$, $C=50° 10' 24''·84$.

7. $B=76° 47' 2''·2$, $C=49° 12' 57''·8$.

8. $B=97° 13'$, $C=35°29'$.

9. $C=34°51'$.

10. $A=94° 42' 54''·03$, $B=25° 17' 5''·97$.

প্রশ্নমালা 16 (পৃষ্ঠা—167)

1. (i) $A=120°$, $C=30°$, $a=6\sqrt{3}$ সে.মি.
(ii) $A=60°$, $C=60°$, $a=5$ মি.
(iii) $A=90°$, $C=45°$, $a=4\sqrt{2}$ মি.

2. $A=100° 33° 0''·36$ $C=34°26' 59''·64$

3. $A=57° 30' 11''·79$, অথবা, $122° 29' 48''·21$.

4. (i) $A=105°$, $C=45°$ $a=50(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ মি.

(ii) $A=15°$, $C=135°$, $a=50(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ মি.

প্রশ্নমালা 17 (পৃষ্ঠা– 173)

1. $5(3+\sqrt{3})$ মি.
2. $266\frac{2}{3}$ মি.
3. 1·3 কিলোমিটার
4. $\frac{1}{2}a\sqrt{6}$ ফুট
5. $250\sqrt{2}$ গজ
6. $\frac{1}{3}500\sqrt{6}$ ফুট
8. $20(3+\sqrt{3})$ ফুট
9. $\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)$ মাইল
10. $63° 26'' 5''. 3$
11. 1440 মিটার
12. (i) নির্ণেয় দৈর্ঘ্য $=120$ ফুট, (ii) $40\sqrt{3}$ ফুট, $30°$,
13. $AB=20(2+\sqrt{3})$ মি. $BC=40(3+\sqrt{3})$ মি.
14. 866 মি., $AC=366$ মি.
15. $h \cot \alpha \cot \beta$,
16, $r \sin \beta \operatorname{cosec} \frac{1}{2}\alpha$.
17. উচ্চতা $=\frac{1}{2}\times 25\sqrt{7}$ ফুট, $CD=\frac{1}{2}\times 35$ ফুট,

$$\theta=\sin^{-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

21. $h \tan \beta/(\tan \beta-\tan \alpha)$ ফুট
22. $\sin \alpha \sin \beta/\sin(\alpha+\beta)$ মাইল
24. $1\frac{1}{2}$ মিনিট
25. $16\sqrt{3}$ কিলোমিটার প্রতি ঘণ্টায়

প্রশ্নমালা 18 (পৃষ্ঠা– 193)

1, $\sin 162°=0·31$ (প্রায়), $\sin 240°=-0·87$ (প্রায়)
2. $\cos 120°=-0·50$ (প্রায়) $\cos 144°=-0·81$ (প্রায়)
3. $\pi/4$, $-3\pi/4$
4, $\sin(-270°)=+1$, $\sin 150°=0·5$
6. $x=45$
7. 5;
10. $x=38°$ (প্রায়), প্রকৃতপক্ষে, $x=38° 10'·4$
11. $66° 47'$ (প্রায়), অর্থাৎ, 1·1656 রেডিয়ান (প্রায়)
12. $-\pi/6$, $\pi/6$, $5\pi/6$, $7\pi/6$.

DIFFERENT TABLES

TABLE 1

LOGARITHMS OF NUMBERS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences 1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	00000	00432	00860	01284	01703						42	85	127	170	212	254	297	339	381
						02119	02531	02933	03342	03743	40	81	121	162	202	242	283	323	364
11	04139	04532	04922	05308	05690						37	77	116	154	193	232	270	309	348
						06070	06446	06819	07188	07555	37	74	111	148	185	222	259	296	333
12	07918	08279	08636	08991	09342						36	71	106	142	177	213	248	284	319
						09691	10037	10380	10721	11059	34	68	102	136	170	204	238	272	307
13	11394	11727	12057	12385	12710						33	66	98	131	164	197	229	262	295
						13033	13354	13672	13988	14301	32	63	95	126	158	190	221	253	284
14	14613	14922	15229	15534	15836						30	61	91	122	152	183	213	244	274
						16137	16435	16732	17026	17319	29	59	88	118	147	177	206	236	265
15	17609	17898	18184	18469	18752						28	57	85	114	142	171	199	228	256
						19033	19312	19590	19866	20140	28	55	83	110	138	165	193	221	248
16	20412	20683	20951	21219	21484						27	53	80	107	134	160	187	214	240
						21748	22011	22272	22531	22789	26	52	78	104	130	156	182	208	233
17	23045	23300	23553	23805	24055						26	50	76	101	126	151	176	201	227
						24304	24551	24797	25042	25285	25	49	73	98	122	147	171	196	220
18	25527	25768	26007	26245	26482						24	48	71	95	119	143	167	190	214
						26717	26951	27184	27416	27646	23	46	69	93	116	139	162	185	208
19	27875	28103	28330	28556	28780						23	45	68	90	113	135	158	180	203
						29003	29226	29447	29667	29885	22	44	66	88	110	132	154	176	198

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
20	30103	30320	30535	30750	30963	31175	31387	31597	31806	32015	21	43	64	85	106	127	148	170	190
21	32222	32428	32634	32838	33041	33244	33445	33646	33846	34044	20	40	60	80	100	120	140	160	180
22	34242	34439	34635	34830	35025	35218	35411	35603	35793	35984	20	39	58	77	97	116	135	154	174
23	36173	36361	36549	36736	36922	37107	37291	37475	37658	37840	19	37	56	74	93	111	130	148	167
24	38021	38202	38382	38561	38739	38917	39094	39270	39445	39620	18	35	53	71	89	106	124	142	159
25	39794	39967	40140	40312	40483	40654	40824	40993	41162	41330	17	34	51	68	85	102	119	136	153
26	41497	41664	41830	41996	42160	42325	42488	42651	42813	42975	16	33	49	66	82	98	115	131	148
27	43136	43297	43457	43616	43775	43933	44091	44248	44404	44560	16	32	47	63	79	95	111	126	142
28	44716	44871	45025	45179	45332	45484	45637	45788	45939	46090	15	30	46	61	76	91	107	122	137
29	46240	46389	46538	46687	46835	46982	47129	47276	47422	47567	15	29	44	59	74	88	103	118	132
30	47712	47857	48001	48144	48287	48430	48572	48714	48855	48996	14	29	43	57	72	86	100	114	129
31	49136	49276	49415	49554	49693	49831	49969	50106	50243	50379	14	28	41	55	69	83	97	110	124
32	50515	50650	50786	50920	51054	51188	51322	51455	51587	51720	13	27	40	54	67	80	94	107	121
33	51851	51983	52114	52244	52375	52504	52634	52763	52892	53020	13	26	39	52	65	78	91	104	117
34	53148	53275	53403	53529	53656	53782	53908	54033	54158	54283	13	25	38	50	63	76	88	101	113
35	54407	54531	54654	54777	54900	55023	55145	55267	55388	55509	12	24	37	49	61	73	85	98	110
36	55630	55751	55871	55991	56110	56229	56348	56467	56585	56703	12	24	36	48	60	71	83	95	107
37	56820	56937	57054	57171	57287	57403	57519	57634	57749	57864	12	23	35	46	58	70	81	93	104
38	57978	58092	58206	58320	58433	58546	58659	58771	58883	58995	11	23	34	45	57	68	79	90	102
39	59106	59218	59329	59439	59550	59660	59770	59879	59988	60097	11	22	33	44	55	66	77	88	99
40	60206	60314	60423	60531	60638	60746	60853	60959	61066	61172	11	22	33	44	55	66	77	88	99
41	61278	61384	61490	61595	61700	61805	61909	62014	62118	62221	10	21	31	42	53	63	74	84	95
42	62325	62428	62531	62634	62737	62839	62941	63043	63144	63246	10	20	31	41	51	61	71	82	92
43	63347	63448	63548	63649	63749	63849	63949	64048	64147	64246	10	20	30	40	50	60	70	80	90
44	64345	64444	64542	64640	64738	64836	64933	65031	65128	65225	10	20	29	39	49	59	68	78	88
45	65321	65418	65514	65610	65706	65801	65896	65992	66087	66181	10	19	29	38	48	57	67	76	86
46	66276	66370	66464	66558	66652	66745	66839	66932	67025	67117	9	19	28	37	47	56	65	74	84
47	67210	67302	67394	67486	67578	67669	67761	67852	67943	68034	9	18	27	36	46	55	64	73	82
48	68124	68215	68305	68395	68485	68574	68664	68753	68842	68931	9	18	27	36	45	53	63	72	81
49	69020	69108	69197	69285	69373	69461	69548	69636	69723	69810	9	18	26	35	44	53	62	70	79

TABLE I

LOGARITHMS OF NUMBERS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences 1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	69897	69984	70070	70157	70243	70329	70415	70501	70586	70672	9	17	26	34	43	52	60	69	77
51	70757	70842	70927	71012	71096	71181	71265	71349	71433	71517	8	17	25	34	42	50	59	67	76
52	71600	71684	71767	71850	71933	72016	72099	72181	72263	72346	8	17	25	33	42	50	58	66	75
53	72428	72509	72591	72673	72754	72835	72916	72997	73078	73159	8	16	24	32	41	49	57	65	73
54	73239	73320	73400	73480	73560	73640	73719	73799	73878	73957	8	16	24	32	40	48	56	64	72
55	74036	74115	74194	74273	74351	74429	74507	74586	74663	74741	8	16	23	31	39	47	55	63	70
56	74819	74896	74974	75051	75128	75205	75282	75358	75435	75511	8	15	23	31	39	46	54	62	69
57	75587	75664	75740	75815	75891	75967	76042	76118	76193	76268	8	15	23	30	38	45	53	60	68
58	76343	76418	76492	76567	76641	76716	76790	76864	76938	77012	7	15	22	30	37	44	52	59	67
59	77085	77159	77232	77305	77379	77452	77525	77597	77670	77743	7	15	22	29	37	44	51	58	66
60	77815	77887	77960	78032	78104	78176	78247	78319	78390	78462	7	14	22	29	36	43	50	58	65
61	78533	78604	78675	78746	78817	78888	78958	79029	79099	79169	7	14	21	28	36	43	50	57	64
62	79239	79309	79379	79449	79518	79588	79657	79727	79796	79865	7	14	21	28	35	41	48	55	62
63	79934	80003	80072	80140	80209	80277	80346	80414	80482	80550	7	14	20	27	34	41	48	54	61
64	80618	80686	80754	80821	80889	80956	81023	81090	81158	81224	7	13	20	27	34	40	47	54	60
65	81291	81358	81425	81491	81558	81624	81690	81757	81823	81889	7	13	20	26	33	40	46	53	59
66	81954	82020	82086	82151	82217	82282	82347	82413	82478	82543	7	13	20	26	33	39	46	52	59
67	82607	82672	82737	82802	82866	82930	82995	83059	83123	83187	6	13	19	26	32	38	45	51	58
68	83251	83315	83378	83442	83506	83569	83632	83696	83759	83822	6	13	19	25	32	38	44	50	57
69	83885	83948	84011	84073	84136	84198	84261	84323	84386	84448	6	12	19	25	31	37	43	50	56
70	84510	84572	84634	84696	84757	84819	84880	84942	85003	85065	6	12	19	25	31	37	43	50	56
71	85126	85187	85248	85309	85370	85431	85491	85552	85612	85673	6	12	18	24	31	37	43	49	55
72	85733	85794	85854	85914	85974	86034	86094	86153	86213	86273	6	12	18	24	30	36	42	48	54
73	86332	86392	86451	86510	86570	86629	86688	86747	86806	86864	6	12	18	24	30	35	41	47	53
74	86923	86982	87040	87099	87157	87216	87274	87332	87390	87448	6	12	17	23	29	35	41	46	52

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
75	87506	87564	87622	87679	87737	87795	87852	87910	87967	88024	6	12	17	23	29	35	41	46	52
76	88081	88138	88195	88252	88309	88366	88423	88480	88536	88593	6	11	17	23	29	34	40	46	51
77	88649	88705	88762	88818	88874	88930	88986	89042	89098	89154	6	11	17	22	28	34	39	45	50
78	89209	89265	89321	89376	89432	89487	89542	89597	89653	89708	6	11	17	22	28	33	39	44	50
79	89763	89818	89873	89927	89982	90037	90091	90146	90200	90255	6	11	17	22	28	33	39	44	50
80	90309	90363	90417	90472	90526	90580	90634	90687	90741	90795	5	11	16	22	27	32	38	43	49
81	90848	90902	90956	91009	91062	91116	91169	91222	91275	91328	5	11	16	21	27	32	37	42	48
82	91381	91434	91487	91540	91593	91645	91698	91751	91803	91855	5	11	16	21	27	32	37	42	48
83	91908	91960	92012	92064	92117	92169	92221	92273	92324	92376	5	10	16	21	26	31	36	42	47
84	92428	92480	92531	92583	92634	92686	92737	92788	92840	92891	5	10	15	20	26	31	36	42	47
85	92942	92993	93044	93095	93146	93197	93247	93298	93349	93399	5	10	15	20	26	31	36	41	46
86	93450	93500	93551	93601	93651	93702	93752	93802	93832	93902	5	10	15	20	25	30	35	40	45
87	93952	94002	94052	94101	94151	94201	94250	94300	94349	94399	5	10	15	20	25	30	35	40	45
88	94448	94498	94547	94596	94645	94694	94743	94792	94841	94890	5	10	15	20	25	29	34	39	44
89	94939	94988	95036	95085	95134	95182	95231	95279	95328	95376	5	10	15	19	24	29	34	39	44
90	95424	95472	95521	95569	95617	95665	95713	95761	95809	95856	5	10	14	19	24	29	34	38	43
91	95904	95952	95999	96047	96095	96142	96190	96237	96284	96332	5	9	14	19	24	28	33	38	42
92	96379	96426	96473	96520	96567	96614	96661	96708	96755	96802	5	9	14	19	24	28	33	38	42
93	96848	96895	96942	96988	97035	97081	97128	97174	97220	97267	5	9	14	18	23	28	32	38	42
94	97313	97359	97405	97451	97497	97543	97589	97635	97681	97727	5	9	14	18	23	28	32	37	42
95	97772	97818	97864	97909	97955	98000	98046	98091	98137	98182	5	9	14	18	23	27	32	36	41
96	98227	98272	98318	98363	98408	98453	98498	98543	98588	98632	5	9	14	18	23	27	32	36	41
97	98677	98722	98767	98811	98856	98900	98945	98989	99034	99078	4	9	13	18	22	27	31	36	40
98	99123	99167	99211	99255	99300	99344	99388	99432	99476	99520	4	9	13	18	22	26	31	35	40
99	99564	99607	99651	99695	99739	99782	99826	99870	99913	99957	4	9	13	17	22	26	31	35	39
100	00000	00043	00087	00130	00173	00217	00260	00303	00346	00389	4	9	13	17	22	25	30	34	38

TABLE II

ANTILOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean differences 1	2	3	4	5	6	7	8	9
·00	10000	10023	10046	10069	10093	10116	10139	10162	10186	10209	2	5	7	9	12	14	16	19	21
·01	10233	10257	10280	10304	10328	10351	10375	10399	10423	10447	2	5	7	10	12	14	17	19	21
·02	10471	10495	10520	10544	10568	10593	10617	10641	10666	10691	2	5	7	10	12	15	17	20	22
·03	10715	10740	10765	10789	10814	10839	10864	10889	10914	10940	3	5	8	10	13	15	18	20	23
·04	10965	10990	11015	11041	11066	11092	11117	11143	11169	11194	3	5	8	10	13	15	18	20	23
·05	11220	11246	11272	11298	11324	11350	11376	11402	11429	11455	3	5	8	11	13	16	18	21	24
·06	11482	11508	11535	11561	11588	11614	11641	11668	11695	11722	3	5	8	11	13	16	19	21	24
·07	11749	11776	11803	11830	11858	11885	11912	11940	11967	11995	3	5	8	11	14	16	19	22	25
·08	12023	12050	12078	12106	12134	12162	12190	12218	12246	12274	3	6	8	11	14	17	20	22	25
·09	12303	12331	12359	12388	12417	12445	12474	12503	12531	12560	3	6	9	11	14	17	20	23	26
·10	12589	12618	12647	12677	12706	12735	12764	12794	12823	12853	3	6	9	12	15	18	21	24	26
·11	12882	12912	12942	12972	13002	13032	13062	13092	13122	13152	3	6	9	12	15	18	21	24	27
·12	13183	13213	13243	13274	13305	13335	13366	13397	13428	13459	3	6	9	12	15	18	21	25	28
·13	13490	13521	13552	13583	13614	13646	13677	13709	13740	13772	3	6	9	13	16	19	22	25	28
·14	13804	13836	13868	13900	13932	13964	13996	14028	14060	14093	3	6	10	13	16	19	22	26	29
·15	14125	14158	14191	14223	14256	14289	14322	14355	14388	14421	3	7	10	13	16	20	23	26	30
·16	14454	14488	14521	14555	14588	14622	14655	14689	14723	14757	3	7	10	13	17	20	24	27	30
·17	14791	14825	14859	14894	14928	14962	14997	15031	15066	15101	3	7	10	14	17	21	24	28	31
·18	15136	15171	15205	15241	15276	15311	15346	15382	15417	15453	4	7	11	14	18	21	25	28	32
·19	15488	15524	15560	15596	15631	15668	15704	15740	15776	15812	4	7	11	14	18	22	25	29	32
·20	15849	15885	15922	15959	15996	16032	16069	16106	16144	16181	4	7	11	15	18	22	26	30	33
·21	16218	16255	16293	16331	16368	16406	16444	16482	16520	16558	4	8	11	15	19	23	26	30	34
·22	16596	16634	16672	16711	16749	16788	16827	16866	16904	16943	4	8	12	15	19	23	27	31	35
·23	16982	17022	17061	17100	17140	17179	17219	17258	17298	17338	4	8	12	16	20	24	28	32	36
·24	17378	17418	17458	17498	17539	17579	17620	17660	17701	17742	4	8	12	16	20	24	28	32	36

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.25	17788	17824	17865	17906	17947	17989	18030	18072	18113	18155	4	8	12	17	21	25	29	33	37
.26	18197	18239	18281	18323	18365	18408	18450	18493	18535	18578	4	8	13	17	21	25	30	34	38
.27	18621	18664	18707	18750	18793	18836	18880	18923	18967	19011	4	9	13	17	22	26	30	35	39
.28	19055	19099	19143	19187	19231	19275	19320	19364	19409	19454	4	9	13	18	22	26	31	35	40
.29	19498	19543	19588	19634	19679	19724	19770	19815	19861	19907	5	9	14	18	23	27	32	36	41
.30	19953	19999	20045	20091	20137	20184	20230	20277	20324	20370	5	9	14	19	23	28	32	37	42
.31	20417	20464	20512	20559	20606	20654	20701	20749	20797	20845	5	10	14	19	24	29	33	38	43
.32	20893	20941	20989	21038	21086	21135	21184	21232	21281	21330	5	10	15	19	24	29	34	39	44
.33	21380	21429	21478	21528	21577	21627	21677	21727	21777	21827	5	10	15	20	25	30	35	40	45
.34	21878	21928	21979	22029	22080	22131	22182	22233	22284	22336	5	10	15	20	25	31	36	41	46
.35	22387	22439	22491	22542	22594	22646	22699	22751	22803	22856	5	10	16	21	26	31	37	42	47
.36	22909	22961	23014	23067	23121	23174	23227	23281	23336	23388	5	11	16	21	27	32	37	43	48
.37	23442	23496	23550	23605	23659	23714	23768	23823	23878	23933	5	11	16	22	27	33	38	44	49
.38	23988	24044	24099	24155	24210	24266	24322	24378	24434	24491	6	11	17	22	28	34	39	45	50
.39	24547	24604	24660	24717	24774	24831	24889	24946	25003	25061	6	11	17	23	29	34	40	46	51
.40	25119	25177	25236	25293	25351	25410	25468	25527	25586	25645	6	12	18	23	29	35	41	47	53
.41	25704	25763	25823	25882	25942	26002	26062	26122	26182	26242	6	12	18	24	30	36	42	48	54
.42	26303	26363	26424	26485	26546	26607	26669	26730	26792	26853	6	12	18	24	31	37	43	49	55
.43	26915	26977	27040	27102	27164	27227	27290	27353	27416	27479	6	13	19	25	31	38	44	50	56
.44	27542	27606	27669	27733	27797	27861	27925	27990	28054	28119	6	13	19	26	32	59	45	51	58
.45	28184	28249	28314	28379	28445	28510	28576	28642	28708	28774	7	13	20	26	33	39	46	52	59
.46	28840	28907	28973	29040	29107	29174	29242	29309	29376	29444	7	13	20	27	34	40	47	54	60
.47	29512	29580	29648	29717	29785	29854	29923	29992	30061	30130	7	14	21	28	34	41	48	55	62
.48	30200	30269	30339	30409	30479	30549	30620	30690	30761	30832	7	14	21	28	35	42	49	56	63
.49	30903	30974	31046	31117	31189	31261	31333	31405	31477	31550	7	14	22	29	36	43	50	58	65

TABLE II

ANTILOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean differences 1	2	3	4	5	6	7	8	9
·50	31623	31696	31769	31842	31916	31989	32063	32137	32211	32285	7	15	22	29	37	44	52	59	66
·51	32359	32434	32509	32584	32659	32735	32809	32885	32961	33037	8	15	23	30	38	45	53	60	68
·52	33113	33189	33266	33343	33420	33497	33574	33651	33729	33806	8	15	23	31	39	46	54	62	69
·53	33884	33963	34041	34119	34198	34277	34356	34435	34514	34594	8	16	24	32	40	47	55	63	71
·54	34674	34754	34834	34914	34995	35075	35156	35237	35318	35400	8	16	24	32	40	48	56	65	73
·55	35481	35563	35645	35727	35810	35892	35975	36058	36141	36224	8	16	25	33	41	50	58	66	74
·56	36308	36392	36475	36559	36644	36728	36813	36898	36983	37068	8	17	25	34	42	51	59	68	76
·57	37154	37239	37325	37411	37497	37584	37670	37757	37844	37931	9	17	26	35	43	52	61	69	78
·58	38019	38107	38194	38282	38371	38459	38548	38637	38726	38815	9	18	27	35	44	53	62	71	80
·59	38905	38994	39084	39174	39264	39355	39446	39537	39628	39719	9	18	27	36	45	54	63	72	82
·60	39811	39902	39994	40087	40179	40272	40365	40458	40551	40644	9	19	28	37	46	56	65	74	83
·61	40738	40832	40926	41020	41115	41210	41305	41400	41495	41591	9	19	28	38	47	57	66	76	85
·62	41687	41783	41879	41976	42073	42170	42267	42364	42462	42560	10	19	29	39	49	58	68	78	87
·63	42658	42756	42855	42954	43053	43152	43251	43351	43451	43551	10	20	30	40	50	60	70	80	89
·64	43652	43752	43853	43954	44055	44157	44259	44361	44463	44566	10	20	30	41	51	61	71	81	91
·65	44668	44771	44875	44978	45082	45186	45290	45394	45499	45604	10	21	31	42	52	62	73	83	94
·66	45709	45814	45920	46026	46132	46238	46345	46452	46559	46666	11	21	32	43	53	64	75	85	96
·67	46774	46881	46989	47098	47206	47315	47424	47534	47643	47753	11	22	33	44	54	65	76	87	98
·68	47863	47973	48084	48195	48306	48417	48529	48641	48753	48865	11	22	33	45	56	67	78	89	100
·69	48978	49091	49204	49317	49431	49545	49659	49774	49888	50003	11	23	34	46	57	68	80	91	103
·70	50119	50234	50350	50466	50582	50699	50816	50933	51050	51168	12	23	35	47	58	70	82	93	105
·71	51286	51404	51523	51642	51761	51880	52000	52119	52240	52360	12	24	36	48	60	72	84	96	108
·72	52481	52602	52723	52845	52966	53088	53211	53333	53456	53580	12	24	37	49	61	73	85	98	110
·73	53703	53827	53951	54075	54200	54325	54450	54576	54702	54828	13	25	38	50	63	75	88	100	113
·74	54954	55081	55208	55336	55463	55590	55719	55847	55976	56105	13	26	38	51	64	77	90	102	115

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·75	56234	56364	56494	56624	56754	56885	57016	57148	57280	57412	13	26	39	52	66	79	92	105	118
·76	57544	57677	57810	57943	58076	58210	58345	58479	58614	58749	13	27	40	54	67	80	94	101	121
·77	58884	59020	59156	59293	59429	59566	59704	59841	59979	60117	14	27	41	55	69	82	96	110	123
·78	60256	60395	60534	60674	60814	60954	61094	61235	61376	61518	14	28	42	56	70	84	98	112	126
·79	61659	61802	61944	62087	62230	62373	62517	62661	62806	62951	14	29	43	58	72	86	101	115	130
·80	63096	63241	63387	63533	63680	63826	63973	64121	64269	64417	15	29	44	59	74	88	103	118	132
·81	64565	64714	64863	65013	65163	65313	65464	65615	65766	65917	15	30	45	60	75	90	105	120	135
·82	66069	66222	66374	66527	66681	66834	66988	67143	67298	67453	15	31	46	62	77	92	108	123	139
·83	67608	67764	67920	68077	68234	68391	68549	68707	68865	69024	16	32	47	63	79	95	110	126	142
·84	69183	69343	69503	69663	69823	69984	70146	70307	70469	70632	16	32	48	64	81	97	113	129	145
·85	70795	70958	71121	71285	71450	71614	71779	71945	72111	72277	17	33	50	66	83	99	116	132	149
·86	72444	72611	72778	72946	73114	73282	73451	73621	73790	73961	17	34	51	68	85	101	118	135	152
·87	74131	74302	74473	74645	74817	74989	75162	75336	75509	75683	17	35	52	69	87	104	121	138	156
·88	75858	76033	76208	76384	76560	76736	76913	77090	77268	77446	18	35	53	71	89	107	125	142	159
·89	77625	77804	77983	78163	78343	78524	78705	78886	79068	79250	18	36	54	72	91	109	127	145	163
·90	79433	79616	79799	79983	80168	80353	80538	80724	80910	81096	19	37	56	74	93	111	130	148	167
·91	81283	81470	81658	81846	82035	82224	82414	82604	82794	82985	19	38	57	76	95	113	132	151	170
·92	83176	83368	83560	83753	83946	84140	84333	84528	84723	84918	19	39	58	78	97	116	136	155	175
·93	85114	85310	85507	85704	85901	86099	86298	86497	86696	86896	20	40	60	79	99	119	139	158	178
·94	87096	87297	87498	87700	87902	88105	88308	88512	88716	88920	20	41	61	81	102	122	142	162	183
·95	89125	89331	89536	89743	89950	90157	90365	90573	90782	90991	21	42	62	83	104	125	146	166	187
·96	91201	91411	91622	91833	92045	92257	92470	92683	92897	93111	21	42	64	85	106	127	149	170	191
·97	93325	93541	93756	93972	94189	94406	94624	94842	95060	95280	22	43	65	87	109	130	152	174	195
·98	95499	95719	95940	96161	96383	96605	96828	97051	97275	97499	22	44	67	89	111	133	155	178	200
·99	97724	97949	98175	98401	98628	98855	99083	99312	99541	99770	23	46	68	91	114	137	160	182	205

TABLE III
NATURAL SINES

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
0°	0·00000	0·00291	0·00582	0·00873	0·00164	0·01454	0·01745	89°	29	58	87	116	145	175	204	233	262
1°	·01745	·02036	·02327	·02618	·02908	·03199	·03490	88°	29	58	87	116	145	175	204	233	262
2°	·03490	·03781	·04071	·04362	·04653	·04943	·05234	87°	29	58	87	116	145	175	204	233	262
3°	·05234	·05524	·05814	·06105	·06395	·06685	·06976	86°	29	58	87	116	145	174	203	232	261
4°	·06976	·07266	·07556	·07846	·08136	·08426	·08716	85°	29	58	87	116	145	174	203	232	261
5°	0·08716	0·09005	0·09395	0·09585	0·09874	0·01164	0·10453	84°	29	58	87	116	145	174	203	232	261
6°	·10453	·10742	·11031	·11320	·11609	·11898	·12187	83°	29	58	87	116	145	174	203	232	261
7°	·12187	·12476	·12764	·13053	·13341	·13629	·13917	82°	29	58	87	116	145	173	202	231	260
8°	·13917	·14205	·14493	·14781	·15069	·15356	·15643	81°	29	58	86	115	144	173	202	230	259
9°	·15643	·15931	·16218	·16505	·16792	·17078	·17365	80°	29	57	86	115	144	172	201	230	258
10°	0·17365	0·27651	0·17937	0·18224	0·18509	0·18795	0·19081	79°	29	57	86	117	144	172	201	229	258
11°	·19081	·19366	·19652	·19937	·20222	·20507	·20791	78°	29	57	86	114	143	171	200	229	257
12°	·20791	·21076	·21360	·21644	·21928	·22212	·22495	77°	28	57	85	114	142	170	199	227	256
13°	·22495	·22778	·23062	·23345	·23627	·23910	·24192	76°	28	57	85	113	141	170	198	226	255
14°	·24192	·24474	·24756	·25038	·25332	·25601	·25882	75°	28	56	85	113	141	169	197	226	254
15°	0·25882	0·26163	0·26443	0·26724	0·27004	0·27284	0·27564	74°	28	56	84	112	140	168	196	224	252
16°	.27564	·27843	·28123	·28402	·28680′	·28959	·29237	73°	28	56	84	112	140	167	195	223	251
17°	·29237	·29515	·29793	·30071	·30348	·30625	·30902	72°	28	56	83	111	139	166	194	222	250
18°	·30902	·31178	·31454	·31730	·32006	·32282	·32557	71°	28	55	83	110	138	166	193	221	248
19°	·32557	·32832	·33106	·33381	·33655	·33929	·34202	70°	27	55	82	110	137	164	192	219	247

20°	0·34202	0·34475	0·34748	0·35021	0·35293	0·35565	0·35837	69°	27	55	82	109	137	164	191	218	246
21°	·35837	·36108	·36379	·36650	·36921	·37191	·37461	68°	27	54	81	108	136	163	190	217	244
22°	·37461	·37730	·37999	·38268	·38537	·38805	·39073	67°	27	54	81	108	135	161	188	215	242
23°	·39073	·39341	·39608	·39875	·40142	·40408	·40674	66°	27	53	80	107	134	160	187	214	240
24°	·40674	·40939	·41204	·41469	·41734	·41998	·42262	65°	27	53	80	106	133	159	186	212	238
25°	0·42262	0·42525	0·42788	0·43051	0·43313	0·43575	0·43837	64°	26	52	79	105	131	157	184	210	236
26°	·43837	·44098	·44359	·44620	·44880	·45140	·45399	63°	26	52	78	104	130	156	182	208	234
27°	·45399	·45658	·45917	·46175	·46433	·46690	·46947	62°	26	52	77	103	129	155	181	206	232
28°	·46947	·47204	·47460	·47716	·47971	·48226	·48481	61°	26	51	77	102	128	154	179	204	230
29°	·48481	·48735	·48989	·49242	·49495	·49748	·50000	60°	25	51	76	101	127	152	177	202	228
30°	0·50000	0·50252	0·50503	0·50754	0·51004	0.51254	0.51504	59°	25	50	75	100	125	150	175	200	225
31°	·51504	·51753	·52002	·52250	·52498	.52745	.52992	58°	25	50	74	99	124	149	174	198	223
32°	·52992	·53238	·53484	·53730	·53975	.54220	.54464	57°	25	49	74	98	123	147	172	196	221
33°	·54464	·54708	·54951	·55194	·55436	.55678	.55919	56°	24	49	73	97	122	146	170	194	219
34°	·55919	·56160	·56401	·56641	·56880	.57119	.57358	55°	24	48	72	96	120	144	168	192	216
35°	0·57358	0·57596	0·57833	0·58070	0·58307	0·58543	0·58779	54°	24	47	71	95	119	142	166	190	213
36°	·58779	·59014	·59248	·59482	·59716	·59949	·60182	53°	23	47	70	94	117	140	164	187	211
37°	·60182	·60414	·60645	·60876	·61107	·61337	·61566	52°	23	46	70	92	116	139	162	185	208
38°	·61566	·61795	·62024	·62251	·62479	·62706	·62932	51°	23	46	68	91	114	137	159	182	205
39°	·62932	·63158	·63383	·63608	·63832	·64056	·64279	50°	22	45	67	90	112	135	157	179	202
40°	0·64279	0·64501	0·64723	0·64945	0·65166	0·65386	0·65606	49°	22	44	66	88	111	133	155	177	199
41°	·65606	·65825	·66044	·66262	·66480	·66697	·66913	48°	22	44	65	87	109	131	153	174	196
42°	·66913	·67129	·67344	·67559	·67773	·67987	·68200	47°	21	43	64	86	107	129	150	172	193
43°	·68200	·68412	·68624	·68835	·69046	·69256	·69466	46°	21	42	63	84	106	127	148	169	190
44°	·69466	·69675	·69883	·70091	·70298	·70505	·70711	45°	21	42	62	83	104	124	145	166	187
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

NATURAL COSINES

TABLE III

NATURAL SINES

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
									Mean Differences								
45°	0.70711	0·70916	0·71121	0·71325	0·71529	0·71732	0·71934	44°	20	41	61	82	102	122	143	163	184
46°	·71934	·72136	·72337	·72537	·72737	·72937	·73135	43°	20	40	60	80	100	120	140	160	180
47°	·73135	·73333	·73531	·73728	·73924	·74120	·74314	42°	20	39	59	78	98	118	138	157	177
48°	·74314	·74509	·74703	·74896	·75088	·75280	·75471	41°	19	39	58	77	96	116	135	154	173
49°	·75471	·75661	·75851	·76041	·76229	·76417	·76604	40°	19	38	57	76	95	113	132	151	170
50°	0·76604	0·76791	0.76977	0·77162	0·77347	0·77531	0·77715	39°	19	37	56	74	93	111	130	148	167
51°	·77715	·77897	.78079	·78261	·78442	·78622	·78801	38°	18	36	54	72	91	109	127	145	163
52°	·78801	·78980	.79158	·79335	·79512	·79688	·79864	37°	18	35	53	71	89	106	124	142	159
53°	·79864	·80038	.80212	·80386	·80558	·80730	·80902	36°	17	35	52	69	87	104	121	138	156
54°	·80902	·81072	·81242	·81412	·81580	·81748	·81915	35°	17	34	51	68	85	101	118	135	152
55°	0·81915	0·82082	0·82248	0·82413	0·82577	0·82741	0·82904	34°	16	33	49	66	82	99	115	132	148
56°	·82904	·83066	·83228	·83389	·83549	·83708	·83867	33°	16	32	48	64	80	96	112	128	144
57°	·83867	·84025	·84182	·84339	·84495	·84650	·84805	32°	16	31	47	63	78	94	110	125	141
58°	·84805	·84959	·85112	·85264	·85416	·85567	·85717	31°	15	30	46	61	76	91	106	122	137
59°	·85717	·85866	·86015	·86163	·86310	·86457	·86603	30°	15	30	44	59	74	89	103	118	133
60°	0·86603	0·86748	0·86892	0·87036	0·87178	0·87321	0·87462	29°	14	29	43	57	72	86	100	114	129
61°	.87462	·87603	·87743	·87882	·88020	·88158	·88295	28°	14	28	42	55	69	83	97	111	125
62°	.88295	·88431	·88566	·88701	·88835	·88968	·89101	27°	13	27	40	54	67	81	94	108	121
63°	.89101	·89232	·89363	·89493	·89623	·89752	·89879	26°	13	26	39	52	65	78	91	104	117
64°	.89879	·90007	·90133	·90259	·90383	·90507	·90631	25°	13	25	38	50	63	75	88	100	113

65°	0·90631	0·90753	0·90875	0·90996	0·91116	0·91236	0·91355	24°	12	24	36	84	60	72	84	96	108
66°	·91355	·91472	·91590	·91706	·91822	·91936	·92050	23°	12	23	35	46	58	70	81	93	104
67°	·92050	·92164	·92276	·92388	·92499	·92609	·92718	22°	11	22	33	45	56	67	78	89	100
68°	·92718	·92827	·92935	·93042	·93148	·93253	·93358	21°	11	21	32	43	53	64	75	85	96
69°	·93358	·93462	·93565	·93667	·93769	·93869	·93969	20°	10	20	31	41	51	61	71	81	92
70°	0·93969	0 94068	0·94167	0·94264	0·94361	0·94457	0·94552	19°	10	19	29	39	49	58	68	78	87
71°	·94552	·94646	·94740	·94832	·94924	·95015	·95106	18°	9	18	28	37	46	55	64	74	83
72°	.95106	·95195	·95284	·95372	·95459	·95545	·95620	17°	9	18	26	35	44	52	61	70	79
73°	.95630	·95715	·95799	·95882	·95964	·96046	·96126	16°	8	17	25	33	41	50	58	66	74
74°	.96126	·96206	·96285	·96363	·96440	·96517	·96593	15°	8	16	23	31	39	47	54	62	70
75°	0·96593	0·96667	0.96742	0.96815	0.96887	0.96959	0.97030	14°	7	15	22	29	36	44	51	58	65
76°	·97030	·97100	.97169	.97237	.97304	.97371	.97437	13°	7	14	20	27	34	41	47	54	61
77°	·97437	·97502	.97566	.97630	.97692	.97754	.97815	12°	6	13	19	25	32	38	44	50	57
78°	·97815	·97875	.97934	.97992	.98050	.98107	.98163	11°	6	12	17	23	29	35	41	46	52
79°	·98163	.98218	.98272	.98325	.98378	.98430	.98481	10°	5	11	16	21	27	32	37	42	48
80°	0.98481	0.98531	0·98580	0·98629	0·98676	0·98723	0·98769	9°	5	10	14	19	24	29	34	38	43
81°	.98769	.98814	·98858	·98902	·98944	·98986	·99027	8°	4	9	13	17	22	26	30	34	39
82°	.99027	.99067	·99106	·99144	·99182	·99219	·99255	7°	4	8	11	15	19	23	27	30	34
83°	.99255	.99290	·99324	·99357	·99390	·99421	·99452	6°	3	7	10	13	17	20	23	26	30
84°	.99452	·99482	·99511	·99540	·99567	·99594	·99619	5°	3	6	8	11	14	17	20	22	25
85°	0·99619	0·99644	0·99668	0·99692	0·99714	0·99736	0·99756	4°	2	5	7	9	12	14	16	18	21
86°	·99756	·99776	·99795	·99813	·99831	·99847	·99864	3°	2	4	5	7	9	11	13	14	16
87°	·99863	·99878	·99892	·99905	·99917	·99929	·99939	2°	1	3	4	5	7	8	9	10	12
88°	·99939	·99949	·99958	·99966	·99973	·99979	·99985	1°	Differences are so small here that the tabulation is not generally necessary.								
89°	·99985	·99989	·99993	·99996	·99998	1·00000	1·00000	0°									
90°	1·00000																
	60′	50′	40′	30′	10′	30′	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	

NATURAL COSINES

TABLE IV

NATURAL TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
									Mean Differences								
0°	0·00000	0·00291	0·00582	0·00873	0·01164	0·01455	0·01746	89°	29	58	87	116	146	175	204	233	262
1°	·01746	·02037	·02328	·02619	·02910	·03201	·03492	88°	29	58	87	116	146	175	204	233	262
2°	·03492	·03783	·04075	·04366	·04658	·04949	·05241	87°	29	58	87	116	146	175	204	233	262
3°	·05241	·05533	·05824	·06116	·06408	·06700	·06993	86°	29	58	88	117	146	175	204	234	263
4°	·06993	·07285	·07578	·07870	·08163	·08456	·08749	85°	79	58	88	117	146	175	204	234	262
5°	0·08749	0·09042	0·09335	0·09629	0·09923	0·10216	0·10510	84°	29	59	88	118	147	176	206	235	265
6°	·10510	·10805	·11099	·11394	·11688	·11983	·12278	83°	29	59	88	118	147	176	206	235	265
7°	·12278	·12574	·12867	·13165	·13461	·13758	·14054	82°	30	59	89	118	148	178	207	237	266
8°	·14054	·14351	·14648	·14945	·15243	·15540	·15838	81°	30	59	89	119	149	178	208	238	267
9°	·15838	·16137	·16435	·16734	·17033	·17333	·17633	80°	30	60	90	120	150	179	209	239	269
10°	0·17633	0·17933	0·18233	0·18534	0·18835	0·19136	0·19438	79°	30	60	90	120	151	181	211	241	271
11°	·19438	·19740	·20042	·20345	·20648	·20952	·21256	78°	30	61	91	121	152	182	212	242	273
12°	·21256	·21560	·21864	·22169	·22475	·22781	·23087	77°	31	61	92	122	153	183	214	244	275
13°	·23087	·23393	·23700	·24008	·24316	·24624	·24933	76°	31	62	92	123	154	185	216	246	277
14°	·24933	·25242	·25552	·25862	·26172	·26484	·26795	75°	31	62	93	124	155	186	217	248	279
15°	0·26795	0·27107	0·27419	0.27732	0·28046	0·28360	0·28675	74°	31	63	94	125	157	188	219	250	282
16°	·28675	·28990	·29305	·29621	·29938	·30255	·30573	73°	32	63	95	126	158	190	221	253	285
17°	·30573	·30891	·31210	·31530	·31850	·32171	·32492	72°	32	64	96	128	160	192	224	256	288
18°	·32492	·32814	·33136	·33460	·33783	·34108	·34433	71°	32	65	97	129	162	194	226	259	291
19°	·34433	·34758	·35085	·35412	·35740	·36068	·36397	70°	33	65	98	131	164	196	229	262	294

20°	0·36397	0·36727	0·37057	0·37388	0·37720	0·38053	0·38386	69°	33	66	100	133	166	199	232	265	298
21°	·38386	·38721	·39055	·39391	·39727	·40065	·40403	68°	34	67	101	134	168	202	236	269	302
22°	·40403	·40741	·41081	·41421	·41763	·42105	·42447	67°	34	68	102	136	170	205	239	273	306
23°	·42447	·42791	·43136	·43481	·43828	·44175	·44523	66°	35	69	104	138	173	208	242	277	311
24°	·44523	·44872	·45222	·45573	·45924	·46277	·46631	65°	35	70	105	140	176	211	246	281	316
25°	0·46631	0·46985	0·47341	0·47698	0·48055	0·48414	0·48773	64°	36	71	107	143	179	214	250	286	321
26°	·48773	·49134	·49495	·49858	·50222	·50587	·50953	63°	36	73	109	145	182	218	254	291	327
27°	·50953	·51320	·51688	·52057	·52427	·52798	·53171	62°	37	74	111	148	185	222	259	296	333
28°	·53171	·53545	·53920	·54296	·54673	·55051	·55431	61°	38	75	113	151	189	226	264	302	339
29°	·55431	·55812	·56194	·56577	·56962	·57348	·57735	60°	38	77	115	154	192	230	269	307	346
30°	0·57735	0·58124	0·58513	0.58905	0·59297	0·59691	0·60086	59°	39	78	118	157	196	235	274	313	353
31°	·60086	·60483	·60881	.61280	·61681	·62083	·62487	58°	40	80	120	160	200	240	280	320	360
32°	·62487	·62892	·63299	.63707	·64117	·64528	·64941	57°	41	82	123	164	205	245	286	327	368
33°	·64941	·65355	·65771	.66189	·66608	·67028	·67451	56°	42	84	126	167	209	251	293	334	376
34°	·67451	·67875	·68301	.68728	·69157	·69588	·70021	55°	48	86	128	171	214	257	300	342	385
35°	0·70021	0·70455	0·70891	0·71329	0·71769	0·72211	0·72654	54°	44	88	132	176	220	263	307	351	395
36°	·72654	·73100	·73547	·73996	·74447	·74900	·75355	53°	45	90	135	180	225	270	315	360	405
37°	·75355	·75812	·76272	·76733	·77196	·77661	·78129	52°	46	92	139	185	231	277	324	370	416
38°	·78129	·78598	·79070	·79544	·80020	·80498	·80978	51°	48	95	143	190	238	285	333	380	428
39°	·80978	·81461	·81946	·82434	·82923	·83415	·83910	50°	49	98	147	196	245	293	342	391	440
40°	0·83910	0·84407	0·84906	0·85408	0·85912	0·86419	0·86929	49°	50	101	151	201	252	302	352	402	453
41°	·86929	·87441	·87955	·88473	·88992	·89515	·90040	48°	52	104	156	208	260	311	363	415	467
42°	·90040	·90569	·91099	·91633	·92170	·92709	·93252	47°	54	107	161	214	268	321	375	429	482
43°	·93252	·93797	·94345	·94896	·95451	·96008	·96569	46°	55	111	166	221	277	332	387	442	498
44°	·96569	·97133	·97700	·98270	·98843	·99420	1·00000	45°	57	114	172	229	286	343	400	457	515
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

NATURAL COTANGENTS

TABLE IV

NATURAL TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
45°	1·00000	1·00583	1·01170	1·01761	1·02355	1·02952	1·03553	44°	59	118	178	237	296	355	414	474	533
46°	·03553	·04158	·04766	·05378	·05994	·06613	·07237	43°	61	123	184	246	307	368	430	491	553
47°	·07237	·07864	·08496	·09131	·09770	·10414	·11061	42°	64	127	191	255	319	382	446	510	573
48°	·11061	·11713	·12369	·13029	·13694	·14363	·15037	41°	66	132	199	265	332	397	463	530	596
49°	·15037	·15715	·16398	·17085	·17777	·18474	·19175	40°	69	138	207	276	345	413	482	552	620
50°	1·19175	1·19882	1·20593	1·21310	1·22031	1·22758	1·23490	39°	72	144	216	288	360	431	503	575	647
51°	·23490	·24227	·24969	·25717	·26471	·27230	·27994	38°	75	150	225	300	376	451	526	601	676
52°	·27994	·28764	·29541	·30323	·31110	·31904	·32704	37°	78	157	235	314	392	471	549	628	707
53°	·32704	·33511	·34323	·35142	·35968	·36800	·37638	36°	82	164	247	329	411	493	576	658	740
54°	·37638	·38484	·39336	·40195	·41061	·41934	·42815	35°	86	172	259	345	431	517	603	690	776
55°	1·42815	1·43703	1·44598	1·45501	1·46411	1·47330	1·48256	34°	91	181	272	363	453	544	634	725	816
56°	·48256	·49190	·50133	·51084	·52043	·53010	·53987	33°	96	191	287	382	478	573	669	764	860
57°	·53987	·54972	·55966	·56969	·47981	·59002	·60033	32°	101	201	302	403	504	604	705	806	907
58°	·60033	·61074	·62125	·63185	·64256	·65337	·66428	31°	107	213	320	426	533	639	746	852	959
59°	·66428	·67530	·68643	·69766	·70901	·72047	·73205	30°	113	226	339	451	565	677	790	903	1016
60°	1·7321	1·7437	1·7556	1.7675	1·7796	1·7917	1·8040	29°	12	24	36	48	60	72	84	96	108
61°	1·8040	1·8165	1·8291	1.8418	1·8546	1·8676	1·8807	28°	13	25	38	51	64	77	89	102	115
62°	1·8807	1·8940	1·9074	1.9210	1·9347	1·9486	1·9626	27°	14	27	41	54	68	82	95	109	122
63°	1·9626	1·9768	1·9912	2,0057	2·0204	2·0353	2·0503	26°	15	29	44	58	73	88	102	117	131
64°	2·0503	2·0655	2·0809	2.0965	2·1123	2·1283	2·1445	25°	16	31	47	63	79	94	110	126	141

65°	2·1445	2·1609	2·1775	2·1943	2·2113	2·2286	2·2460	24°	17	34	51	68	85	101	118	135	152
66°	2·2460	2·2637	2·2817	2·2998	2·3183	2·3369	2·3559	23°	18	37	55	73	92	110	128	146	165
67°	2·3559	2·3750	2·3945	2·4142	2·4342	2·4545	2·4751	22°	20	40	60	80	100	119	139	159	179
68°	2·4751	2·4960	2·5172	2·5386	2·5605	2·5826	2·6051	21°	22	43	65	87	109	130	152	174	195
69°	2·6051	2·6279	2·6511	2·6746	2·6985	2·7228	2·7475	20°	24	47	71	95	119	142	166	190	213
70°	2·7475	2·7725	2·7980	2·8239	2·8502	2·8770	2·9042	19°	26	52	78	104	131	157	183	209	235
71°	2·9042	2·9319	2·9600	2·9887	3·0178	3·0475	3·0777	18°	29	58	87	116	145	174	202	231	260
72°	3·0777	3·1084	3·1397	3·1716	3·2041	3·2371	3·2709	17°	32	64	97	129	161	193	225	258	290
73°	3·2709	3·3052	3·3402	3·3759	3·4124	3·4495	3·4874	16°	36	72	108	144	181	216	253	289	325
74°	3·4874	3·5261	3·5656	3·6059	3·6470	3·6891	3·7321	15°	41	81	112	163	204	244	285	326	366
75°	3·7321	3·7760	3·8208	3·8667	3·9136	3·9617	4·0108	14°	46	93	139	185	232	278	325	371	418
76°	4·0108	4·0611	4·1126	4·1653	4·2193	4·2747	4·3315	13°	53	107	160	214	267	320	374	427	481
77°	4·3315	4·3897	4·4493	4·5107	4·5736	4·6382	4·7046	12°	62	124	186	248	311	373	435	497	559
78°	4·7046	4·7729	4·4830	4·9152	4·9894	5·0658	5·1446	11°	73	146	220	294	366	439	512	586	659
79°	5·1446	5·2257	5·3093	5·3955	5·4845	5·5764	5·6713	10°	88	175	263	350	438	526	613	701	788
80°	5·6713	5·7694	5·8708	5·9758	6·0844	6·1970	6·3138	9°	Here the differences change so rapidly in value that they cannot be tabulated.								
81°	6·3138	6·4348	6·5606	6·6912	6·8269	6·9682	7·1154	8°									
82°	7·1154	7·2687	7·4287	7·5958	7·7704	7·9530	8·1443	7°									
83°	8·1443	8·3450	8·5555	8·7769	9·0098	9·2553	9·5144	6°									
84°	9·5144	9·7882	10·078	10·385	10·712	11·059	11·4301	5°									
85°	11·430	11·826	12·251	12·706	13·197	13·727	14·301	4°	The cotangent of a small angle of *n*′ (*n* minutes) or tan (90°—*n*′) is very nearly equal to 3437·7 divided by *n*.								
86°	14·301	14·924	15·605	16·350	17·169	18·075	19·081	3°									
87°	19·081	20·206	21·470	22·904	24·542	26·432	28·636	2°									
88°	28·636	31·242	34·368	38·188	42·964	49·104	57·290	1°									
89°	57·290	68·750	85·940	114·59	171·89	343·77	+∞	0°									
90°	+∞																
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

NATURAL COTANGENTS

TABLE V

LOGARITHMIC SINES

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
0°	—∞	7·46373	7·76475	7·94084	8·06578	8·16268	8·24186	89°	Here differences vary so rapidly that tabulation is not possible. For small angles of n' log sin n' or log cos $(90°-n') = \log n + 4{\cdot}46373$.								
1°	8·24186	8·30879	8·36678	8·41792	8·46366	8·50504	8·54282	88°									
2°	8·54282	8·57757	8·60973	8·63968	8·66769	8·69400	8·71880	87°									
3°	8·71880	8·74226	8·76451	8·78568	8·80585	8·82513	8·84358	86°									
4°	8·84358	8·86128	8·87829	8·89464	8·91040	8·92561	8·94030	85°									
5°	8·94030	8·95450	8·96825	8·98157	8·99450	9·00704	9·01923	84°									
6°	9·01923	9·03109	9·04262	9·05386	9·06481	9·07548	9·08589	83°									
7°	9·08589	9·09606	9·10599	9·11570	9·12519	9·13447	9·14356	82°	96	192	288	384	480	576	672	768	864
8°	9·14356	9·15245	9·16116	9·16970	9·17807	9·18628	9·19433	81°	85	169	254	338	423	507	592	676	761
9°	9·19433	9·20223	9·20999	9·21761	9·22509	9·23244	9·23967	80°	76	151	227	302	378	453	529	604	680
10°	9·23967	9·24677	9·25376	9·26063	9·26739	9·27405	9·28060	79°	68	136	204	272	341	409	477	545	613
11°	·28060	·28705	·29340	·29966	·30582	·31189	·31788	78°	62	124	186	248	310	373	435	497	559
12°	·31788	·32378	·32960	·33534	·34100	·34658	·35209	77°	57	114	171	228	285	342	399	456	513
13°	·35209	·35752	·36289	·36819	·37341	·37858	·38368	76°	53	105	158	210	263	316	368	421	473
14°	·38368	·38871	·39369	·39860	·40346	·40825	·41300	75°	49	98	147	195	244	293	342	391	440
15°	9·41300	9·41768	9·42232	9·42690	9·43143	9·43591	9·44034	74°	46	91	137	182	228	273	319	364	410
16°	·44034	·44472	·44905	·45334	·45758	·46178	·46594	73°	43	85	128	171	213	256	299	341	384
17°	·46594	·47005	·47411	·47814	·48213	·48607	·48998	72°	40	80	120	160	201	241	281	321	361
18°	·48998	·49385	·49768	·50148	·50523	·50896	·51264	71°	38	76	113	151	189	227	264	302	340
19°	·51264	·51269	·51991	·52350	·52705	·53056	·53405	70°	36	71	107	143	179	214	250	285	321

	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
20°	9·53405	9·53751	9·54093	9·54433	9·54769	9·55102	9·55433	69°	34	68	101	135	169	203	237	270	304
21°	·55433	·55761	·56085	·56403	·56727	·57044	·57358	68°	32	64	96	128	161	193	225	257	289
22°	·57358	·57669	·57978	·58284	·58588	·58889	·59188	67°	31	61	92	122	153	183	214	244	275
23°	·59188	·59484	·59778	·60070	·60359	·60646	·60931	66°	29	58	87	116	146	174	204	233	262
24°	·60931	·61214	·61494	·61773	·62049	·62323	·62595	65°	28	56	83	111	139	166	195	222	250
25°	9.62595	9·62865	9·63133	9·63398	9·63662	9·63924	9·64184	64°	27	53	80	106	133	159	186	212	239
26°	.64184	·64442	·64698	·64953	·65205	·65456	·65705	63°	25	51	76	102	127	152	178	203	229
27°	.65705	·56952	·66197	·66441	·66682	·66922	·67161	62°	24	49	73	97	122	146	170	194	219
28°	.67161	·67398	·67633	·67866	·68098	·68328	·68557	61°	23	47	70	93	117	140	163	186	210
29°	.68557	·68784	·69010	·69234	·69456	·69677	·67897	60°	22	45	67	89	112	134	156	179	201
30°	9·69897	9·70115	9·70332	9·70547	9·70761	9·70973	9·71184	59°	22	43	65	86	107	129	150	172	193
31°	·71184	·71393	·71602	·71809	·72014	·72218	·72421	58°	21	41	62	82	103	124	144	165	185
32°	·72421	·72622	·72823	·73022	·73219	·73416	·73611	57°	20	40	59	79	99	119	139	159	178
33°	·73611	·73805	·73997	·74180	·74379	·74568	·74756	56°	19	38	57	76	96	115	134	153	172
34°	·74756	·74943	·75128	·75313	·75496	·75678	·75859	55°	18	37	55	74	92	110	129	147	165
35°	9·75859	9·76039	9·76218	9·76395	9·76572	9·76747	9·76922	54°	18	35	53	71	89	106	124	142	159
36°	·76922	·77095	·77268	·77439	·77609	·77778	·77946	53°	17	34	51	68	86	103	120	137	154
37°	·77946	·78113	·78280	·78445	·78609	·78772	·78934	52°	17	33	50	66	83	99	116	132	149
38°	·78934	·79095	·79256	·79415	·69573	·79731	·79887	51°	16	32	48	64	80	95	112	127	143
39°	·79887	·80043	·80197	·80351	·80504	·80656	·80807	50°	15	31	46	62	77	92	108	123	138
40°	9·80807	9·80957	9·81106	9·81254	9·81402	9·81549	9·81694	49°	15	30	44	59	74	89	104	118	133
41°	·81694	·81839	·81983	·82126	·82269	·82410	·82551	48°	14	29	43	57	72	86	100	114	129
42°	·82551	·82691	·82830	·82968	·83106	·83242	·83378	47°	14	28	41	55	69	83	97	110	124
43°	·83378	·83513	·83648	·83781	·83914	·84046	·84177	46°	13	27	40	53	67	80	93	106	120
44°	·84177	·84308	·84437	·84566	·84694	·84822	·84949	45°	13	26	38	51	64	77	90	102	115

LOGARITHMIC COSINES

TABLE V

LOGARITHMIC SINES

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
									Mean Differences								
45°	9·84949	9·85074	9·85200	9·85324	9·85448	9·85571	9·85693	44°	12	25	37	50	62	74	87	99	112
46°	·85693	·85815	·85936	·86056	·86176	·86295	·86413	43°	12	24	36	48	60	72	84	96	108
47°	·86413	·86530	·86647	·86763	·86879	·86993	·87107	42°	12	23	35	46	58	70	81	93	104
48°	·87107	·87221	·87334	·87446	·87557	·87668	·17778	41°	11	22	34	45	56	67	78	89	100
49°	·87778	·87887	·87996	·88105	·88212	·88319	·88425	40°	11	22	32	43	54	65	76	86	97
50°	9·88425	9·88531	9·88636	9·88741	9·88844	9·88948	9·89050	39°	10	21	31	42	52	62	73	83	94
51°	·89050	·89152	·89254	·89354	·89455	·89554	·89653	38°	10	20	30	40	50	60	70	80	90
52°	·89653	·89752	·89849	·89947	·90043	·90139	·90235	37°	10	19	29	39	49	58	68	78	87
53°	·90235	·90330	·90424	·90518	·90611	·90704	·90796	36°	9	19	28	37	47	56	65	75	84
54°	·90796	·90887	·90978	·91069	·91158	·91248	·91336	35°	9	18	27	36	45	54	63	72	81
55°	9·91336	9·91425	9·91512	9·91599	9·91686	9·91772	9·91857	34°	9	17	26	35	44	52	61	70	78
56°	·91857	·91942	·92027	·92111	·92194	·92277	·92359	33°	8	17	25	34	42	50	59	67	76
57°	·92359	·92441	·92522	·92603	·92683	·92763	·92842	32°	8	16	24	32	41	49	57	65	73
58°	·92842	·92921	·92999	·93077	·93154	·93230	·93307	31°	8	16	23	31	59	47	55	62	70
59°	·93307	·93382	·93457	·93532	·93606	·93680	·93753	30°	8	15	23	30	37	45	52	60	67
60°	9·93753	9·93826	9·93898	9·93970	9·94041	9·94112	9·94182	29°	7	14	22	29	36	43	50	57	64
61°	·94182	·94252	·94321	·94390	·94458	·94526	·94593	28°	7	14	21	27	34	41	48	55	62
62°	·94593	·94660	·94727	·94793	·94858	·94923	.94988	27°	7	13	20	26	33	40	46	53	59
63°	·94988	·95052	·95116	·95179	·95242	·95304	·95366	26°	6	13	29	25	32	38	44	50	57
64°	·95366	·95427	·95488	·95549	·95609	·95668	·95728	25°	6	12	18	24	30	36	42	48	54

	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
65°	9·95728	9·95786	9·95844	9·95902	9·95960	9·96017	9·96073	24°	6	12	17	23	29	35	40	46	52
66°	·96073	·96129	·96185	·96240	·96294	·96349	·96403	23°	6	11	17	22	28	33	38	44	50
67°	·96403	·96456	·96509	·96562	·96614	·96665	·96717	22°	5	10	16	21	26	31	36	42	47
68°	·96717	·96767	·96818	·96868	·96917	·96966	·97015	21°	5	10	15	20	25	29	34	40	44
69°	·97015	·97063	·97111	·97159	·97206	·97252	·97299	20°	5	9	14	19	24	28	33	38	42
70°	9·97299	9·97344	9·97390	9·97435	9·97479	9·97523	9·97567	19°	4	9	13	18	22	27	31	36	40
71°	·97567	·97610	·97653	·97696	·97738	·97779	·97821	18°	4	9	13	17	21	26	30	34	38
72°	·97821	·97861	·97902	·97942	·97982	·98021	·98060	17°	4	8	12	16	20	24	28	32	36
73°	·98060	·98098	·98136	·98174	·98211	·98248	·98284	18°	4	8	11	15	19	22	26	30	34
74°	·98284	·98320	·98356	·98391	·98426	·98460	·98494	15°	4	7	11	14	18	21	25	28	32
75°	9·98494	9·98528	9·98561	9·98594	9·98627	9·98659	9·98690	14°	3	7	10	13	17	20	23	26	30
76°	·98690	·98722	·98753	·98783	·98813	·98843	·98872	13°	3	6	9	12	15	18	21	24	27
77°	·98872	·98901	·98930	·98958	·98986	·99013	·99040	12°	3	6	8	11	14	17	20	22	25
78°	·99040	·99067	·99093	·99119	·99145	·99170	·99195	11°	3	5	8	10	13	16	18	21	23
79°	·99195	·99219	·99243	·99267	·99290	·99313	·99335	10°	2	5	7	9	12	14	16	19	21
80°	9·99335	9·99357	9·99379	9·99400	9·99421	9·99442	9·99462	9°	2	4	6	8	11	13	15	17	19
81°	·99462	·99482	·99501	·99520	·99539	·99557	·99575	8°	2	4	6	8	10	11	13	15	17
82°	·99575	·99593	·99610	·99627	·99643	·99659	·99675	7°	2	3	5	7	8	10	12	13	15
83°	·99675	·99690	·99705	·99720	·99734	·99748	·99761	6°	1	3	4	6	7	9	10	12	13
84°	·99761	·99775	·99787	·99800	·99812	·99823	·99834	5°	1	3	4	5	6	8	9	10	11
85°	9·99834	9·99845	9·99856	9·99866	9·99876	9·99885	9·99894	4°	1	2	3	4	5	6	7	8	9
86°	·99894	·99903	·99911	·99919	·99926	·99934	·99940	3°	1	2	2	3	4	5	5	6	7
87°	·99940	·99947	·99953	·99959	·99964	·99969	·99974	2°	1	1	2	2	3	3	4	4	5
88°	·99974	·99978	·99982	·99985	·99988	·99991	·99993	1°	0	1	1	1	2	2	2	2	3
89°	·99993	·99995	·99997	·99998	·99999	10·00000	10·00000	0°									
90°	10·00000																
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

LOGARITHMIC COSINES

TABLE V

LOGARITHMIC SINES

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
									Mean Differences								
45°	9·84949	9·85074	9·85200	9·85324	9·85448	9·85571	9·85693	44°	12	25	37	50	62	74	87	99	112
46°	·85693	·85815	·85936	·86056	·86176	·86295	·86413	43°	12	24	36	48	60	72	84	96	108
47°	·86413	·86530	·86647	·86763	·86879	·86993	·87107	42°	12	23	35	46	58	70	81	93	104
48°	·87107	·87221	·87334	·87446	·87557	·87668	·17778	41°	11	22	34	45	56	67	78	89	100
49°	·87778	·87887	·87996	·88105	·88212	·88319	·88425	40°	11	22	32	43	54	65	76	86	97
50°	9·88425	9·88531	9·88636	9·88741	9·88844	9·88948	9·89050	39°	10	21	31	42	52	62	73	83	94
51°	·89050	·89152	·89254	·89354	·89455	·89554	·89653	38°	10	20	30	40	50	60	70	80	90
52°	·89653	·89752	·89849	·89947	·90043	·90139	·90235	37°	10	19	29	39	49	58	68	78	87
53°	·90235	·90330	·90424	·90518	·90611	·90704	·90796	36°	9	19	28	37	47	56	65	75	84
54°	·90796	·90887	·90978	·91069	·91158	·91248	·91336	35°	9	18	27	36	45	54	63	72	81
55°	9·91336	9·91425	9·91512	9·91599	9·91686	9·91772	9·91857	34°	9	17	26	35	44	52	61	70	78
56°	·91857	·91942	·92027	·92111	·92194	·92277	·92359	33°	8	17	25	34	42	50	59	67	76
57°	·92359	·92441	·92522	·92603	·92683	·92763	·92842	32°	8	16	24	32	41	49	57	65	73
58°	·92842	·92921	·92999	·93077	·93154	·93230	·93307	31°	8	16	23	31	59	47	55	62	70
59°	·93307	·93382	·93457	·93532	·93606	·93680	·93753	30°	8	15	23	30	37	45	52	60	67
60°	9·93753	9·93826	9·93898	9·93970	9·94041	9·94112	9·94182	29°	7	14	22	29	36	43	50	57	64
61°	·94182	·94252	·94321	·94390	·94458	·94526	·94593	28°	7	14	21	27	34	41	48	55	62
62°	·94593	·94660	·94727	·94793	·94858	·94923	.94988	27°	7	13	20	26	33	40	46	53	59
63°	·94988	·95052	·95116	·95179	·95242	·95304	·95366	26°	6	13	29	25	32	38	44	50	57
64°	·95366	·95427	·95488	·95549	·95609	·95668	·95728	25°	6	12	18	24	30	36	42	48	54

	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
65°	9·95728	9·95786	9·95844	9·95902	9·95960	9·96017	9·96073	24°	6	12	17	23	29	35	40	46	52
66°	·96073	·96129	·96185	·96240	·96294	·96349	·96403	23°	6	11	17	22	28	33	38	44	50
67°	·96403	·96456	·96509	·96562	·96614	·96665	·96717	22°	5	10	16	21	26	31	36	42	47
68°	·96717	·96767	·96818	·96868	·96917	·96966	·97015	21°	5	10	15	20	25	29	34	40	44
69°	·97015	·97063	·97111	·97159	·97206	·97252	·97299	20°	5	9	14	19	24	28	33	38	42
70°	9·97299	9·97344	9·97390	9·97435	9·97479	9·97523	9·97567	19°	4	9	13	18	22	27	31	36	40
71°	·97567	·97610	·97653	·97696	·97738	·97779	·97821	18°	4	9	13	17	21	26	30	34	38
72°	·97821	·97861	·97902	·97942	·97982	·98021	·98060	17°	4	8	12	16	20	24	28	32	36
73°	·98060	·98098	·98136	·98174	·98211	·98248	·98284	18°	4	8	11	15	19	22	26	30	34
74°	·98284	·98320	·98356	·98391	·98426	·98460	·98494	15°	4	7	11	14	18	21	25	28	32
75°	9·98494	9·98528	9·98561	9·98594	9·98627	9·98659	9·98690	14°	3	7	10	13	17	20	23	26	30
76°	·98690	·98722	·98753	·98783	·98813	·98843	·98872	13°	3	6	9	12	15	18	21	24	27
77°	·98872	·98901	·98930	·98958	·98986	·99013	·99040	12°	3	6	8	11	14	17	20	22	25
78°	·99040	·99067	·99093	·99119	·99145	·99170	·99195	11°	3	5	8	10	13	16	18	21	23
79°	·99195	·99219	·99243	·99267	·99290	·99313	·99335	10°	2	5	7	9	12	14	16	19	21
80°	9·99335	9·99357	9·99379	9·99400	9.99421	9·99442	9·99462	9°	2	4	6	8	11	13	15	17	19
81°	·99462	·99482	·99501	.99520	.99539	·99557	·99575	8°	2	4	6	8	10	11	13	15	17
82°	·99575	·99593	·99610	·99627	.99643	·99659	·99675	7°	2	3	5	7	8	10	12	13	15
83°	·99675	·99690	·99705	·99720	.99734	·99748	·99761	6°	1	3	4	6	7	9	10	12	13
84°	·99761	·99775	·99787	·99800	.99812	·99823	·99834	5°	1	3	4	5	6	8	9	10	11
85°	9·99834	9·99845	9·99856	9·99866	9·99876	9·99885	9·99894	4°	1	2	3	4	5	6	7	8	9
86°	·99894	·99903	·99911	·99919	·99926	·99934	·99940	3°	1	2	2	3	4	5	5	6	7
87°	·99940	·99947	·99953	.99959	·99964	·99969	·99974	2°	1	1	2	2	3	3	4	4	5
88°	·99974	·99978	·99982	·99985	·99988	·99991	·99993	1°	0	1	1	1	2	2	2	2	3
89°	·99993	·99995	·99997	·99998	·99999	10·00000	10·00000	0°									
90°	10·00000																
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

LOGARITHMIC COSINES

TABLE VI

LOGARITHMIC TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
0°	−∞	7·46373	7·76476	7·84086	8·06581	8·16273	8·24192	89°	Here differences vary so rapidly that tabulation is not possible. For small angles of n' log tan n' or log cot $(90°—n')$ $=\log n+\bar{4}\cdot 46373$								
1°	8·24192	8·30888	8·36689	8·41807	8·46385	8·50527	8·54308	88°									
2°	8·54308	8·57788	8·61009	8·64009	8·66816	8·69453	8·71940	87°									
3°	8·71940	8·74292	8·76525	8·78649	8·80674	8·82610	8·84464	86°									
4°	8·84464	8·86243	8·87953	8·89598	8·91185	8·92716	8·94195	85°									
5°	8·94195	8·95627	8·97013	8·98358	8·99662	9·00930	9·02162	84°									
6°	9·02162	9·03361	9·04528	9·05666	9·06775	9·07858	9·08914	83°									
7°	9·08914	9·09947	9·10956	9·11943	9·12909	9·13854	9·14780	82°	98	195	293	391	488	586	684	782	879
8°	9·14780	9·15688	9·16577	9·17450	9·18306	9·19146	9·19971	81°	87	173	260	346	433	519	606	692	779
9°	9·19971	9·20782	9·21578	9·22361	9·23130	9·23887	9·24632	80°	78	155	233	310	388	466	543	621	698
10°	9·24632	9·25365	9·26086	9·26797	9·27496	9·28186	9·28865	79°	71	141	212	282	354	420	494	564	635
11°	·28865	·29535	·30195	·30846	·31489	·32122	·32747	78°	65	129	194	259	323	388	453	518	582
12°	·32747	·33365	·33974	·34576	·35170	·35757	·36336	77°	60	120	179	239	299	359	419	478	538
13°	·36336	·36909	·37476	·38035	·38589	·39136	·39677	76°	56	111	167	222	278	334	389	445	500
14°	·39677	·40212	·40742	·41266	·41784	·42297	·42805	75°	52	104	156	208	261	313	365	417	469
15°	9·42805	9·43308	9·43806	9·44299	9·44787	9·45271	9·45750	74°	49	98	147	196	245	294	343	392	442
16°	·45750	·46224	·46694	·47160	·47622	·48080	·48534	73°	46	93	139	186	232	278	325	371	418
17°	·48534	·48984	·49430	·49872	·50311	·50746	·51178	72°	44	88	132	176	220	264	308	352	396
18°	·51178	·51606	·52031	·52452	·52870	·53285	·53697	71°	42	84	126	168	210	252	294	336	378
19°	·53697	·54106	·54512	·54915	·55315	·55712	·56107	70°	40	80	121	160	201	241	281	321	362

20°	9·56107	9·56498	9·56887	9·57274	9·57658	9·58039	9·58418	69°	39	77	116	154	193	231	270	308	347
21°	·58418	·58794	·59168	·59540	·59909	·60276	·60641	68°	37	74	111	148	185	222	259	296	333
22°	·60641	·61004	·61364	·61722	·62079	·62433	·62785	67°	36	72	107	143	179	214	250	286	322
23°	·62785	·63135	·63484	·63830	·64175	·64517	·64858	66°	35	69	104	138	173	208	242	277	311
24°	·64858	·65197	·65535	·65870	·66204	·66537	·66867	65°	34	67	101	134	168	201	235	268	302
25°	9·66867	9·67196	9·67524	9·67850	9·68174	9·68497	9·68818	64°	33	65	98	130	163	195	228	260	293
26°	·68818	·69138	·69457	·69774	·70089	·70404	·70717	63°	32	63	95	126	158	190	221	253	284
27°	·70717	·71028	·71339	·71648	·71955	·72262	·72567	62°	31	62	92	123	154	185	216	246	277
28°	·72567	·72872	·73175	·73476	·73777	·74077	·74375	61°	30	60	90	120	151	181	211	241	271
29°	·74375	·74673	·74969	·75264	·75558	·75852	·76144	60°	29	59	88	118	147	177	206	236	265
30°	9·76144	9·76435	9·76725	9·77015	9·77303	9·77591	9·77877	59°	29	58	87	116	144	173	202	231	260
31°	·77877	·78163	·78448	·78732	·79015	·79297	·79579	58°	28	57	85	113	142	170	198	227	255
32°	·79579	·79860	·80140	·80419	·80697	·80975	·81252	57°	28	56	84	112	139	167	195	223	251
33°	·81252	·81528	·81803	·82078	·82352	·82626	·82899	56°	28	55	83	110	137	165	192	220	247
34°	·82899	·83171	·83442	·83713	·83984	·84254	·84523	55°	27	54	81	108	136	162	190	217	224
35°	9·84523	9·84791	9·85059	9·85327	9·85594	9·85860	9·86126	54°	27	54	80	107	134	160	188	214	241
36°	·86126	·86392	·86656	·86921	·87185	·87448	·87711	53°	26	53	79	106	132	158	185	212	238
37°	·87711	·87974	·88236	·88498	·88759	·89020	·89281	52°	26	52	78	105	131	157	183	209	236
38°	·89281	·89541	·89801	·90061	·90320	·90578	·90837	51°	26	52	78	104	130	156	182	208	234
39°	·90837	·91095	·91353	·91610	·91868	·92125	·92381	50°	26	52	77	103	129	155	180	206	232
40°	9·92381	9·92638	9·92894	9·93150	9·93406	9·93661	9·93916	49°	26	51	77	102	128	154	179	205	230
41°	·93916	·94171	·94426	·94681	·94935	·95190	·95444	48°	25	51	76	102	127	153	178	204	229
42°	·95444	·95698	·95952	·96205	·96459	·96712	·96966	47°	25	51	76	101	127	152	177	203	228
43°	·96966	·97219	·97472	·97725	·97978	·98231	·98484	46°	25	51	76	101	127	152	177	202	228
44°	·98484	·98737	·98989	·99242	·99495	·99747	10·00000	45°	25	51	76	101	127	152	177	202	228
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

LOGARITHMIC COTANGENTS

TABLE VI

LOGARITHMIC TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
45°	10·00000	10·00253	10·00505	10·00758	10·01011	10·01263	10·01516	44°	25	51	76	101	127	152	177	202	228
46°	·01516	·01769	·02022	·02275	·02528	·02781	·03034	43°	25	51	76	101	127	152	177	202	228
47°	·03034	·03288	·03541	·03795	·04048	·04302	·04556	42°	25	51	76	101	127	152	177	203	228
48°	·04556	·04810	·05065	·05319	·05574	·05829	·06084	41°	25	51	76	102	127	153	178	204	229
49°	·06084	·06339	·06594	·06850	.07106	·07362	·07619	40°	26	51	77	102	128	154	179	205	230
50°	10·07619	10·07875	10·08132	10·08390	10·08647	10·08905	10·09163	39°	26	52	77	103	129	155	180	206	232
51°	·09163	·09422	·09680	·09939	·10199	·10459	·10719	38°	26	52	78	104	130	156	182	208	234
52°	·10719	·10980	·11241	·11502	·11764	·12026	·12289	37°	26	52	78	105	131	157	183	209	236
53°	·12289	·12552	·12815	·13079	·13344	·13608	·13874	36°	26	53	79	106	132	158	185	212	238
54°	·13874	·14140	·14406	·14673	·14941	·15209	·15477	35°	27	54	80	107	134	160	188	214	241
55°	10·15477	10·15746	10·16016	10·16287	10.16558	10·16829	10·17101	34°	27	54	81	108	136	162	190	217	244
56°	·17101	·17374	·17648	·17922	.18197	·18472	·18748	33°	28	55	83	110	137	165	192	220	247
57°	·18748	·19025	·19303	·19581	.19860	·20140	·20421	32°	28	56	84	112	139	167	195	223	251
58°	·20421	·20703	·20985	·21268	.21552	·21837	·22123	31°	28	57	85	113	142	170	198	227	255
59°	·22123	·22409	·22697	·22985	.23275	·23565	·23856	30°	29	58	87	116	144	173	202	231	260
60°	10·23856	10·24148	10·24442	10·24736	10·25031	10·25327	10·25625	29°	29	59	88	118	147	177	206	236	265
61°	·25625	·25923	·26223	·26524	·26825	·27128	·27433	28°	30	60	90	120	151	181	211	241	271
62°	·27433	·27738	·28045	·28352	·28661	·28972	·29283	27°	31	62	92	123	154	185	216	246	277
63°	·29283	·29596	·29911	·30226	·30543	·30862	·31182	26°	32	63	95	126	158	190	221	253	284
64°	·31182	·31503	·31826	·32150	·32476	·32804	·33133	25°	33	65	98	130	163	195	228	260	293

	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
65°	10·33133	10·33463	10·33796	10·34130	10·34465	10·34803	10·35142	24°	34	67	101	134	168	201	235	268	302
66°	·35142	·35483	·35825	·36170	·36516	·36865	·37215	23°	35	69	104	138	173	208	242	277	311
67°	·37215	·37567	·37921	·38278	·38636	·38996	·39359	22°	36	72	107	143	179	214	251	286	322
68°	·39359	·39724	·40091	·40460	·40832	·41206	·41582	21°	37	74	111	148	185	222	259	296	333
69°	·41582	·41961	·42342	·42726	·43113	·43502	·43893	20°	39	77	116	154	193	231	270	308	347
70°	10·43893	10·44288	10·44685	10·45085	10·45488	10·45894	10·46303	19°	40	80	121	160	201	241	281	321	362
71°	·46303	·46715	·47130	·47548	·47969	·48394	·48822	18°	42	84	126	168	210	252	294	336	378
72°	·48822	·49254	·49689	·50128	·50570	·51016	·51466	17°	44	88	132	176	220	264	308	352	396
73°	·51466	·51920	·52378	·52840	·53306	·53776	·54250	16°	46	93	139	186	232	278	325	371	418
74°	·54250	·54729	·55213	·55701	·56194	·56692	·57195	15°	49	98	147	196	245	294	343	392	442
75°	10·57195	10·57703	10·58216	10·58734	10·59258	10·59788	10·60323	14°	52	104	156	208	261	313	365	417	469
76°	·60323	·60864	·61411	·61965	·62524	·63091	·63664	13°	56	111	167	222	278	334	389	445	500
77°	·63664	·64243	·64830	·65424	·66026	·66635	·67253	12°	60	120	179	239	299	359	419	478	538
78°	·67253	·67878	·68511	·69154	·69805	·70465	·71135	11°	65	129	194	259	323	388	453	518	582
79°	·71135	·71814	·72504	·73203	·73914	·74635	·75368	10°	71	141	212	282	354	420	494	564	635
80°	10·75368	10·76113	10·76870	10.77639	10·78422	10·79218	10·80029	9°	78	155	233	310	388	466	543	621	698
81°	·80029	·80854	·81694	·82550	·83423	·84312	·85220	8°	87	173	260	346	433	519	606	692	779
82°	·85220	·86146	·87091	·88057	·89044	·90053	·91086	7°	98	195	293	391	488	586	684	782	879
83°	·91086	·92142	·93225	·94334	·95472	·96639	·97838	6°									
84°	·97838	·99070	11·00338	11·01642	11·02987	11·04373	11·05805	5°									
85°	11·05805	11·07284	11·08815	11·10402	11·12047	11·13757	11·15536	4°	Here differences vary so rapidly that tabulation is not possible.								
86°	11·15536	11·17390	11·19326	11·21351	11·23475	11·25708	11·28060	3°									
87°	11·28060	11·30547	11·33184	11·35991	11·38991	11·42212	11·45692	2°									
88°	11·45692	11·49473	11·53615	11·58193	11·63311	11·69112	11·75808	1°									
89°	11·75808	11·83727	11·93419	12·05914	12·23524	12·53627	+∞	0°									
90°	+∞																

LOGARITHMIC COTANGENTS

স্থানাঙ্ক জ্যামিতি

Some Important Results :

1. Distance between $P(x_1, y_1)$ and $Q(x_2, y_2)$:

$$PQ = +\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

2. For $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}.$$

3. When $R(h, k)$ divides the join of $P(x_1, y_1)$ and $Q(x_2, y_2)$ in the ratio $PR : QR = m : n$,

(i) $R(h, k) \equiv R\left(\dfrac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \dfrac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$, (For Internal division).

(ii) $R(h, k) = R\left(\dfrac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \dfrac{my_2 - ny_1}{m-n}\right)$; (For External division).

4. Equation of the straight line through $P(x_1, y_1)$ and $Q(x_2, y_2)$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ or, } \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

5. When α is the angle between $y = m_1x + c_1$ and $y = m_2x + c_2$:

$$\tan\alpha = \frac{m_1 \sim m_2}{1 + m_1m_2}.$$

6. d being the perpendicular distance from $P(x_1, y_1)$ to $ax + by + c = 0$:

$$d = \pm\frac{(ax_1 + by_1 + c)}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

7. (r) For the circle : $x^2 + y^2 = a^2$

(i) Centre : (0, 0) ; Radius a ;

(ii) Tangent at $P(x_1, y_3)$: $xx_1 + yy_1 = a^2$;

(iii) $y = mx + c$ is the tangent if $c = \pm a\sqrt{1 + m^2}$.

(*b*) For the circle : $x^2+y^2+2gx+2fg+c=0$.

(i) Centre : $(-g, -f)$; Radius : $\sqrt{g^2+f^2-c}$.

(ii) Tangent at (x_1, y_1) : $xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$.

8. For the parabola : $y^2=4ax$

(i) Latus-rectum $=4a$; Focus $=(a, 0)$.

(ii) Tangent at $P(x_1, y_1)$; $yy_1=2a(x+x_1)$.

(iii) $y=mx+c$ is the tangent if $c=\dfrac{a}{m}$.

9. For the ellipse : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

(i) Latus-rectum $=\dfrac{2b^2}{a}$; Foci : $(\pm ae, 0)$;

$b^2=a^2(1-e^2)$.

(ii) Tangent at $P(x_1, y_1)$: $\dfrac{xx_1}{a^2}+\dfrac{yy_1}{b^2}=1$

(iii) $y=mx+c$ is the tangent if $c=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$

10. For the hyperbola : $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

(i) Latus-rectum $=\dfrac{2b^2}{a}$; Foci : $(\pm ae, 0)$;

$b^2=a^2(e^2-1)$;

(ii) Tangent at $P(x_1, y_1)$: $\dfrac{xx_1}{a^2}-\dfrac{yy_1}{b^2}=1$.

(iii) $y=mx+c$ is the tangent if $c=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$

দ্বিমাত্রিক স্থানাঙ্ক জ্যামিতি

প্রথম অধ্যায়

বিন্দুর স্থানাঙ্ক

(Co-ordinates of Points)

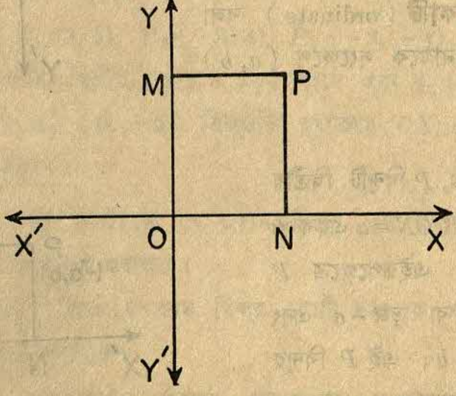
1-1. উপস্থাপন।

সমতল ভূমিতে অবস্থিত কোন স্থানের অবস্থান বলিতে উহা অপর কোন নির্দিষ্ট স্থান হইতে কত দূরে এবং কোন্ দিকে অবস্থিত তাহা বুঝায়। যেমন, কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয় কোথায় অবস্থিত বলিলে উহা বর্ধমান বা কল্যাণী বা অপর কোন স্থান হইতে কতদূরে এবং উহার কোন্ দিকে অবস্থিত তাহা বুঝাইবে। ভূগোলের মানচিত্রে, কলিকাতা হইতে দিল্লী কতদূরে এবং কোন্‌দিকে অবস্থিত বলিলে, কলিকাতা হইতে সোজা উত্তর বা দক্ষিণ দিকে কতদূর যাওয়ার পর আবার সোজা পূর্ব বা পশ্চিম দিকে কতদূর গেলে দিল্লীর অবস্থান পাওয়া যাইবে, তাহা বুঝাইবে। সুতরাং, কোন একটি স্থানের অবস্থান বলিলে অপর একটি নির্দিষ্ট স্থান ও নির্দিষ্ট দিকের সাপেক্ষে উহা কোথায় অবস্থিত তাহা বুঝাইবে।

সেইজন্য সমতলে অবস্থিত কোন স্থানের অবস্থান নির্ণয়ের জন্য ঐ সমতলে পরস্পরলম্বচ্ছেদী দুইটি সরলরেখা লইয়া উহাদের সাপেক্ষে ঐ স্থানের অবস্থান নির্ণয় করা হইয়া থাকে।

এইভাবে কোন স্থানের অবস্থান নির্দেশ গণিত শাস্ত্রের যে শাখায় আলোচিত হয় তাহাকে **দ্বিমাত্রিক স্থানাঙ্ক জ্যামিতি** বলে।

1-2. বিন্দুর স্থানাঙ্ক।



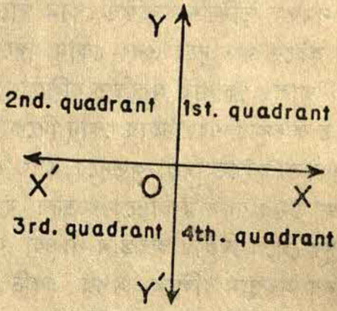
কোন বিন্দু P এর অবস্থান নির্দেশ করিবার জন্য, বিন্দুটির সহিত একই কাগজে (বা সমতলে) অবস্থিত দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখা $X'OX$ এবং $Y'OY$ পরস্পর লম্বভাবে

লইলাম এবং P বিন্দু হইতে উহাদের উপর যথাক্রমে PN এবং PM লম্ব টানিলাম। তাহা হইলে, NP এবং MP (বা ON) যথাক্রমে $X'OX$ এবং $Y'OY$ হইতে P বিন্দুর দূরত্ব নির্দেশ করিবে।

এইরূপক্ষেত্রে $X'OX$ কে **x-অক্ষ** (x-axis) এবং $Y'OY$ কে **y-অক্ষ** (y-axis) এবং O বিন্দুকে **মূলবিন্দু** (origin) বলা হয়।

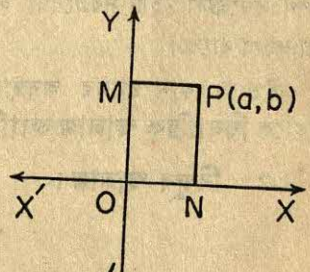
পাদ (Quadrant):

এখানে $X'OX$ এবং $YO'Y$ অক্ষদ্বয় সমগ্র সমতলটিকে XOY, YOX', $X'OY'$ এবং $Y'OX$ এই চারিটি অংশে বিভক্ত করে; ইহাদিগকে যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় ও চতুর্থ **পাদ** (Quadrant) বলা হয়।

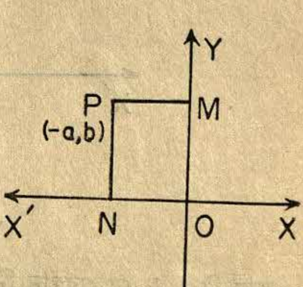


(1) মনে করি, P বিন্দুটি প্রথম পাদে অবস্থিত এবং $ON=a$ একক ও $NP=b$ একক।

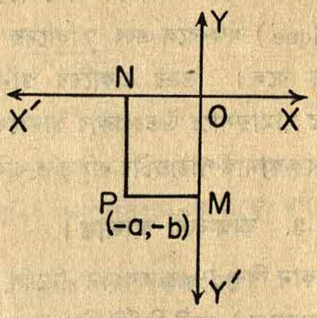
এইরূপক্ষেত্রে, a-কে P বিন্দুর **x-স্থানাঙ্ক** (x-coordinate) বা **ভুজ** (abscissa) এবং b-কে P বিন্দুর **y-স্থানাঙ্ক** (y-coordinate) বা **কোটি** (ordinate) বলা হয়; P বিন্দুর স্থানাঙ্ককে সংক্ষেপে (a, b) রূপে লেখা হয়।



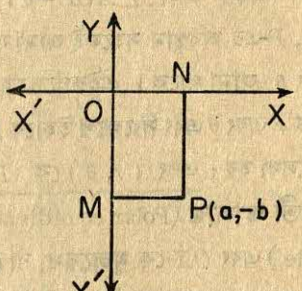
(2) মনে করি, P বিন্দুটি দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত এবং $ON=a$ একক ও $NP=b$ একক। এইরূপক্ষেত্রে P বিন্দুর x-স্থানাঙ্ক বা ভুজ $-a$ এবং y-স্থানাঙ্ক বা কোটি b; এই P বিন্দুর স্থানাঙ্ককে সংক্ষেপে ($-a, b$) রূপে লেখা হয়।



(3) মনে করি, P বিন্দুটি তৃতীয় পাদে অবস্থিত এবং $ON=a$ একক ও $NP=b$ একক। এখানে, P বিন্দুর x-স্থানাঙ্ক বা ভুজ $-a$, এবং y-স্থানাঙ্ক বা কোটি $-b$; এই P বিন্দুর স্থানাঙ্ককে সংক্ষেপে $(-a, -b)$ রূপে লেখা হয়।



(4) মনে করি, P বিন্দুটি চতুর্থ পাদে অবস্থিত এবং $ON=a$ একক ও $NP=b$ একক। এখানে P বিন্দুর x-স্থানাঙ্ক বা ভুজ a এবং y-স্থানাঙ্ক বা কোটি $-b$; এই P বিন্দুর স্থানাঙ্ককে সংক্ষেপে $(a, -b)$ রূপে লেখা হয়।



(5) $a>0$ হইলে, $A(a, 0)$, $B(0, a)$, $C(-a, 0)$, এবং $D(0, -a)$ বিন্দুগুলি যথাক্রমে OX, OY, OX' এবং OY' এর উপর অবস্থিত। মূলবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, 0)$।

উদাহরণস্বরূপ, $P_1(3, 4)$, $P_2(-3, 4)$, $P_3(-3, -4)$ এবং $P_4(3, -4)$ বিন্দুগুলি যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় ও চতুর্থ পাদে এবং $A_1(5, 0)$, $A_2(0, 5)$, $A_3(-5, 0)$ ও $A_4(0, -5)$ বিন্দুগুলি যথাক্রমে OX, OY, OX' ও OY' এর উপর অবস্থিত হইবে।

দ্রষ্টব্য : y-অক্ষের ডানদিকে যে কোন বিন্দুর ভুজ ধনাত্মক এবং বামদিকে অবস্থিত যে কোন বিন্দুর ভুজ ঋণাত্মক।

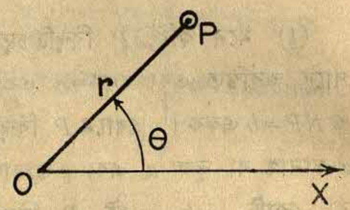
x-অক্ষের উপরের দিকে যে কোন বিন্দুর কোটি ধনাত্মক এবং নীচের দিকের যে কোন বিন্দুর কোটি ঋণাত্মক।

মন্তব্য : পূর্ব আলোচনায় অক্ষদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করিয়াছে। এইরূপ ক্ষেত্রে অক্ষদ্বয়কে **সমকৌণিক** (rectangular) **অক্ষ** বলা হয় এবং এইরূপ অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে যে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ককে **সমকৌণিক স্থানাঙ্ক** বলা হয়।

যদি অক্ষদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে ছেদ না করে, তবে তখন অক্ষদ্বয়কে তির্যক (oblique) অক্ষ বলে এবং তাহাদের সাপেক্ষে যে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ককে তির্যক স্থানাঙ্ক বলে। উভয় প্রকারের স্থানাঙ্কের আবিষ্কারক **Des Cartes.** সেইজন্য তাহার নামানুসারে উভয়প্রকার স্থানাঙ্কের নাম কার্তেসিয়ান্ (Cartesian) স্থানাঙ্ক। তির্যক স্থানাঙ্ক পাঠ্যসূচীর বহির্ভূত বলিয়া, এই পাঠ্যপুস্তকে তাহা আলোচিত হইবে না।

1-3. অক্ষবর্তী স্থানাঙ্ক।

কোন বিন্দু P-এর অবস্থান নির্দেশ করিবার জন্য বিন্দুটির সহিত একই কাগজে (বা সমতলে) একটি নির্দিষ্ট বিন্দু O এবং নির্দিষ্ট সরলরেখা OX লইলাম। মনে করি, $OP=r$ একক এবং $\angle XOP=\theta$। তাহা হইলে, P-এর অবস্থান সহজেই জানা যায় যদি r এবং θ জানা থাকে। এইরূপক্ষেত্রে P-এর স্থানাঙ্ক r এবং θ এবং সংক্ষেপে ইহাকে $P(r,\theta)$ রূপে লেখা হয় ; এবং (r,θ) কে P বিন্দুর



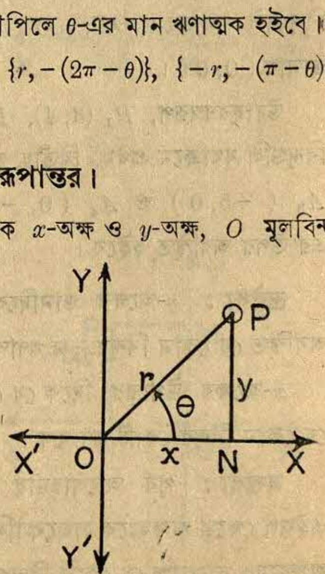
অক্ষবর্তী স্থানাঙ্ক (Polar co-ordinates) বলা হয়। এখানে O-কে **মূলবিন্দু** (Origin or Pole) এবং OX-কে **মূলরেখা** বা **প্রারম্ভিক রেখা** (Initial line) বলা হয়।

r-এর মান ধনাত্মক হইবে যদি উহা O হইতে P-এর দিকে মাপা হয় ; অন্যথায় ইহার মান ঋণাত্মক হইবে। OX হইতে ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীতক্রমে মাপিলে θ-এর মান ধনাত্মক এবং ঘড়ির কাঁটার গতিরক্রমে মাপিলে θ-এর মান ঋণাত্মক হইবে।

বিশেষ দ্রষ্টব্য : (r,θ), $(-r,\ \pi+\theta)$, $\{r, -(2\pi-\theta)\}$, $\{-r, -(\pi-\theta)\}$ একই বিন্দুকে নির্দেশ করে।

1-4. এক পদ্ধতি হইতে অপর পদ্ধতিতে রূপান্তর।

মনে করি, $X'X$ ও $Y'Y$ যথাক্রমে সমকৌণিক x-অক্ষ ও y-অক্ষ, O মূলবিন্দু এবং OX মূলরেখা। P বিন্দুর সমকৌণিক কার্তেসিয়ান্ (Cartesian) স্থানাঙ্ক (x, y) এবং অক্ষবর্তী স্থানাঙ্ক (r,θ). OX-এর উপর PN লম্ব, যেখানে N, OX উপর অবস্থিত। তাহা হইলে,



$$ON=x,\ NP=y\ ;$$
$$OP=r,\ \angle NOP=\theta.$$

এখন, PON ত্রিভুজ হইতে পাই :

$$x = ON = OP \cos \widehat{PON} = r\cos\theta, \qquad \cdots \quad (1)$$

$$y = PN = OP \sin \widehat{PON} = r\sin\theta, \qquad \cdots \quad (2)$$

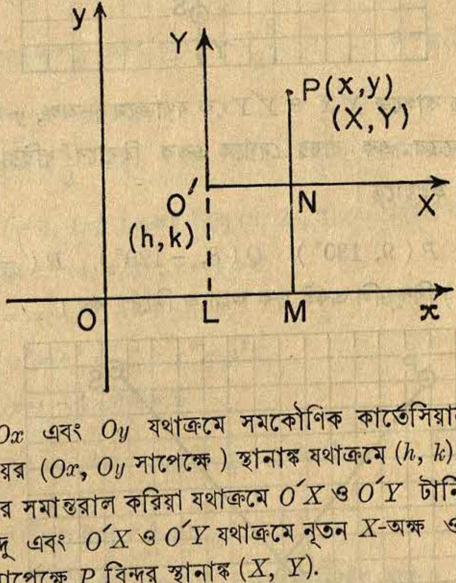
$$r = OP = \sqrt{ON^2 + PN^2} = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \cdots \quad (3)$$

$$\tan\theta = \frac{PN}{ON} = \frac{y}{x}, \text{ অর্থাৎ } \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}, \qquad \cdots \quad (4)$$

(1) এবং (2) তে সমকৌনিক কার্তেসিয়ান্ স্থানাঙ্ক x ও y অক্ষবর্তী স্থানাঙ্কে এবং (3) ও (4) তে অক্ষবর্তী স্থানাঙ্ক r ও θ সমকৌনিক কার্তেসিয়ান্ স্থানাঙ্কে রূপান্তরিত করার সূত্র দেওয়া হইল।

উপরোক্ত চারিটি সম্বন্ধ P-এর যে কোন অবস্থানের জন্য সিদ্ধ হইবে।

1-5. বিন্দুর স্থানাঙ্ক পরিবর্তন।



মনে করি, Ox এবং Oy যথাক্রমে সমকৌনিক কার্তেসিয়ান্ x-অক্ষ ও y-অক্ষ। O' এবং P বিন্দুদ্বয়ের (Ox, Oy সাপেক্ষে) স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (h, k) এবং (x, y).

Ox ও Oy এর সমান্তরাল করিয়া যথাক্রমে $O'X$ ও $O'Y$ টানিলাম। মনে করি, O' নূতন মূলবিন্দু এবং $O'X$ ও $O'Y$ যথাক্রমে নূতন X-অক্ষ ও Y-অক্ষ এবং এই নূতন অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (X, Y).

Oy এর সমান্তরাল $O'L$ এবং PM টানি ; উহারা যেন Ox কে যথাক্রমে L ও M বিন্দুতে ছেদ করে এবং PM, $O'X$ কে N বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহা হইলে,

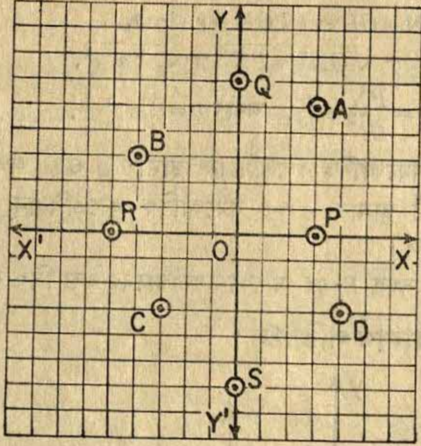
$$x = OM = OL + LM = OL + O'N = h + X;$$

$$y = PM = NM + PN = O'L + PN = k + Y.$$

$$\therefore \left.\begin{aligned} x &= h + X \\ y &= k + Y \end{aligned}\right\} \qquad \cdots \quad (A)$$

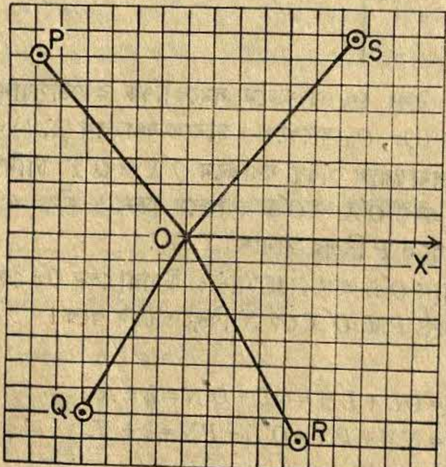
এক পদ্ধতি হইতে অন্য পদ্ধতিতে স্থানাঙ্ক পরিবর্তনের সূত্র (A) তে দেওয়া হইল।

উদাহরণ 1. একটি বর্গাঙ্কিত কাগজে $A(3, 5)$, $B(-4, 3)$, $C(-3, -3)$, $D(4, -3)$, $P(3, 0)$, $Q(0, 6)$, $R(-5, 0)$, $S(0, -6)$ বিন্দুগুলি নির্দেশ কর।



একটি বর্গাঙ্কিত কাগজে $X'X$ ও $Y'Y$ কে যথাক্রমে x-অক্ষ, y-অক্ষ, O কে মূলবিন্দু এবং ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘকে একক হিসাবে ধরিয়া প্রদত্ত বিন্দুগুলির অবস্থান নির্দেশ করা হইয়াছে।

উদাহরণ 2. $P(9, 130°)$, $Q(8, -120°)$, $R(-9, 120°)$ এবং $S(-10, -130°)$ বিন্দুগুলি একই ছক কাগজে নির্দেশ কর।



O মূলবিন্দু, OX প্রারম্ভিক রেখা; ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একবাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরিয়া P, Q, R, S বিন্দুগুলির অবস্থান নির্দেশ করা হইয়াছে।

উদাহরণ 3. (a) অক্ষবর্তী স্থানাঙ্কে লিখ :—

(i) $x=2,\ y=2\sqrt{3}$; (ii) $x^2+y^2=a^2$.

(b) সমকৌণিক কার্তেসিয়ান্ স্থানাঙ্কে পরিবর্তন কর :—

(i) $\left(-4, \frac{\pi}{6}\right)$ (ii) $r=a \sin 2\theta$,

(a) (i) যেহেতু, $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$,

$\therefore\ r\cos\theta=2$ এবং $r\sin\theta=2\sqrt{3}$

$\therefore\ (r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2=4+12$

বা, $r^2=16,\quad \therefore\ r=\pm 4$;

এখন, $r=4$ হইলে,

$4\cos\theta=2$ এবং $4\sin\theta=2\sqrt{3}$

অর্থাৎ $\cos\theta=\frac{1}{2}$ এবং $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\quad\therefore\ \theta=\pi/3$

কিন্তু $r=-4$ হইলে,

$\cos\theta=-\frac{1}{2}$ এবং, $\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; তখন $\theta=4\pi/3$.

কিন্তু $(4, \pi/3)$ ও $(-4, 4\pi/3)$ একই বিন্দু $(2, 2\sqrt{3})$ কে নির্দেশ করে।

সুতরাং নির্ণেয় উত্তর : $(4, \pi/3)$; $r=4>0$.

(ii) যেহেতু, $x=r\cdot\cos\theta,\ y=r\sin\theta$,

$\therefore\ x^2+y^2=r^2$; $\therefore\ r^2=a^2$.

(b) (i) এখানে, $r=-4$; $\theta=\pi/6$

$\therefore\ x=r\cos\theta=-4\cos\frac{\pi}{6}=-2\sqrt{3}$;

$y=r\sin\theta=-4\sin\frac{\pi}{6}=-2$;

সুতরাং, $(-4, \pi/6)$ বিন্দুটি $(-2\sqrt{3}, -2)$ কে নির্দেশ করে।

(ii) যেহেতু, $x=r\cos\theta$ এবং $y=r\sin\theta$,

এবং $x^2+y^2=r^2$

$\therefore\ r=2a\sin\theta.\cos\theta$

বা, $r^2=4a^2.\sin^2\theta.\cos^2\theta$,

বা, $x^2+y^2=4a^2.\frac{y^2}{r^2}\cdot\frac{x^2}{r^2}$

বা, $(x^2+y^2).(r^2)^2=4a^2x^2y^2$

বা, $(x^2+y^2)^3=4a^2x^2y^2$.

উদাহরণ 4. O' এবং P-এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(3, 4)$ এবং $(-4, 7)$. O' বিন্দু দিয়া সমান্তরাল অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে P এর স্থানাঙ্ক নির্দেশ কর।

P বিন্দুর নির্ণেয় স্থানাঙ্ক (X, Y) হইলে,

$x = h + X$ এবং $y = k + Y$ সূত্রের সাহায্যে, (এখানে, $h = 3$, $k = 4$)

$$-4 = 3 + X;\ 7 = 4 + Y.$$

অর্থাৎ, $X = -7$; $Y = 3$.

সুতরাং নির্ণেয় স্থানাঙ্ক : $(-7, 3)$

উদাহরণ 5. $(-2, 3)$ বিন্দু দিয়া সমান্তরাল অক্ষের সাপেক্ষে $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$ এর সমীকরণ লিখ।

এখানে, $x = -2 + X$; $y = 3 + Y$.

সুতরাং নির্ণেয় সমীকরণ :

$$(-2 + X)^2 + (3 + Y)^2 + 4(-2 + X) - 6(3 + Y) + 9 = 0$$

বা, $X^2 + Y^2 = 4$.

প্রশ্নমালা 1

1. একটি বর্গাঙ্কিত কাগজে নিম্নে প্রদত্ত বিন্দুগুলি নির্দেশ কর :—

$(5, 7), (-5, 6), (6, -4), (-4, -5), (0, -7), (0, 6), (-3, 0), (3, 0)$.

2. একটি বর্গাঙ্কিত কাগজে, $A(-2, 3)$, $B(-2, -2)$, $C(5, -2)$ এবং $D(5, 3)$ বিন্দুগুলির অবস্থান নির্দেশ কর এবং $ABCD$ চতুর্ভুজের প্রত্যেক বাহুর এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

3. একটি কাগজের সমতলে নিম্নে প্রদত্ত বিন্দুগুলির অবস্থান নির্দেশ কর :—

$(3, 45^\circ), (4, -60^\circ), (5, 330^\circ), (-6, 675^\circ), (-3, -180^\circ), (7, -420^\circ)$.

4. একটি কাগজে $P(5, -225^\circ)$ এবং $Q(-5, 585^\circ)$ বিন্দুদ্বয়ের অবস্থান নির্দেশ কর এবং তাহাদের দূরত্ব ও ঐ দূরত্বের বিপরীত মূলবিন্দুস্থ কোণের পরিমাপ নির্ণয় কর।

5. অক্ষবর্তী স্থানাঙ্কে পরিবর্তন কর :—

(i) $(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ (ii) $(-\sqrt{3}, 1)$, (iii) $\left(-\frac{5\sqrt{3}}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

6. সমকৌণিক কার্তেসিয়ান্ স্থানাঙ্কে লিখ :—

(i) $(3, 45^\circ)$, (ii) $(-4, \pi/3)$, (iii) $(-6, -\pi/6)$.

7. অক্ষবর্তী স্থানাঙ্কে রূপান্তর কর :—

(i) $x^2 + y^2 = 2ax$, (ii) $x^2 - y^2 = 4$, (iii) $xy = c^2$.

8. সমকৌণিক স্থানাঙ্কে রূপান্তর কর :—

(*i*) $r = a \cos\theta$, (*ii*) $r^2 = a^2 \cos 2\theta$, (*iii*) $r^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\theta}{2}$

9. $P(-2, -6)$ এবং $Q(4, 2)$ বিন্দুদ্বয়ের অবস্থান বর্গাঙ্কিত কাগজে দেখাও। লক্ষ্য কর, $R(1, -2)$ বিন্দুটি PQ রেখার উপর অবস্থিত।

10. O', A এবং P বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(2, 3)$, $(5, 7)$ এবং $(-3, 6)$. O' বিন্দুর মধ্য দিয়া সমান্তরাল অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে A ও P-এর স্থানাঙ্ক কি হইবে ?

11. $(1, -2)$ বিন্দু দিয়া এবং x-অক্ষ ও y-অক্ষের সমান্তরাল অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে $(-4, -5)$, $(0, -3)$ ও $(4, 6)$ এর স্থানাঙ্ক কি হইতে পারে ?

12. $(2, 3)$ বিন্দু দিয়া সমান্তরাল অক্ষের সাপেক্ষে নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি কি হইতে পারে বল :

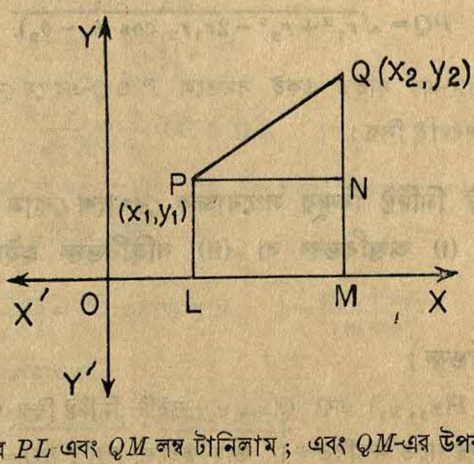
(*i*) $3x + 4y = 7$ (*ii*) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$

(*iii*) $x^2 - y^2 - 4x + 6y = 9$ (*iv*) $y^2 - 4x - 6y + 17 = 0$.

13. $(-2, 1)$ বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরিলে সমান্তরাল অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে $x^2 - 3y^2 + 4x + 6y = 0$ এর কি পরিবর্তন হইবে ?

1-6. দুইটি বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয়।

(*a*) মনে করি, P ও Q দুইটি বিন্দু যাহাদের সমকৌণিক কার্তেসিয়ান্ স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2).



x-অক্ষের উপর PL এবং QM লম্ব টানিলাম ; এবং QM-এর উপর PN লম্ব টানি।

এখন, $PN = LM = OM - OL = x_2 - x_1$;

$QN = QM - NM = QM - PL = y_2 - y_1$.

$\therefore$ $\angle QNP = 90^\circ$ বলিয়া,

$$PQ^2 = PN^2 + QN^2$$

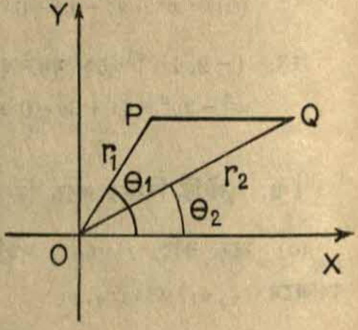
$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\therefore \quad \mathbf{PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}.$$

মন্তব্য : XOY সমতলে P এবং Q-এর যে কোন পদে বা যে কোন অবস্থানের জন্য উপরোক্ত সূত্রটি সর্ব্বদাই প্রযোজ্য।

দ্রষ্টব্য : $OP = \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$.

(b) মনে করি, P এবং Q বিন্দুদ্বয়ের অক্ষবর্তী স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (r_1, θ_1) এবং (r_2, θ_2).



এখানে, $OP = r_1$; $OQ = r_2$;

$\angle POQ = \theta_1 - \theta_2$.

ত্রিকোণমিতি হইতে,

PQ^2

$= OP^2 + OQ^2 - 2.OP.OQ \cos \widehat{POQ}$

$= r_1^2 + r_1^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$

$$\therefore \quad \mathbf{PQ = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}}.$$

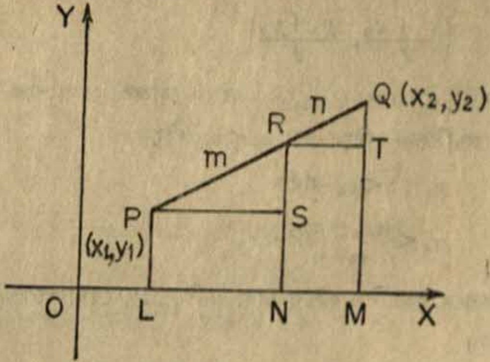
মন্তব্য : OX-এর সহিত একই সমতলে P ও Q-এর যে কোন অবস্থানের জন্য উপরোক্ত সূত্রটি সর্বদাই সিদ্ধ।

1-7. দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুর সংযোজক রেখাংশ কোন নির্দিষ্ট অনুপাতে একটি বিন্দুতে (i) অন্তর্বিভক্ত বা (ii) বহির্বিভক্ত হইলে সেই বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয়।

(I) অন্তর্বিভক্ত।

মনে করি, $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং PQ রেখাংশ R বিন্দুতে $m : n$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত। তাহা হইলে, $PR : RQ = m : n$.

মনে করি, R বিন্দুর স্থানাঙ্ক (h, k).



y-অক্ষের সমান্তরাল করিয়া PL, QM, RN সরলরেখা টানি ; উহারা যেন x-অক্ষকে যথাক্রমে L, M ও N বিন্দুতে ছেদ করিল। x-অক্ষের সমান্তরাল করিয়া, PS এবং RT টানি ; উহারা যেন RN এবং QM-কে যথাক্রমে S এবং T বিন্দুতে ছেদ করে।

এখন, $OL = x_1$; $OM = x_2$; $ON = h$;

$PL = y_1$; $QM = y_2$; $RN = k$;

তাহা হইলে, $PS = LN = ON - OL = h - x_1$;

$RT = NM = OM - ON = x_2 - h$;

এবং $RS = RN - SN = RN - PL = k - y_1$;

$QT = QM - TM = QM - RN = y_2 - k.$

PRS এবং RQT সদৃশকোণী ত্রিভুজ বলিয়া,

$$\frac{PS}{RT} = \frac{RS}{QT} = \frac{PR}{RQ}$$

$$\therefore \quad \frac{h - x_1}{x_2 - h} = \frac{k - y_1}{y_2 - k} = \frac{m}{n}.$$

সুতরাং, $\dfrac{h - x_1}{x_2 - h} = \dfrac{m}{n}$ হইতে পাই,

$$nh - nx_1 = mx_2 - mh \quad \text{বা,} \quad (m + n)h = mx_2 + nx_1$$

$$\therefore \quad h = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}$$

সেইরূপ, $\dfrac{k - y_1}{y_2 - k} = \dfrac{m}{n}$ হইতে পাই, $\quad k = \dfrac{my_2 + ny_1}{m + n}$

সুতরাং, R বিন্দুর স্থানাঙ্ক :

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m + n}, \ \frac{my_2 + ny_1}{m + n}\right)$$

দ্রষ্টব্য : $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ এর সংযোজক রেখাংশের **মধ্যবিন্দুর** স্থানাঙ্ক :

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

মন্তব্য : $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ এর সংযোজক রেখাংশকে $R(h, k)$ বিন্দু $m : n$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করিলে এবং $x_1 < x_2$ হইলে

$$x_1 < h < x_2 \text{ অর্থাৎ}$$

$$x_1 < \frac{mx_2 + nx_1}{m+n} < x_2$$

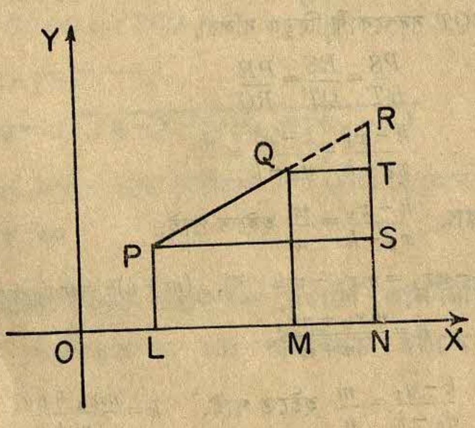
এবং বিপরীতক্রমে, ইহা সিদ্ধ হইলে $R(h, k)$ বিন্দু, PQ রেখাংশকে $m : n$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করিবে।

বিশেষ প্রয়োজনীয় সিদ্ধান্ত : $R(h, k)$ বিন্দু $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ সংযোজক রেখাংশকে $m : n$ অনুপাতে অর্থাৎ $\lambda : 1$ অনুপাতে বিভক্ত করিলে যেখানে $\lambda = m/n$,

$$h = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n} \text{ এবং } k = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}$$

$$\text{অর্থাৎ } h = \frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1} \text{ এবং } k = \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda + 1}, \quad (\lambda > 0).$$

[2] **বহির্বিভক্ত।**



মনেকরি, $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু। PQ রেখাংশ R বিন্দুতে $m : n$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত অর্থাৎ $PR : RQ = m : n$.

মনেকরি, R বিন্দুর স্থানাঙ্ক (h, k).

y-অক্ষের সমান্তরাল করিয়া, PL, QM, RN সরলরেখা টানি ; উহারা যেন x-অক্ষকে যথাক্রমে L, M ও N বিন্দুতে ছেদ করে। x-অক্ষের সমান্তরাল করিয়া, PS এবং QT টানি ; উহারা যেন RNকে যথাক্রমে S এবং T বিন্দুতে ছেদ করে।

এখন, $PS = LN = ON - OL = h - x_1$;

$QT = MN = ON - OM = h - x_2$;

এবং $RS = RN - SN = RN - PL = k - y_1$;

$RT = RN - TN = RN - QM = k - y_2$.

PRS এবং QRT সদৃশকোণী ত্রিভুজ বলিয়া,

$$\frac{PS}{QT} = \frac{RS}{RT} = \frac{PR}{QR}$$

$$\therefore \quad \frac{h - x_1}{h - x_2} = \frac{k - y_1}{k - y_2} = \frac{m}{n}$$

সুতরাং, $\dfrac{h - x_1}{h - x_2} = \dfrac{m}{n}$ হইতে পাই,

$$nh - nx_1 = mh - mx_2$$

বা, $(m - n)h = mx_2 - nx_1$

$$\therefore \quad h = \frac{mx_2 - nx_1}{m - n}.$$

সেইরূপ, $\dfrac{k - y_1}{k - y_2} = \dfrac{m}{n}$ হইতে পাই,

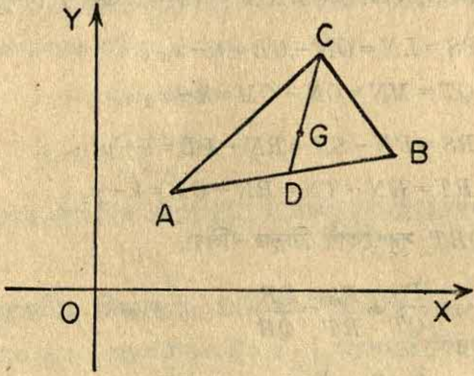
$$k = \frac{my_2 - ny_1}{m - n}.$$

সুতরাং, R বিন্দুর স্থানাঙ্ক :

$$\left(\frac{mx_2 - nx_1}{m - n}, \ \frac{my_2 - ny_1}{m - n}\right)$$

মন্তব্য : $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ এর সংযোজক PQ রেখাংশ $R(h, k)$ বিন্দুতে $m : n$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত হইলে এবং $x_1 < x_2$ হইলে, $x_1 < x_2 < h$ অর্থাৎ $x_1 < x_2 < \dfrac{mx_2 - nx_1}{m - n}$ এবং বিপরীতক্রমে ইহা সিদ্ধ হইলে $R(h, k)$ বিন্দু PQ কে $m : n$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত করিবে।

1-8. ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয়।



মনে করি, ABC ত্রিভুজের A, B, C বিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1), (x_2, y_2) ও (x_3, y_3).

মনে করি, ABC ত্রিভুজের CD একটি মধ্যমা এবং G ভরকেন্দ্র। তাহা হইলে, $AD = BD$ এবং $CG = 2DG$ অর্থাৎ

$AD : DB = 1 : 1.$ এবং $CG : GD = 2 : 1.$

তাহা হইলে, D, AB এর মধ্যবিন্দু।

স্থতরাং D বিন্দুর স্থানাঙ্ক : $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

ধরি, G বিন্দুর স্থানাঙ্ক (h, k). তাহা হইলে,

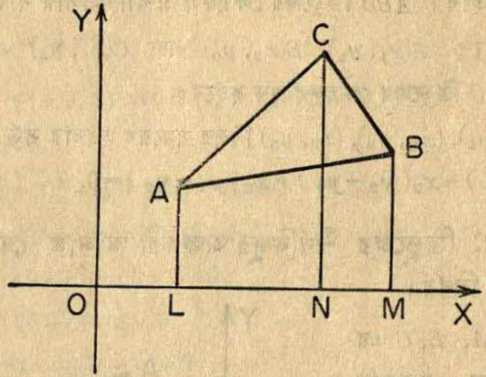
$$h = \frac{2.\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + 1.x_3}{2+1} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},$$

$$k = \frac{2.\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) + 1.y_3}{2+1} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

স্থতরাং ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক :

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right).$$

1-9. তিনটি নির্দিষ্ট বিন্দুর সংযোগে উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়।



মনে করি, A, B, C বিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), y-অক্ষের সমান্তরাল করিয়া AL, BM, CN, সরলরেখা টানি ; উহারা যেন x-অক্ষকে যথাক্রমে L, M, N বিন্দুতে ছেদ করে।

এখন, $AL = y_1$; $BM = y_2$; $CN = y_3$

$$LN = ON - OL = x_3 - x_1 ;$$
$$NM = OM - ON = x_2 - x_3 ;$$
$$LM = OM - OL = x_2 - x_1.$$

$\triangle ABC$ = ট্রাপিজিয়ম $ALNC$ + ট্রাপিজিয়ম $CNMB$ − ট্রাপিজিয়ম $ALMB$

$$= \tfrac{1}{2}(AL + CN) \times LN + \tfrac{1}{2}(CN + BM) \times NM - \tfrac{1}{2}(AL + BM) \times LM$$
$$= \tfrac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) + \tfrac{1}{2}(y_3 + y_2)(x_2 - x_3) - \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1)$$
$$= \tfrac{1}{2}\{x_3(y_1 + y_3) - x_1(y_1 + y_3) + x_2(y_3 + y_2)$$
$$- x_3(y_3 + y_2) + x_1(y_1 + y_2) - x_2(y_1 + y_2)\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}$$

$$\therefore \quad \triangle ABC = \tfrac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}$$

মন্তব্য : $x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)$ রাশিমালাটির মান ধনাত্মক বা ঋণাত্মক বা শূন্য হইতে পারে। A, B, C একই সরলরেখায় অবস্থান করিলে ঐ রাশিমালার মান শূন্য হইবে ; অন্যথায় ইহার মান ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হইবে। A, B, C বিন্দুত্রয়কে যদি পরপর এমনভাবে লওয়া যায় যাহাতে A হইতে B, B হইতে C এবং C হইতে A তে আবর্তের সময় ABC ত্রিভুজটি সর্বদাই বামপার্শ্বে থাকে তবে ঐ রাশিমালার মান ধনাত্মক হইবে ; আর ঐ আবর্তের সময় ABC ত্রিভুজটি সর্বদাই ডানপার্শ্বে

থাকিলে ঐ রাশিমালার মান ঋণাত্মক হইবে। কিন্তু উভয় ক্ষেত্রেই ঐ রাশিমালার সাংখ্যমান একই হইবে। ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ঐ রাশিমালার সাংখ্যমান হইবে।

বিশেষ দ্রষ্টব্য : $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ এবং $C(x_3, y_3)$ একই সরলরেখার উপর থাকিলে ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল শূন্য হইবে।

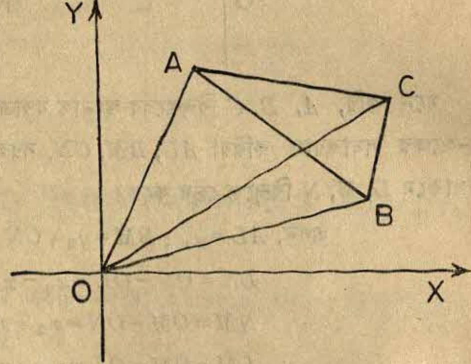
সুতরাং (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) বিন্দুর সমরেখ হইবার সর্ত :

$$x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)=0.$$

1-10. ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুর অক্ষবর্তী স্থানাঙ্ক দেওয়া থাকিলে উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয়।

মনে করি, A, B, C এর অক্ষবর্তী স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (r_1,θ_1), (r_2, θ_2), (r_3, θ_3).

এখন, $OA=r_1$; $OB=r_2$; $OC=r_3$; $\widehat{AOX}=\theta_1$; $\widehat{BOX}=\theta_2$; $\widehat{COX}=\theta_3$.



$\triangle ABC$

$=\triangle AOC+\triangle COB-\triangle AOB$

$$=\tfrac{1}{2}OA.OC.\sin\widehat{AOC}+\tfrac{1}{2}OC.OB.\sin\widehat{COB}-\tfrac{1}{2}\,OA.OB.\sin\widehat{AOB}$$

$$=\tfrac{1}{2}r_1r_3\sin(\theta_1-\theta_3)+\tfrac{1}{2}\,r_3r_2\sin(\theta_3-\theta_2)-\tfrac{1}{2}\,r_1r_2\sin(\theta_1-\theta_2)$$

$$\therefore\quad \triangle ABC=\tfrac{1}{2}\{r_1r_2\sin(\theta_2-\theta_1)+r_2r_3\sin(\theta_3-\theta_2)+r_3r_1\sin(\theta_1-\theta_3)\}$$

মন্তব্য : $\frac{1}{2}\{r_1r_2\sin(\theta_2-\theta_1)+r_2r_3\sin(\theta_3-\theta_2)+r_3r_1\sin(\theta_1-\theta_3)\}$; রাশিমালাটির মান ধনাত্মক বা ঋণাত্মক বা শূন্য হইতে পারে। ঐ রাশিমালার মান শূন্য হইলে A, B, C সমরেখ হইবে। অন্যথায় উহার মান ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হইবে ; এবং তখন উহার সাংখ্যমান ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল হইবে।

উদাহরণ 1. নিম্নে প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর :

(i) $(4,-3)$, $(-2, 5)$; (ii) $(-3,-5)$, $(-8, 7)$.

(i) নির্ণেয় দূরত্ব $=\sqrt{(4+2)^2+(-3-5)^2}$ একক

$=\sqrt{(36+64)}$ একক

$=\sqrt{100}$ একক $=10$ একক.

(ii) নির্ণেয় দূরত্ব $= \sqrt{(-3+8)^2+(-5-7)^2}$ একক

$= \sqrt{25+144}$ একক

$= 13$ একক.

উদাহরণ 2. $P(-3, 3)$ এবং $Q(4, k)$ বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব $5\sqrt{2}$ একক হইলে Q এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

$PQ^2 = (4+3)^2 + (k-3)^2$; কিন্তু $PQ = 5\sqrt{2}$

$\therefore \quad (4+3)^2 + (k-3)^2 = (5\sqrt{2})^2$

বা, $49 + k^2 - 6k + 9 = 50$

বা, $k^2 - 6k + 8 = 0$

বা, $(k-2)(k-4) = 0$

$\therefore \quad k = 2, 4.$

সুতরাং, Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক : $(4, 2)$, বা, $(4, 4)$.

উদাহরণ 3. যে বিন্দুটি $A(2, 6)$, $B(-2, -2)$ এবং $C(-5, -1)$ হইতে সমদূরবর্তী তাহার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

মনে করি, $P(h, k)$ নির্ণেয় বিন্দু। তাহা হইলে, $PA = PB = PC$.

এখন, $PA = \sqrt{\{(h-2)^2 + (k-6)^2\}}$;

$PB = \sqrt{\{(h+2)^2 + (k+2)^2\}}$;

$PC = \sqrt{\{(h+5)^2 + (k+1)^2\}}$;

$\therefore \quad (h-2)^2 + (k-6)^2 = (h+2)^2 + (k+2)^2$

বা, $h + 2k = 4 \quad \cdots \quad (1)$

আবার, $(h+2)^2 + (k+2)^2 = (h+5)^2 + (k+1)^2$

বা, $k - 3h = 9 \quad \cdots \quad (2)$

(1) এবং (2) হইতে, $h = -2$, $k = 3$.

সুতরাং নির্ণেয় স্থানাঙ্ক : $(-2, 3)$.

উদাহরণ 4. দেখাও যে, $(3, 3)$, $(-3, -5)$ এবং $(-5, -3)$ বিন্দুগুলি একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু। **[P. U. 1960]**

মনে করি, A, B, C বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(3, 3)$, $(-3, -5)$ এবং $(-5, -3)$. তাহা হইলে,

$AB^2 = (3+3)^2 + (3+5)^2 = 100$; $\quad \therefore \quad AB = 10$;

$BC^2 = (-3+5)^2 + (-5+3)^2 = 8$; $\therefore$ $BC = 2\sqrt{2}$;

$CA^2 = (-5-3)^2 + (-3-3)^2 = 100$; $\therefore$ $CA = 10$

$\therefore$ $AB = CA \neq BC$

স্থতরাং, ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

উদাহরণ 5. A, B, C বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(3, 20^\circ)$, $(3\sqrt{3}, 50^\circ)$ এবং $(3, 80^\circ)$ হইলে দেখাও যে, ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

$$AB = \sqrt{\{3^2 + (3\sqrt{3})^2 - 2 \,.\, 3 \,.\, (3\sqrt{3}) \,.\, \cos(50^\circ - 20^\circ)\}}$$
$$= \sqrt{\{9 + 27 - 18\sqrt{3}\cos 30^\circ\}}$$
$$= \sqrt{\{9 + 27 - 27\}} = 3 ;$$

$$BC = \sqrt{\{(3\sqrt{3})^2 + 3^2 - 2 \,.\, (3\sqrt{3}) \,.\, 3 \,.\, \cos(80^\circ - 50^\circ)\}}$$
$$= \sqrt{\{27 + 9 - 18\sqrt{3}\cos 30^\circ\}}$$
$$= \sqrt{\{27 + 9 - 27\}} = 3 ;$$

$$CA = \sqrt{\{3^2 + 3^2 - 2 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, \cos(80^\circ - 20^\circ)\}}$$
$$= \sqrt{\{18 - 18\cos 60^\circ\}}$$
$$= \sqrt{\{18 - 9\}} = 3.$$

স্থতরাং, $AB = BC = CA = 3$ একক.

$\therefore$ ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

উদাহরণ 6. দেখাও যে, $(-5, 2)$, $(-5, -3)$, $(2, -3)$ এবং $(2, 2)$ বিন্দুগুলি একটি আয়তক্ষেত্রের কৌণিক বিন্দু।

মনে করি, A, B, C, D বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-5, 2)$, $(-5, -3)$, $(2, -3)$ এবং $(2, 2)$.

এখন, $AB^2 = (-5+5)^2 + (2+3)^2 = 25$;

$BC^2 = (-5-2)^2 + (-3+3)^2 = 49$;

$CD^2 = (2-2)^2 + (-3-2)^2 = 25$;

$DA^2 = (-5-2)^2 + (2-2) = 49$;

$\therefore$ $AB = CD = 5$; $BC = DA = 7$.

স্থতরাং, $ABCD$ একটি সামান্তরিক।

এখন, $AC^2 = (2+5)^2 + (-3-2)^2 = 74$;

এবং $AB^2 + BC^2 = 25 + 49 = 74$.

$\therefore$ $AC^2 = AB^2 + BC^2$

তাহা হইলে, $\angle ABC = 90^\circ$.

$\therefore$ $ABCD$ একটি আয়তক্ষেত্র।

উদাহরণ 7. একটি ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক $(-2, 6)$, $(2, 8)$ এবং $(2, -2)$ হইলে, ঐ ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র এবং পরি-ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

মনে করি, A, B, C বিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-2, 6)$, $(2, 8)$, $(2, -2)$ এবং $P(h, k)$, ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র।

তাহা হইলে, $PA = PB = PC$ বা, $PA^2 = PB^2 = PC^2$.

$\therefore\ (h+2)^2 + (k-6)^2 = (h-2)^2 + (k-8)^2 = (h-2)^2 + (k+2)^2$

বা, $4h - 12k + 40 = -4h - 16k + 68 = -4h + 4k + 8$

বা, $h - 3k + 8 = -h - 4k + 15 = -h + k.$

স্থতরাং, $h = 2$ এবং $k = 3$.

$\therefore$ ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র : $(2, 3)$

ABC ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ :

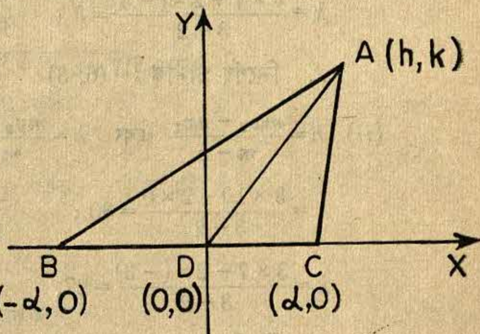
$PA = \sqrt{\{(2+2)^2 + (3-6)^2\}}$ একক

$= \sqrt{(16+9)}$ একক $= 5$ একক।

উদাহরণ 8. ABC ত্রিভুজের BC বাহুর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমা AD হইলে স্থানাঙ্ক জ্যামিতির সাহায্যে প্রমাণ কর :

$$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$$ **[P. U. 1969]**

ABC সমতলে D-কে মূল বিন্দু, BC বরাবর x-অক্ষ এবং উহার লম্বভাবে y-অক্ষ লই। মনে করি, A-এর স্থানাঙ্ক (h, k) এবং C-এর স্থানাঙ্ক $(\alpha, 0)$. তাহা হইলে B-এর স্থানাঙ্ক $(-\alpha, 0)$,



এখন, $AB^2 = (h+\alpha)^2 + k^2$;

$AC^2 = (h - \alpha^2) + k^2$;

$\therefore\ AB^2 + AC^2 = (h+\alpha)^2 + k^2 + (h-\alpha)^2 + k^2$

$= 2(h^2 + k^2 + \alpha^2)$ ... ... (1)

আবার, $AD^2 = h^2 + k^2$; $BD^2 = \alpha^2$

$\therefore\ 2(AD^2 + BD^2) = 2(h^2 + k^2 + \alpha^2)$ ... ... (2)

(1) এবং (2) হইতে পাই,

$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$.

উদাহরণ 9. $A(-3, 5)$ এবং $B(7, -11)$ বিন্দুদ্বয় সংযোজক রেখাংশের মধ্য বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

নির্ণেয় স্থানাঙ্ক : $\left[\frac{(-3)+7}{2}, \frac{5+(-11)}{2}\right]$

অর্থাৎ $(2, -3)$.

উদাহরণ 10. ABC ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক $(-5, 2)$, $(3, 7)$ এবং $(8, 0)$ হইলে উহার ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

নির্ণেয় স্থানাঙ্ক : $\left(\frac{-5+3+8}{3}, \frac{2+7+0}{3}\right)$;

অর্থাৎ $(2, 3)$.

উদাহরণ 11. $P(0, -3)$ এবং $Q(10, 7)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক PQ রেখাংশ কে যে বিন্দু $3 : 2$ অনুপাতে (i) অন্তর্বিভক্ত এবং (ii) বহির্বিভক্ত করে তাহাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(i) $h=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}$, $k=\frac{my_2+ny_1}{m+n}$ সূত্র হইতে পাই,

$$h=\frac{3\times10+2\times0}{3+2}=6;$$

$$k=\frac{3\times7+2\times(-3)}{3+2}=3;$$

$\therefore$ নির্ণেয় স্থানাঙ্ক : $(6, 3)$

(ii) $h=\frac{mx_2-nx_1}{m-n}$ এবং $k=\frac{my_2-ny_1}{m-n}$ সূত্র হইতে পাই,

$$h=\frac{3\times10-2\times0}{3-2}=30;$$

$$k=\frac{3\times7-2\times(-3)}{3-2}=27,$$

$\therefore$ নির্ণেয় স্থানাঙ্ক : $(30, 27)$

উদাহরণ 12. $P(-7, -3)$ এবং $Q(9, 5)$ সংযোজক রেখাংশ PQ কে $R(-1, 0)$ বিন্দু যে অনুপাতে বিভক্ত করে তাহা নির্ণয় করে।

যেহেতু P, Q, R বিন্দুত্রয়ের x-স্থানাঙ্ক হইতে দেখা যায়

$-7<-1<9$, R বিন্দুটি PQ কে **অন্তর্বিভক্ত** করে।

মনে করি, নির্ণেয় অনুপাত, $m : n$;

তাহা হইলে, $\frac{m \times 9 + n \times (-7)}{m+n} = -1$ অর্থাৎ, $5m = 3n$

$\therefore \quad m : n = 3 : 5.$

সুতরাং নির্ণেয় অনুপাত : $3 : 5$

উদাহরণ 13. $A(1,\ 2)$ এবং $B(10,\ -4)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ AB কে $P(16,\ -8)$ যে অনুপাতে বিভক্ত করে তাহা নির্ণয় কর।

এখানে A, B, P এর x-স্থানাঙ্ক হইতে স্পষ্টতঃ

$1 < 10 < 16$;

সুতরাং, P বিন্দু AB কে **বহির্বিভক্ত** করে। মনে করি ; নির্ণেয় অনুপাত $m : n$;

তাহা হইলে, $\frac{m \times 10 - n \times 1}{m-n} = 16$ অর্থাৎ, $2m = 5n$

$\therefore \quad m : n = 5 : 2$

সুতরাং নির্ণেয় অনুপাত : $5 : 2.$

উদাহরণ 14. ABC ত্রিভুজের $A, B,\ C$ কৌণিক বিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(5,\ -2), (-2,\ -3), (3,\ 7)$ হইলে উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর, এবং A হইতে BC বাহুর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

$\triangle ACB = \frac{1}{2}\{5(7+3) + 3(-3+2) - 2(-2-7)\}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}\{50 - 3 + 18\}$ বর্গ একক

$= 32\frac{1}{2}$ বর্গ একক

$BC = \sqrt{(-2-3)^2 + (-3-7)^2}$ একক

$= \sqrt{(25+100)}$ একক

$= 5\sqrt{5}$ একক

মনে করি, নির্ণেয় দৈর্ঘ্য $= p$ একক। তাহা হইলে,

$\triangle ACB = \frac{1}{2}.BC.p$

$\therefore \quad 32\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 5\sqrt{5} \times p$

$\therefore \quad p = \frac{13\sqrt{5}}{5}$ একক

উদাহরণ 15. $A,\ B,\ C$ ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক $(-3,\ -30^\circ)$; $(5,\ 150^\circ)$ এবং $(7,\ 210^\circ)$ হইলে উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}\{(-3) \times 5 \sin(150^\circ + 30^\circ) + 5 \times 7 \sin(210^\circ - 150^\circ)$
$+ 7 \times (-3) \sin(-30^\circ - 210^\circ)\}$

$= \frac{1}{2}\{-15 \sin 180^\circ + 35 \sin 60^\circ - 21 \sin(-240^\circ)\}$

$$=\tfrac{1}{2}\{-15\times 0+35\times \frac{\sqrt{3}}{2}+21\sin 240^\circ\}$$

$$=\tfrac{1}{2}\left\{\frac{35\sqrt{3}}{2}+21\sin(180^\circ+60^\circ)\right\}$$

$$=\tfrac{1}{2}\left\{\frac{35\sqrt{3}}{2}-21\sin 60^\circ\right\}$$

$$=\tfrac{1}{2}\left\{\frac{35\sqrt{3}}{2}-\frac{21\sqrt{3}}{2}\right\}=\frac{7\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore$ নির্ণেয় উত্তর : $\frac{7\sqrt{3}}{2}$ বর্গ একক।

উদাহরণ 16. দেখাও যে, (2, 3), (4, 1) এবং (−2, 7) বিন্দুগুলি সমরেখ।

এখানে, $2(1-7)+4(7-3)-2(3-1)$ [**P. U. 1967**]

$=-12+16-4=0$

স্থতরাং, বিন্দুত্রয় সমরেখ।

উদাহরণ 17. যে চতুর্ভুজের কৌণিক বিন্দুগুলি যথাক্রমে (2, 8), (0, −7), (8, −6) এবং (6, 11), তাহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

মনে করি, A, B, C, D বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (2, 8), (0, −7), (8, −6) এবং (6, 11).

$\therefore\ \triangle ABC=\tfrac{1}{2}\{2(-7+6)+0(-6-8)+8(8+7)\}$ বর্গ একক

$=\tfrac{1}{2}\{-2+120\}$ বর্গ একক $=59$ বর্গ একক

$\triangle CDA=\tfrac{1}{2}\{8(11-8)+6(8+6)+2(-6-11)\}$ বর্গ একক

$=\tfrac{1}{2}\{24+84-34\}$ বর্গ একক

$=37$ বর্গ একক

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $=(59+37)$ বর্গ একক

$=96$ বর্গ একক।

উদাহরণ 18. A, B, C, D বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (0, −1), (−1, 2) (15, 2) এবং (4, −5). AC রেখাংশ BD কে যে অনুপাতে বিভক্ত করে তাহা নির্ণয় কর।

মনে করি, AC রেখাংশ $B(-1, 2)$ ও $D(4, -5)$ এর সংযোজক রেখাংশ BD কে $m : n$ অনুপাতে $P(h, k)$ বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত করে। তাহা হইলে,

$$h=\frac{4m-n}{m+n};\ k=\frac{-5m+2n}{m+n}.$$

যেহেতু, $A(0, -1)$, $P(h, k)$, $C(15, 2)$ সমরেখ, সুতরাং

$$0 \times (k-2) + h(2+1) + 15(-1-k) = 0$$

বা, $h - 5k = 5$

বা, $\frac{4m-n}{m+n} - 5\left(\frac{2n-5m}{m+n}\right) = 5$

বা, $3m = 2n$; $\therefore$ $m : n = 2 : 3$.

সুতরাং, নির্ণেয় অনুপাত, 2 : 3.

প্রশ্নমালা 2

1. নিম্নে প্রদত্ত বিন্দুযুগলের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর :

(i) $(0, 0), (3, 4)$ (ii) $(2, 3), (5, 7)$

(iii) $(4, -7), (-2, 3)$, (iv) $(-3, 2), (-6, 7)$,

(v) $(a \cos \alpha, a \sin \alpha), (a \cos \beta, a \sin \beta)$

2. দেখাও যে, $(-2, -11)$ বিন্দুটি $(4, 6)$ এবং $(-3, 7)$ হইতে সমদূরবর্তী।

3. $(3, 4)$ এবং $(5, k)$ বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব $\sqrt{13}$ একক হইলে k এর মান নির্ণয় কর।

4. যে বিন্দুটি $(6, 9)$, $(8, 3)$ এবং $(2, 1)$ হইতে সমদূরবর্তী তাহার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

5. দেখাও যে, $(2, 4)$, $(2+\sqrt{3}, 5)$ এবং $(2, 6)$ বিন্দুগুলি একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[P. U. 1969, '71]**

6. দেখাও যে, $(2a, 6a)$, $(2a, 4a)$ এবং $(2a+\sqrt{3}a, 5a)$ বিন্দুগুলি একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু এবং ত্রিভুজটির প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য $2a$ একক। উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[C. U 1952 ; H. S. 1965]**

7. একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি $A(-1, 5)$, $B(3, 2)$ এবং $C(-1, -1)$. দেখাও যে, ইহা একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। ইহার ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। **[Joint Ent. Ex. 1971]**

8. দেখাও যে, $A(3, 3)$, $B(-2, -2)$ এবং $C(8, -2)$ বিন্দুগুলি একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু। উহার অতিভুজের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

9. দেখাও যে, $(0, 0)$, $(3, \pi/2)$ এবং $(3, \pi/6)$ বিন্দুগুলি একটি সমবাহু ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দু।

10. (a) $A(-a, \pi/6)$, $B(a, \pi/2)$ এবং $C(-2a, -\pi/3)$ যে ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তাহার বাহুগুলির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(b) $A \equiv (-a, \pi/6)$, $B \equiv (a, \pi/2)$, $C = (-a\sqrt{3}, -\pi/3)$ হইলে, ABC ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য কি হইবে ?

11. স্থানাঙ্ক জ্যামিতির সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ তৃতীয় বাহুর অর্ধেক।

12. A এবং B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(2, 4)$ এবং $(2, 6)$; AB এর যে পার্শ্বে মূলবিন্দু অবস্থিত তাহার বিপরীত পার্শ্বে P বিন্দু অবস্থিত। যদি PAB একটি সমবাহু ত্রিভুজ হয়, তবে P এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [**H. S. 1961**]

13. ABC ত্রিভুজের A, B, C এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(1, 2)$, $(3, -4)$ এবং $(5, -6)$. এই ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র ও পরি-ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

14. প্রমাণ কর যে, $(2, 1)$, $(0, 0)$, $(-1, 2)$ এবং $(1, 3)$ বিন্দুগুলি একটি বর্গক্ষেত্রের শীর্ষবিন্দু। [**P. U. 1975**]

15. প্রমাণ কর যে, $(2, -2)$, $(8, 4)$, $(5, 7)$ এবং $(-1, 1)$ বিন্দুগুলি একটি আয়তক্ষেত্রের কৌণিক বিন্দু। [**H. S. 1963**]

16. দেখাও যে, $(4, 3)$, $(6, 4)$, $(5, 6)$ এবং $(3, 5)$ বিন্দুগুলি একটি বর্গক্ষেত্রের কৌণিক বিন্দু। [**H. S. Comp. 1974**]

17. দেখাও যে, $(-1, 2)$, $(6, -3)$, $(4, -10)$ এবং $(-3, -5)$ বিন্দুগুলি একটি সামান্তরিকের কৌণিক বিন্দু। [**H. S. Comp. 1973**]

18. দেখাও যে, $(-7, 2)$, $(19, 8)$, $(15, -6)$ এবং $(-11, -12)$ এই বিন্দুগুলি একটি সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দু। [**H. S. Comp. 1975**]

19. $P\ (7, -4)$ এবং $Q\ (-5, 6)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [**H. S. 1964**]

20. $A\ (5, \pi/3)$ এবং $B\ (-5, -\pi/3)$ এর সংযোজক রেখাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

21. ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(2, 0)$, $(-4, 2)$ এবং $(6, -8)$. উহার মধ্যমাত্রয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

22. যে ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক নিম্নোক্ত তাহার ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক লিখ :

(i) $(-4, 5)$, $(8, 2)$, $(2, -1)$ (ii) $(0, -4)$, $(6, -2)$, $(3, 6)$.

23. $P\,(6, 4)$ এবং $Q\,(7, -5)$ এর সংযোজক রেখাংশ PQ কে যে বিন্দু $3 : 2$ অনুপাতে (i) অন্তর্বিভক্ত এবং (ii) বহির্বিভক্ত করে তাহাদের স্থানাঙ্ক লিখ।

R বিন্দুটি $(11, -6)$ হইলে, PR এর ক্ষেত্রে উহারা কি হইবে ?

24. (9, 5) এবং (−7, −3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশকে যে বিন্দু 5 : 3 অনুপাতে (*i*) অন্তর্বিভক্ত এবং (*ii*) বহির্বিভক্ত করে তাহার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

25. $P(-2, 0)$ ও $Q(7, -3)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ PQ এর সমত্রিখণ্ডক বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

26. (−2, 3) এবং (13, −9) বিন্দুদ্বয় সংযোজক রেখাংশের সমত্রিখণ্ডক যে বিন্দুটি প্রথম বিন্দুর নিকটবর্তী তাহার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

27. ABC ত্রিভুজের A ও B এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (−4, 6) এবং (2, −2) এবং ভরকেন্দ্র (−2, 3). C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

28. $P(-2, -3)$ এবং $Q(5, 11)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশকে $R(2, 5)$ বিন্দু যে অনুপাতে বিভক্ত করে তাহা নির্ণয় কর।

29. $A(6, 4)$ এবং $B(7, -5)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশকে $C(9, -23)$ যে অনুপাতে বিভক্ত করে তাহা নির্ণয় কর।

30. ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক নিম্নে দেওয়া হইল। তাহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(*i*) (10, 6), (2, 10), (4, 2); (*ii*) (3, −4), (−1, 10), (7, 5);

(*iii*) (0, 0), $(a \cos\alpha, a \sin\alpha)$, $(a \cos\beta, a \sin\beta)$.

31. A, B, C এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (−1, 5), (3, 1) এবং (5, 7). D, E, F যথাক্রমে BC, CA, AB এর মধ্যবিন্দু। DEF ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[P. U. 1961]**

32. A, B, C বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (3, 4), (−4, 3) এবং (8, −6). ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং A হইতে BC বাহুর উপর পাতিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। **[H. S. 1961]**

33. (*i*) A, B, C, D এই বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (−2, −3), (6, −5), (18, 9) এবং (0, 12) হইলে $ABCD$ চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[H. S. 1976]**

(*ii*) যে চতুর্ভুজের কৌণিক বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (1, 1), (3, 4), (5, −2), (4, −7) তাহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[C. U. 1944]**

34. দেখাও যে, $O(0, 0)$, $P\left(3, \frac{\pi}{9}\right)$ এবং $Q\left(3, \frac{4\pi}{9}\right)$ একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দুত্রয়। OPQ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

35. A, B, C এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(3, \pi/6)$, $(6, \pi/3)$ এবং $(4, \pi/2)$. ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

36. (*i*) যদি (x_1, y_1), (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3) বিন্দুগুলি সমরেখ হয়, দেখাও যে,

$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0$$ **[P. U. 1964, '68]**

(*ii*) (2, 3), (4, 5) এবং (6, 5) বিন্দুত্রয় সমরেখ কিনা বল।

37. (*a*) দেখাও যে, $(2, 3)$, $(4, 1)$ এবং $(-2, 7)$ বিন্দুগুলি সমরেখ।
[**P. U. 1967**]

(*b*) দেখাও যে, $(-6, -2)$ এবং $(-3, 0)$ বিন্দুগামী সরলরেখার উপর $(3, 4)$ বিন্দুটি অবস্থিত।

(*c*) দেখাও যে, $(2\sqrt{2}, \pi/4)$, $(4\sqrt{3}/3, 2\pi/3)$ এবং $(2\sqrt{2}, -5\pi/4)$ বিন্দুত্রয় সমরেখ।

(*d*) দেখাও যে, $(a, b+c)$, $(b, c+a)$, $(c, a+b)$ বিন্দুগুলি সমরেখ।
[**C. U. 1958**]

38. (*i*) দেখাও যে, যে চতুর্ভুজের কৌণিক বিন্দুগুলি যথাক্রমে $(a, 0)$, $(-b, 0)$, $(0, a)$, $(0, -b)$ তাহার ক্ষেত্রফল শূন্য এবং ইহার জ্যামিতিক ব্যাখা দাও।
[**C. U. 1942**]

(*ii*) কোন চতুর্ভুজ $ABCD$ এর কৌণিক বিন্দুগুলি A, B, C, D এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(1, 2)$, $(-5, 6)$, $(7, -4)$ এবং $(k, -2)$। ইহার ক্ষেত্রফল শূন্য হইলে, k এর মান নির্ণয় কর। [**C. U. 1945**]

39. A, B, C, D বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(5, 2)$, $(8, -3)$, $(1, -2)$ এবং $(-2, 3)$. দেখাও যে, AC এবং BD পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

40. $A\ (0, -1)$ এবং $B\ (15, 2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ $P\ (-1, 2)$ এবং $Q\ (4, -5)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশকে যে অনুপাতে বিভক্ত করে তাহা নির্ণয় কর।

41. A, B, C, D এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-2, 3)$, $(8, 9)$, $(0, 4)$ এবং $(3, 0)$ এবং AB ও CD রেখাংশদ্বয় অঙ্কিত। CD দ্বারা AB যে অনুপাতে বিভক্ত তাহা নির্ণয় কর। [**H. S. 1960**]

42. (*i*) দেখাও যে, আয়তক্ষেত্রের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

(*ii*) প্রমাণ কর যে, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

(*iii*) প্রমাণ কর, চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। [**C. U. 1958**]

(*iv*) প্রমাণ কর, যে কোন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল, উহার বাহুগুলির মধ্যবিন্দু সংযোজক রেখাংশ দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের চারগুণ।

(*v*) প্রমাণ কর, ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় সমবিন্দু।

43. দেখাও যে, $P_1(x_1, y_1)$ এবং $P_2(x_2, y_2)$ এর সংযোজক রেখাংশের উপর $P(x, y)$ যে কোন বিন্দু হইলে

$x = x_1 + k(x_2 - x_1)$, $y = y_1 + k(y_2 - y_1)$ যেখানে, $P_1P : P_1P_2 = k$.

P বিন্দু সম্বন্ধে তোমার কি ধারণা হইতে পারে যদি (*i*) $0 < k < 1$, (*ii*) $k > 1$, (*iii*) $k = 0$, (*iv*) $k = 1$, (*v*) $k = \frac{1}{2}$? [**Joint Ent. Ex. 1972**]

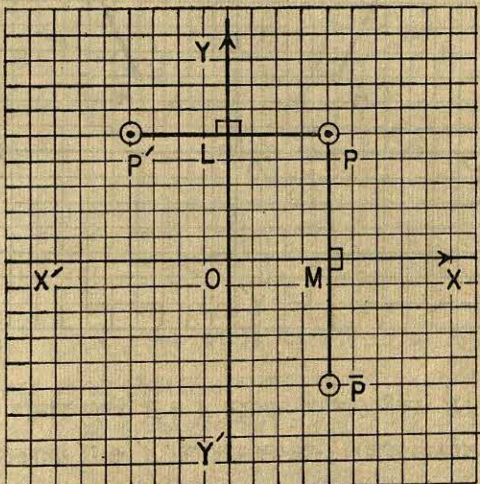
দ্বিতীয় অধ্যায়

প্রতিফলন, ঋজুসরণ ও ঘূর্ণন

2-1. প্রতিফলন।

আমরা জানি, কোন একটি নির্দিষ্ট প্রতিফলক রেখা (line of reflection) এর মাধ্যমে একটি নির্দিষ্ট বিন্দু P (object point) এর প্রতিবিম্ব বিন্দু (image point) একটি এবং কেবলমাত্র একটি বিন্দু P' হইবে এবং PP' রেখাংশ প্রতিফলক রেখাদ্বারা সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত হইবে। প্রতিফলক রেখার উপরিস্থিত যে কোন বিন্দুর প্রতিবিম্ব ঐ বিন্দুই হইবে।

[1] বিন্দুর প্রতিবিম্ব।



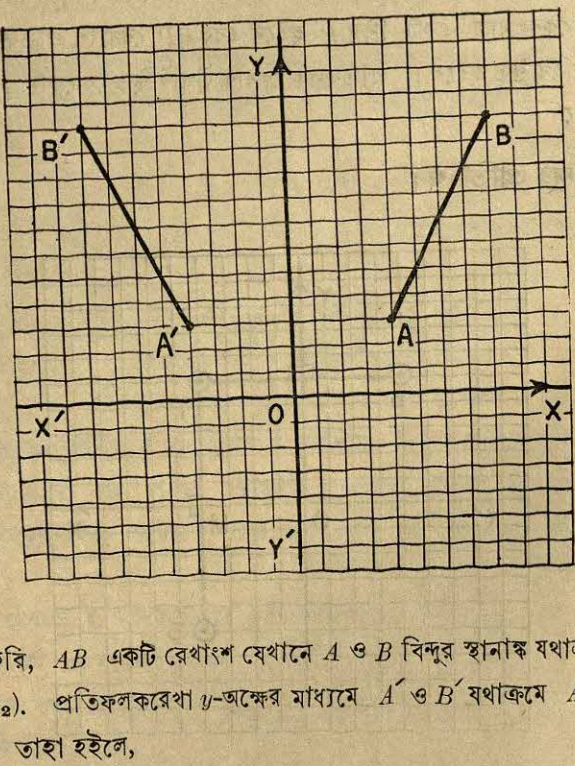
মনে করি, P একটি বিন্দু যাহার স্থানাঙ্ক $(4, 5)$. প্রতিফলক রেখা y-অক্ষ হইলে এবং P এর প্রতিবিম্ব P' হইলে P' এর স্থানাঙ্ক হইবে $(-4, 5)$. কিন্তু প্রতিফলক রেখা x-অক্ষের মাধ্যমে P এর প্রতিবিম্ব $\overline{P}$ হইলে উহার স্থানাঙ্ক হইবে $(4, -5)$.

সাধারণভাবে, P একটি বিন্দু যাহার স্থানাঙ্ক (a, b).

y-অক্ষকে প্রতিফলক রেখা ধরিলে এবং উহার মাধ্যমে P এর প্রতিবিম্ব P' হইলে P' এর স্থানাঙ্ক হইবে $(-a, b)$; এবং PP' রেখাংশ y-অক্ষ দ্বারা L বিন্দুতে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত হইবে।

x-অক্ষকে প্রতিফলক রেখা ধরিলে এবং উহার মাধ্যমে P এর প্রতিবিম্ব $\overline{P}$ হইলে $\overline{P}$ এর স্থানাঙ্ক হইবে $(a, -b)$; এবং $P\overline{P}$ রেখাংশ x-অক্ষ দ্বারা M বিন্দুতে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত হইবে।

[2] রেখাংশের প্রতিবিম্ব।



মনে করি, AB একটি রেখাংশ যেখানে A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2). প্রতিফলকরেখা y-অক্ষের মাধ্যমে A' ও B' যথাক্রমে A ও B এর প্রতিবিম্ব। তাহা হইলে,

A' এবং B' এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-x_1, y_1)$ এবং $(-x_2, y_2)$.

এখন, $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$;

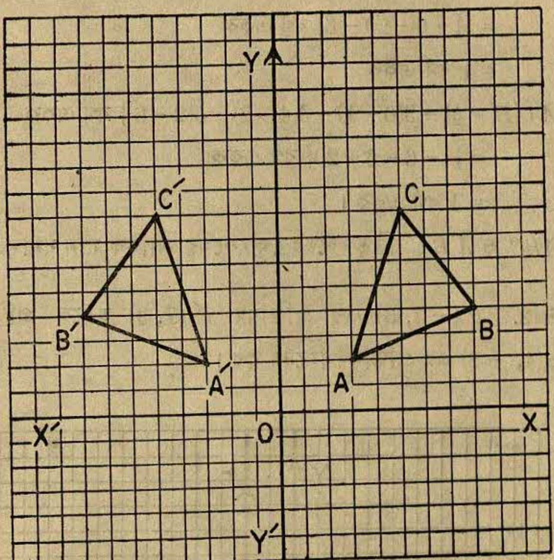
$$A'B' = \sqrt{\{(-x_2 + x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\}}$$
$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$\therefore$ $AB = A'B'$ অর্থাৎ প্রতিফলন দ্বারা রেখাংশের দৈর্ঘ্য অপরিবর্তিত থাকে।

মন্তব্য ঃ কোন সরলরেখা যদি প্রতিফলক রেখার সমান্তরাল হয়, তবে উহার প্রতিবিম্ব রেখা প্রতিফলক রেখার সমান্তরাল হইবে।

কিন্তু যদি কোন সরলরেখা প্রতিফলক রেখার সমান্তরাল না হয় তবে ঐ রেখা এবং উহার প্রতিবিম্ব রেখা প্রতিফলক রেখার উপর একটা বিন্দুতে ছেদ করিবে এবং উহাদের উভয়েই প্রতিফলক রেখার সহিত সমান কোণে নত থাকিবে।

[3] জ্যামিতিক চিত্রের প্রতিবিম্ব।



ABC ত্রিভুজের A, B, C বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(3, 2)$, $(8, 4)$ এবং $(5, 8)$. A', B', C' যথাক্রমে প্রতিফলকরেখা y-অক্ষের মাধ্যমে A, B, C এর প্রতিবিম্ব। তাহা হইলে, A', B', C' এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-3, 2), (-8, 4), (-5, 8)$.

$$\therefore \quad AB = \sqrt{(8-3)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{29}\ ;$$

$$BC = \sqrt{(5-8)^2 + (8-4)^2} = 5\ ;$$

$$CA = \sqrt{(3-5)^2 + (2-8)^2} = \sqrt{40}\ ;$$

$$A'B' = \sqrt{(-8+3)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{29}\ ;$$

$$B'C' = \sqrt{(-5+8)^2 + (8-4)^2} = 5\ ;$$

$$C'A' = \sqrt{(-3+5)^2 + (2-8)^2} = \sqrt{40}.$$

অতএব, y-অক্ষের মাধ্যমে ΔABC প্রতিবিম্ব $\Delta A'B'C'$ এবং এই ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

মন্তব্য ঃ কোন প্রতিফলক রেখার মাধ্যমে একটি জ্যামিতিক চিত্রের প্রতিবিম্ব উহার সর্বসম একটি জ্যামিতিক চিত্র হইবে।

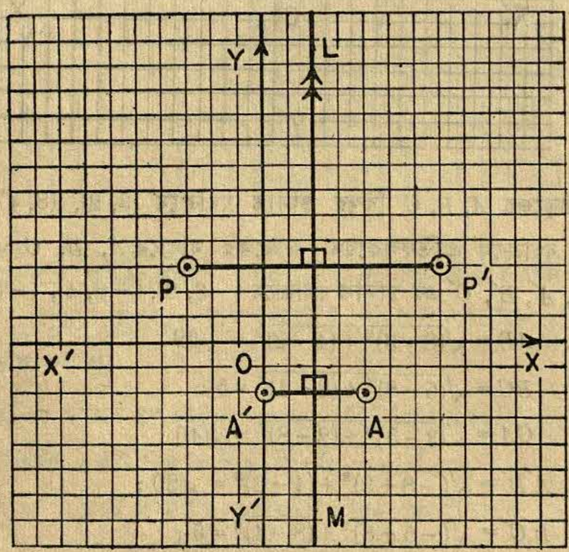
উদাহরণ 1. y-অক্ষ প্রতিফলকরেখা এবং ABC ত্রিভুজের প্রতিবিম্ব চিত্র $A'B'C'$. A, B, C-এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(3, 2), (5, 4), (3, 6)$. A', B', C' এর স্থানাঙ্ক নির্দেশ কর এবং দেখাও যে ABC ও $A'B'C'$ এর ক্ষেত্রফল সমান।

A', B', C' এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-3, 2), (-5, 4)$ এবং $(-3, 6)$.

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{2}\{3(4-6)+5(6-2)+3(2-4)\} \text{ বর্গ একক}$$
$$= \tfrac{1}{2}\{-6+20-6\} \text{ বর্গ একক}$$
$$= 4 \text{ বর্গ একক}$$
$$\triangle A'C'B' = \tfrac{1}{2}\{-3(6-4)-3(4-2)-5(2-6)\} \text{ বর্গ একক}$$
$$= \tfrac{1}{2}\{-6-6+20\} \text{ বর্গ একক}$$
$$= 4 \text{ বর্গ একক।}$$

সুতরাং ABC ও $A'B'C'$ ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের আঙ্কিক মান সমান।

উদাহরণ 2. $P(-3, 3)$ এর প্রতিবিম্ব $P'(7, 3)$ হইলে প্রতিফলক রেখা দেখাও এবং $A(4, -2)$ এর প্রতিবিম্ব নির্দেশ কর।



P এবং P' এর দূরত্ব 10 একক; সুতরাং, y-অক্ষ হইতে 2 একক দূরে উহার সমান্তরাল প্রথম এবং চতুর্থ পাদে LM রেখাটি প্রতিফলক রেখা।

$A(4, -2)$ এর প্রতিবিম্ব $A'(0, -2)$ হইবে।

প্রশ্নমালা 3

1. PA রেখাংশের P ও A বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(0, 3)$ এবং $(4, 7)$. y-অক্ষ প্রতিফলক রেখা হইলে, এবং $P'A'$ রেখাংশ PA রেখাংশের প্রতিবিম্ব হইলে, A' ও P' এর স্থানাঙ্ক নির্দেশ কর। $\angle APA'$ এর সমদ্বিখণ্ডক কোন্ রেখা ?

2. x-অক্ষ প্রতিফলক রেখা এবং উহার মাধ্যমে ABC ত্রিভুজের প্রতিবিম্ব চিত্র PQR। যদি A, B, C এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(4, 0), (6, 4)$ এবং $(9. 2)$ হয় তবে P, Q, R এর স্থানাঙ্ক নির্দেশ কর এবং চিত্রটি দেখাও।

3. y-অক্ষ প্রতিফলক রেখা এবং $ABCD$ বর্গক্ষেত্রের প্রতিবিম্ব চিত্র $A'B'C'D'$; A, B, C, D-এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(2, 4), (7, 4), (7, 9), (2, 9)$ হইলে, A', B', C', D' এর স্থানাঙ্ক নির্দেশ কর। দেখাও যে তাহাদের উভয়ের ক্ষেত্রফল সমান।

4. x-অক্ষ প্রতিফলক রেখা এবং $PQRS$ সামান্তরিকের প্রতিবিম্ব চিত্র $P'Q'R'S'$. যদি P', Q', R', S' এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(2, -2), (8, -2), (10, -5), (4, -5)$ হয়, তবে P, Q, R, S এর স্থানাঙ্ক নির্দেশ কর।

5. $P(-2, 5)$ বিন্দুর প্রতিবিম্ব $P'(6, 5)$ হইলে বর্গাঙ্কিত কাগজে প্রতিফলক রেখা চিহ্নিত কর এবং ঐ প্রতিফলক রেখার মাধ্যমে $A(4, -5)$ এর প্রতিবিম্বের স্থানাঙ্ক নির্দেশ কর।

6. $A(-4, 4)$ এর প্রতিবিম্ব $A'(4, -4)$ হইলে প্রতিফলক রেখাটি বর্গাঙ্কিত কাগজে দেখাও এবং ঐ রেখার মাধ্যমে $P(5, 3)$ বিন্দুর প্রতিবিম্ব P' হইলে উহার স্থানাঙ্ক নির্দেশ কর।

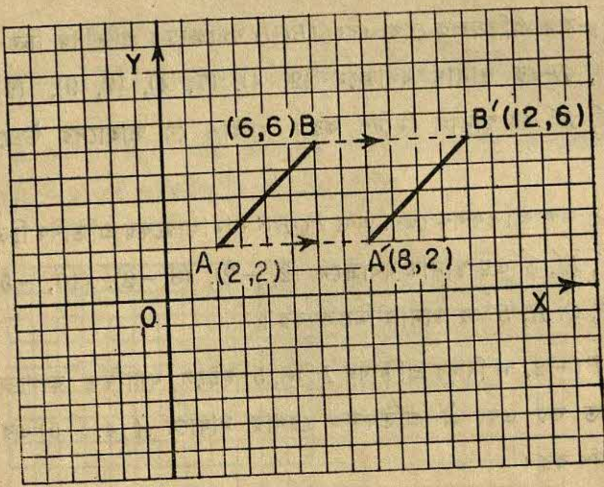
7. y-অক্ষ প্রতিফলক রেখা এবং AB রেখাংশের প্রতিবিম্ব $A'B'$; A ও B এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-4, 0)$ এবং $(4, 9)$ হইলে A', B'-এর স্থানাঙ্ক নির্দেশ কর। AB' এর প্রতিবিম্ব চিত্র কি ?

8. y-অক্ষ প্রতিফলক রেখা এবং ABC ত্রিভুজের প্রতিবিম্ব চিত্র $A'B'C'$. A', B', C' এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(3, 7)$ $(-2, -3)$ এবং $(5, -2)$ হইলে A, B, C এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। দেখাও যে ABC ও $A'B'C'$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সমান।

2-2. ঋজুসরণ।

একই সমতলে এক স্থান হইতে অন্যস্থানে একটি বস্তুকে কোন সরলরেখা বরাবর নিয়ে যাওয়াকে ঋজুসরণ (Translation) বলে। ঋজুসরণের ফলে কোন বস্তুর একটি বিন্দু একটি সরলরেখা বরাবর a একক দূরে গেলে উহার প্রতিটি বিন্দুই ঐ দিকে a একক দূরে যাইবে।

[1] রেখাংশের ঋজুসরণ।



মনে করি, $\overrightarrow{OX}$ বরাবর 6 একক ঋজুসরণের ফলে AB রেখাংশের অবস্থান $A'B'$ এবং A ও B এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (2, 2) এবং (6, 6). তাহা হইলে, A' ও B' এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(2+6, 2)$ এবং $(6+6, 6)$ অর্থাৎ (8, 2) এবং (12, 6).

$$\text{এখানে, } AB = \sqrt{(6-2)^2+(6-2)^2} = 4\sqrt{2}\,;$$

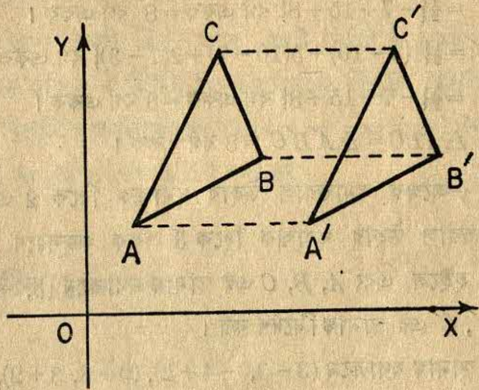
$$A'B' = \sqrt{(12-8)^2+(6-2)^2} = 4\sqrt{2}\,;$$

∴ **ঋজুসরণের ফলে রেখাংশের দৈর্ঘ্য অপরিবর্তিত থাকে।**

AA' এবং BB' সর্বসম ও সমান্তরাল বলিয়া AB ও $A'B'$ সর্বসম ও সমান্তরাল।

দ্রষ্টব্য : $AA'B'B$ একটি সামান্তরিক।

[2] জ্যামিতিক চিত্রের ঋজুসরণ।



মনে করি, $\overrightarrow{OX}$ এর সমান্তরাল h একক ঋজুসরণের ফলে ABC ত্রিভুজের অবস্থান $A'B'C'$.

মনে করি, A, B, C এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$.

তাহা হইলে, A', B', C' এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(x_1+h, y_1), (x_2+h, y_2), (x_3+h, y_3)$.

এখন, $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ যথাক্রমে AB, BC, CA এর সহিত সর্বসম এবং সমান্তরাল।

আবার, $\triangle ABC = \frac{1}{2}\{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\}$;

$$\triangle A'B'C' = \tfrac{1}{2}\{(x_1+h)(y_2-y_3)+(x_2+h)(y_3-y_1)+(x_3+h)(y_1-y_2)\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\}.$$
$$\therefore \quad \triangle ABC = \triangle A'B'C'$$

ঋজুসরণের ফলে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল অপরিবর্তিত থাকে।

মন্তব্য ঃ ঋজুসরণের ফলে যে কোন জ্যামিতিক চিত্রের কেবলমাত্র অবস্থান পরিবর্তন হয়।

উদাহরণ 1. ABC ত্রিভুজাকৃতি জ্যামিতিক চিত্রকে y-অক্ষের সমান্তরাল উহার ধনাত্মক দিকে 4 একক ঋজুসরণের পর $A'B'C'$ চিত্রটি পাওয়া গেল। A, B, C এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(1, 3)$, $(5, -1)$, $(2, 6)$. A', B', C' এর স্থানাঙ্ক নির্দেশ কর। দেখাও যে, ABC ও $A'B'C'$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সমান।

A', B', C' এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(1, 3+4)$, $(5, -1+4)$, $(2, 6+4)$ অর্থাৎ $(1, 7), (5, 3), (2, 10)$.

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{2}\{1(-1-6)+5(6-3)+2(3+1)\}$$ বর্গ একক

$$= \tfrac{1}{2}\{-7+15+8\}$$ বর্গ একক $= 8$ বর্গ একক।

$$\triangle A'B'C' = \tfrac{1}{2}\{1(3-10)+5(10-7)+2(7-3)\}$$ বর্গ একক

$$= \tfrac{1}{2}\{-7+15+8\}$$ বর্গ একক $= 8$ বর্গ একক।

$\therefore \quad \triangle ABC = \triangle A'B'C' = 8$ বর্গ একক।

উদাহরণ 2. y-অক্ষের সমান্তরাল উহার ধনাত্মক দিকে 2 একক ঋজুসরণের পর x-অক্ষের সমান্তরাল উহার ঋণাত্মক দিকে 3 একক ঋজুসরণে ABC ত্রিভুজের অবস্থান $A'B'C'$ হইলে এবং A, B, C এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(3, -4), (0, 3)$ এবং $(2, 5)$ হইলে A', B', C' এর স্থানাঙ্ক নির্দেশ কর।

A', B', C' এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(3-3, -4+2), (0-3, 3+2), (2-3, 5+2)$ অর্থাৎ, $(0, -2), (-3, 5), (-1, 7)$.

প্রশ্নমালা 4

1. x-অক্ষের সমান্তরাল উহার ধনাত্মক দিকে 5 একক ঋজুসরণের ফলে AB রেখাংশের অবস্থান $A'B'$; A ও B এর স্থানাঙ্ক $(-5, 3)$ এবং $(2, 6)$ হইলে, A', B' এর স্থানাঙ্ক নির্দেশ কর।

2. y- অক্ষের সমান্তরাল উহার ঋণাত্মক দিকে 3 একক দূরত্বে ঋজুসরণের জন্য AB রেখাংশের অবস্থান PQ হইলে, এবং P ও Q এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-4, -2)$ এবং $(3, 2)$ হইলে, A এবং B এর স্থানাঙ্ক কত ?

3. $ABCD$ একটি বর্গক্ষেত্র, যেখানে A, B, C, D এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-1, 3), (4, 3), (4, 8), (-1, 8)$. বর্গক্ষেত্রটিকে x-অক্ষের সমান্তরাল ঋজুসরণের ফলে ইহা $A'B'C'D'$ অবস্থানে আসিলে, এবং A' এর স্থানাঙ্ক $(4, 3)$ হইলে, B', C', D' এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

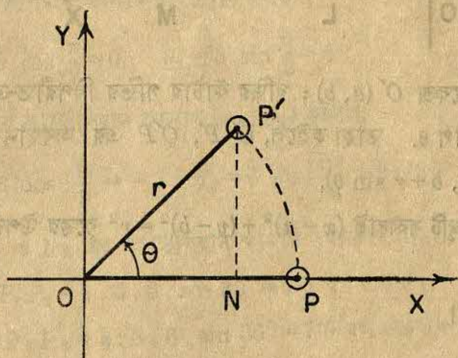
4. $ABCD$ চতুর্ভুজের A, B, C, D বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-2, 2), (1, 5), (-2, 8), (5, 5)$. উহাকে x-অক্ষের সমান্তরাল উহার ধনাত্মক দিকে 2 একক দূরত্বে ঋজুসরণের ফলে, নূতন $A'B'C'D'$ চতুর্ভুজের কৌণিক বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক কত হইবে ? দেখাও যে, উভয় চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল সমান।

5. ABC ত্রিভুজের A, B, C বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(3, 2), (8, 2)$ এবং $(3, 6)$. ঐ সমতলে ঋজুসরণের ফলে উহার অবস্থান $A'B'C'$ হইলে, এবং A', B', C' এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(12, 10)$, $(17, 10)$, $(12, 14)$ হইলে x-অক্ষের দিকে কত একক দূরত্বে এবং y-অক্ষের দিকে কত একক দূরত্বে ঋজুসরণ হইয়াছে ?

2-3. ঘূর্ণন।

একই সমতলে একটি বিন্দু অপর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সর্বদা সমান দূরত্বে থাকিয়া আবর্তন করিলে ঐ নির্দিষ্ট বিন্দুর সাপেক্ষে বিন্দুটির **ঘূর্ণন** (Rotation) বলা হয়। নির্দিষ্ট বিন্দুটিকে **ঘূর্ণনকেন্দ্র** (Centre of rotation) এবং ঘূর্ণনের পরিমাণকে **ঘূর্ণন কোণ** (Angle of rotation) বলা হয়।

[1] মূলবিন্দু ঘূর্ণনকেন্দ্র।



মনে করি, OX এর উপর P একটি বিন্দু যেখানে $OP=r$ একক। O ঘূর্ণন কেন্দ্র এবং ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীতক্রমে θ কোণের সমান আবর্তনের ফলে OP এর অবস্থান OP' হইয়াছে। x-অক্ষের উপর $P'N$ লম্ব টানিলাম। তাহা হইলে,

$$ON=r\cos\theta, \text{ এবং } P'N=r\sin\theta.$$

সুতরাং P এবং P' এর অক্ষবর্তী স্থানাঙ্ক $(r, 0)$ এবং (r, θ) ; এবং তাহাদের সমকৌণিক কার্তেসিয়ান্ স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(r, 0)$ এবং $(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

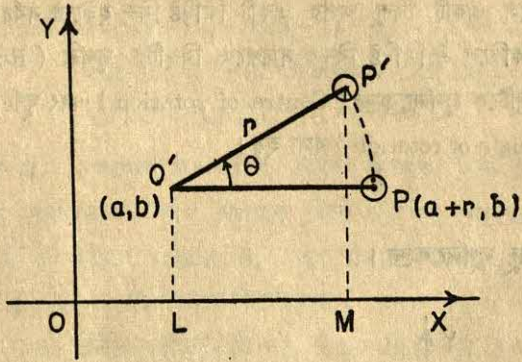
P' বিন্দুর কার্তেসিয়ান্ স্থানাঙ্ক (x, y) হইলে,

$$x=r\cos\theta\;;\; y=r\sin\theta. \quad \therefore \quad x^2+y^2=r^2.$$

সুতরাং, ঘূর্ণনকেন্দ্র O বিন্দুর সাপেক্ষে ঘূর্ণনে OP-এর যে কোন অবস্থান OP' হইলে P' বিন্দুটি সর্ব্বদাই $x^2+y^2=r^2$ বৃত্তের উপর থাকিবে।

বিশেষ দ্রষ্টব্য : O বিন্দুর সাপেক্ষে ঘড়ির কাঁটার গতি-ক্রমে θ কোণে OP আবর্তন করিলে এবং P এর অবস্থান P' হইলে, P' এর স্থানাঙ্ক হইবে $(r, -\theta)$ অথবা $(r\cos\theta, -r\sin\theta)$,

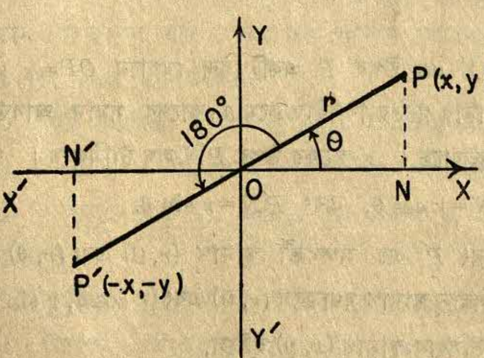
[2] যে কোন ঘূর্ণনকেন্দ্র।



মনেকরি, ঘূর্ণনকেন্দ্র $O'(a, b)$; ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীত-ক্রমে $P(a+r, b)$ বিন্দুর ঘূর্ণনের পরিমাপ θ. তাহা হইলে, $O'P'$, $O'P$ এর অবস্থান হইলে, P' এর স্থানাঙ্ক $(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta)$.

সুতরাং, P' বিন্দুটি সর্ব্বদাই $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ বৃত্তের উপর থাকিবে।

[3] অর্দ্ধঘূর্ণন।



মনে করি, P বিন্দুর অক্ষবর্তী স্থানাঙ্ক (r, θ) ; O ঘূর্ণনকেন্দ্র এবং OP এর ঘূর্ণনের পরিমাপ 180° ; OP এর অবস্থান OP' হইলে, OP এবং OP' একই সরলরেখায় অবস্থান করিবে। তাহা হইলে, P' এর অক্ষবর্তী স্থানাঙ্ক হইবে $(r, \pi+\theta)$ বা $(r, -\pi+\theta)$.

দ্রষ্টব্য : P এর কার্তেসিয়ান স্থানাঙ্ক (x, y) হইলে, P' এর কার্তেসিয়ান্ স্থানাঙ্ক $(-x, -y)$.

উদাহরণ 1. মূলবিন্দু ঘূর্ণন কেন্দ্র এবং ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীতক্রমে 60° ঘূর্ণনে OP_1 এবং OP_2 এর অবস্থান যথাক্রমে OP'_1 ও OP'_2. যদি P_1 ও P_2 এর স্থানাঙ্ক $(5, \pi/6)$ ও $(6, \pi/3)$ হয়, তবে P'_1 ও P'_2 এর অক্ষবর্তী স্থানাঙ্ক এবং সমকৌণিক কার্তেসিয়ান্ স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। দেখাও যে, OP_1P_2 এবং $OP'_1P'_2$ ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফল সমান।

P'_1 এবং P'_2 এর অক্ষবর্তী স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $\left(5, \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)$ এবং $\left(6, \frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)$.

অর্থাৎ, $\left(5, \frac{\pi}{2}\right)$ এবং $\left(6, \frac{2\pi}{3}\right)$.

P_1' এর কার্তেসিয়ান্ স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) হইলে,

$$x_1 = 5\cos\frac{\pi}{2} = 0; \quad y_1 = 5\sin\frac{\pi}{2} = 5;$$

P_2' এর কার্তেসিয়ান্ স্থানাঙ্ক (x_2, y_2) হইলে,

$$x_2 = 6\cos\frac{2\pi}{3} = -3; \; y_2 = 6\sin\frac{2\pi}{3} = 3\sqrt{3}.$$

সুতরাং, P'_1 ও P'_2 এর কার্তেসিয়ান্ স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(0, 5)$ এবং $(-3, 3\sqrt{3})$.

এখন, $\Delta OP_1P_2 = \frac{1}{2} . 5 . 6 . \sin 30° = 7{\cdot}5$ বর্গ একক ;

এবং, $\Delta OP'_1P'_2 = \frac{1}{2} . 5 . 6 . \sin 30° = 7{\cdot}5$ বর্গ একক $= \Delta OP_1P_2$.

উদাহরণ 2. মূলবিন্দু O ঘূর্ণনকেন্দ্র এবং অর্ধঘূর্ণনের ফলে ABC ত্রিভুজের অবস্থান $A'B'C'$. A, B, C এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(1, 30°)$, $(2, 60°)$ এবং $(3, 90°)$ হইলে, A', B', C' এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

A', B', C' এর অক্ষবর্তী স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(1, 30°+180°)$, $(2, 60°+180°)$, $(3, 90°+180°)$; অর্থাৎ, $(1, 7\pi/6)$, $(2, 4\pi/3)$, $(3, 3\pi/2)$.

উদাহরণ 3. ঘূর্ণনকেন্দ্র $A(3, -2)$ বিন্দুর সাপেক্ষে XOY-সমতলে P বিন্দুর ঘূর্ণনের যে কোন অবস্থানে $AP=5$ একক হইলে P বিন্দুর বিভিন্ন অবস্থান নির্দেশ কর।

P বিন্দুর যে কোন অবস্থানে ঘূর্ণনের পরিমাপ θ হইলে এবং ঐ অবস্থানে উহার কার্তেসিয়ান্ স্থানাঙ্ক (x, y) হইলে,

$$x = 3 + 5\cos\theta; \; y = -2 + 5\sin\theta;$$

$$\therefore \; (x-3)^2 + (y+2)^2 = 5^2.$$

প্রশ্নমালা 5

1. ঘূর্ণনকেন্দ্র মূলবিন্দু O এবং অর্ধঘূর্ণনে OP এর অবস্থান OQ. Q এর স্থানাঙ্ক $(3, 5)$ হইলে P এর স্থানাঙ্ক কত ?

2. মূলবিন্দু O ঘূর্ণনকেন্দ্র এবং অর্ধঘূর্ণনে ABC ত্রিভুজের অবস্থান $A'B'C'$. A, B, C এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(4, \pi/6), (2, \pi/3), (5, \pi/3)$ হইলে A', B', C' এর কার্তেসিয়ান্ স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

3. মূলবিন্দু O ঘূর্ণনকেন্দ্র এবং দক্ষিণ আবর্তে 60° ঘূর্ণনে AB রেখাংশের অবস্থান $A'B'$. A ও B এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(5, 30^\circ)$ এবং $(4, 60^\circ)$ হইলে, A' ও B' এর কার্তেসিয়ান্ স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর

4. মূলবিন্দু O ঘূর্ণনকেন্দ্র এবং দক্ষিণ আবর্তে 90° ঘূর্ণনে $ABCD$ চতুর্ভুজের অবস্থান $A'B'C'D'$. A, B, C, D এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(4, 3), (7, 3), (7, 6)$ এবং $(4, 6)$. A', B', C', D' এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

5. ঘূর্ণন কেন্দ্র $A(2, 3)$ এবং দক্ষিণ আবর্তে 60° ঘূর্ণনে AP এর অবস্থান AQ হইলে এবং P এর স্থানাঙ্ক $(5, 3)$ হইলে, Q এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

6. ঘূর্ণন কেন্দ্র $P(5, 0)$ এবং অর্ধঘূর্ণনে PA এর অরস্থান PB হইলে এবং B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2, -2)$ হইলে A বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্দেশ কর।

7. ঘূর্ণন কেন্দ্র মূলবিন্দু O এবং দক্ষিণ আবর্তে θ কোণে ঘূর্ণনে OA এর অবস্থান OB হইয়াছে। A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(3\sqrt{3}, 3)$ এবং $(3, 3\sqrt{3})$ হইলে θ এর মান নির্ণয় কর।

8. $ABCD$ চতুর্ভুজের কৌণিক বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক $(5, 3)$, $(8, 6)$, $(5, 9)$ এবং $(2, 6)$. $P(h, k)$ বিন্দু ঘূর্ণনকেন্দ্র এবং ঘূর্ণন কোণ θ° $(0^\circ < \theta^\circ < 180^\circ)$ হইলে $ABCD$ চতুর্ভুজটি তাহার পূর্বে অবস্থানে থাকে। P বিন্দুর স্থানাঙ্ক এবং θ° এর মান বাহির কর।

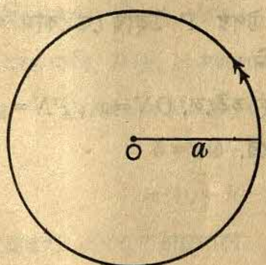
9. ABC ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক $(2, 4)$, $(2+\sqrt{3}, 5)$ এবং $(2, 6)$. $P(h, k)$ ঘূর্ণন কেন্দ্রে θ° কোণের ঘূর্ণনে $(0^\circ < \theta^\circ < 180^\circ)$ ত্রিভুজের অবস্থান ABC এর সহিত মিলিত হইলে (h, k) এবং θ° এর মান নির্ণয় কর।

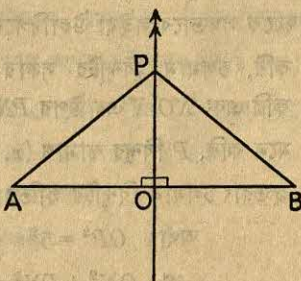
তৃতীয় অধ্যায়

সঞ্চার পথ

3-1. সঞ্চার পথ।

কোন একটি বিন্দু যখন এক বা একাধিক নির্দিষ্ট নিয়মের অধীন থাকিয়া কোনও পথে সঞ্চরণ করে তখন সেই পথটিকে ঐবিন্দুর **সঞ্চার পথ** (Locus) বলে। ঐ সঞ্চার পথ একটি সরলরেখা (Straight line) অথবা বক্ররেখা (Curved line) হইতে পারে।



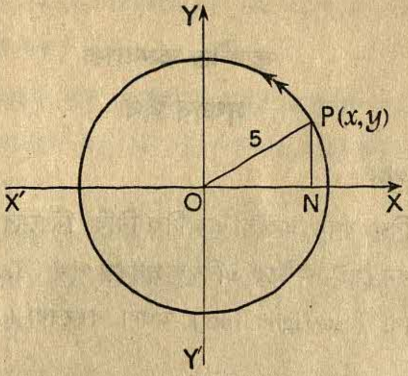


দৃষ্টান্ত স্বরূপ, (1) একটি চলমান বিন্দু P অপর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু O হইতে সর্বদা a একক দূরত্বে থাকিয়া O বিন্দুর সহিত একই সমতলে সঞ্চরণ করিলে বিন্দুটির সঞ্চার পথ a ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের পরিধি হইবে যাহার কেন্দ্র O.

(2) মনে করি A এবং B একই সমতলে দুই নির্দিষ্ট বিন্দু; ঐ সমতলে P বিন্দুটি A ও B হইতে সর্বদা সমান দূরত্বে থাকিয়া সঞ্চরণ করিলে P বিন্দুর সঞ্চার পথ একটি সরলরেখা হইবে। এই সরলরেখা AB এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক হইবে।

মন্তব্য : নির্দিষ্ট নিয়মাধীনে সঞ্চরণশীল কোনও বিন্দু উহার প্রত্যেক অবস্থাতেই উহার সঞ্চার পথের উপর থাকিবে এবং বিপরীতক্রমে, যে সকল বিন্দু ঐ সঞ্চার পথের উপর থাকিবে তাহারা ঐ নির্দিষ্ট নিয়মের অধীন থাকিবে।

3-2. সঞ্চার পথের সমীকরণ।



মনে করি, O একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং O বিন্দুর সহিত একই সমতলে P বিন্দুটি O হইতে 5 একক দূরত্বে থাকিয়া সর্বদা সঞ্চরণশীল। ঐ সমতলে $X'OX$ এবং $Y'OY$ সরলরেখাদ্বয়কে লম্বভাবে লইয়া উহাদিগকে যথক্রমে x-অক্ষ এবং y-অক্ষ ধরি।

মনে করি, চলমান বিন্দুটির সঞ্চার পথের উপর P উহার যে কোন অবস্থান। OP যোগ করি এবং $XO'X$ এর উপর PN লম্ব টানি।

মনে করি, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y). তাহা হইলে, $ON = x$; $PN = y$

স্থতরাং চলমান বিন্দুটির গতির সর্তানুসারে, $OP = 5$

অর্থাৎ $OP^2 = 5^2$

বা, $ON^2 + PN^2 = 5^2$

বা, $x^2 + y^2 = 25$ ... ... (A)

দেখা যায়, (5, 0), (−5, 0), (0, 5), (0, −5), (4, 3), (3, 4), (−4, 3), (−3, 4), (4, −3), (3, −4), (−4, −3), (−3, −4), $(\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$, $(-\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$ ইত্যাদি অসংখ্য বিন্দুর স্থানাঙ্ক (A) কে সিদ্ধ করে এবং এই সমস্ত বিন্দুর প্রত্যেকেই O বিন্দু হইতে 5 একক দূরত্বে অবস্থিত।

আবার, (6, 2), (4, 6), (−4, 5), (−4, −6) প্রভৃতি অসংখ্য বিন্দুর স্থানাঙ্ক (A) কে সিদ্ধ করিবে না অর্থাৎ উহাদের দূরত্ব O হইতে 5 একক হইবে না।

দ্রষ্টব্য : $x^2 + y^2 = 25$ কে ঐ চলমান বিন্দুটির সঞ্চার পথের **সমীকরণ** বলা হয়।

সংজ্ঞা : কোন বিন্দুর সঞ্চার পথের উপরিস্থিত একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক অর্থাৎ ভুজ ও কোটির মধ্যে **সম্বন্ধ** উক্ত সঞ্চার পথের প্রতিটি বিন্দুর ক্ষেত্রে সত্য ; কিন্তু, ঐ সঞ্চার পথের বহিঃস্থ কোন বিন্দুর ক্ষেত্রে সত্য নয়।

এইরূপ ক্ষেত্রে, ঐ সম্বন্ধ উক্ত সঞ্চার পথের **সমীকরণ** হইবে।

পূর্ব দৃষ্টান্তে, P বিন্দুর সঞ্চার পথের সমীকরণ : $x^2 + y^2 = 25$.

উদাহরণ 1. P বিন্দুটি সর্বদা $A(3, 4)$ বিন্দুর সহিত একই সমতলে থাকিয়া এবং A হইতে সর্বদা 5 একক দূরত্বে থাকিয়া চলিলে P বিন্দুর সঞ্চার পথের সমীকরণ লিখ।

মনে করি, বিন্দুটির সঞ্চার পথের উপর P যে কোন অবস্থান এবং উহার স্থানাঙ্ক (x, y). তাহা হইলে,

$$AP=5 \text{ অর্থাৎ } AP^2=25;$$

$$\text{কিন্তু } AP^2=(x-3)^2+(y-4)^2$$

$$\therefore \quad (x-3)^2+(y-4)^2=25$$

$$\text{বা, } \quad x^2+y^2-6x-8y=0$$

$$\therefore \quad \text{নির্ণেয় সমীকরণ : } \quad x^2+y^2-6x-8y=0.$$

উদাহরণ 2. $A(2, 4)$ এবং $B(-2, 6)$ দুইটি বিন্দু। XOY-সমতলে P একটি সঞ্চরণশীল বিন্দু। উহার সঞ্চার পথের সমীকরণ এমন যে, PAB ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের **আঙ্কিক মান** 16 বর্গ একক। P এর সঞ্চার পথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

মনে করি, $P(h, k)$ সঞ্চার পথের উপর যে কোন বিন্দু। তাহা হইলে,

$$\triangle PAB=\tfrac{1}{2}\{h(4-6)+2(6-k)-2(k-4)\} \text{ বর্গ একক}$$

$$=\tfrac{1}{2}\{20-2h-4k\} \text{ বর্গ একক}$$

$$=(10-h-2k) \text{ বর্গ একক}$$

সুতরাং প্রদত্ত সর্তানুসারে,

$$|(10-h-2k)|=16$$

$$\text{বা, } \quad h+2k-10=\pm 16$$

সুতরাং নির্ণেয় সমীকরণ :

$$x+2y-26=0;$$

$$\text{বা, } \quad x+2y+6=0.$$

প্রশ্নমালা 6

1. XOY-সমতলে একটি বিন্দু এমনভাবে সঞ্চরণশীল যে, $(2, 3)$ এবং $(-1, -2)$ বিন্দুদ্বয় হইতে উহার দূরত্ব সর্বদাই সমান। ঐ বিন্দুর সঞ্চার পথের সমীকরণ লিখ।

2. $A(-2, 0)$ এবং $B(2, 0)$ দুইটি বিন্দু। XOY-সমতলে একটি বিন্দু এমন ভাবে সঞ্চরণশীল যে, A হইতে উহার দূরত্ব B হইতে দূরত্বের তিন গুণের সমান। ঐ বিন্দুটির সঞ্চার পথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

3. $A(a, 0)$ এবং $B(-a, 0)$ দুইটি বিন্দু এবং XY-সমতলে P একটি সঞ্চরণশীল বিন্দু। যদি A এর যে কোন অবস্থানে $PA^2+PB^2=2c^2$ হয়, তবে P বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ লিখ।

4. (x, y)-সমতলে একটি বিন্দু এমনভাবে সঞ্চরণশীল যে, $(2, 3)$ হইতে উহার দূরত্ব সর্বদাই y-অক্ষ হইতে উহার দূরত্বের দুই-তৃতীয়াংশের সমান। ঐ বিন্দুর সঞ্চার পথের সমীকরণ নির্ণয় কর। [P. U. 1961]

5. $A(-3, 2)$ এবং $B(2, 4)$ দুইটি বিন্দু। (x, y)-সমতলে P বিন্দুটি এমনভাবে চলমান যে, $PA : PB = 3 : 2$; P বিন্দুর সঞ্চার পথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

6. $A(1, 2)$ এবং $B(5, -2)$ দুইটি বিন্দু। C একটি সঞ্চরণশীল বিন্দু। উহার সঞ্চরণ এমন যে, CAB ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের **আঙ্কিক মান** 12 বর্গ একক। C এর সঞ্চার পথ নির্ণয় কর। [H. S. 1975]

7. A, B ও C এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(2, 8), (-3, 3)$ $(5, -1)$; (x, y)-সমতলে P একটি সঞ্চরণশীল বিন্দু। যদি $PA^2+PB^2+PC^2=3\times 5^2$ হয় তবে P বিন্দুর সঞ্চার পথ নির্দেশ কর।

8. একটি বিন্দু এমনভাবে সঞ্চরণশীল যে, y-অক্ষ হইতে উহার দূরত্বের তিন গুণ x-অক্ষ হইতে উহার দূরত্বের পাঁচ গুণ অপেক্ষা 13 বেশী। ঐ বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

$(1, -2)$, $(11, 4)$, $(21, 11)$ এবং $(3{\cdot}35, -0{\cdot}59)$ বিন্দুগুলির কোন্ কোন্‌টি ঐ সঞ্চার পথের উপর অবস্থিত তাহা নির্দেশ কর। [H. S. Comp. 1974]

9. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ পরিবর্তনশীল সরলরেখার $a+b=10$; অক্ষদ্বয় দ্বারা ঐ সরলরেখার ছিন্ন রেখাংশের মধ্য বিন্দুর সঞ্চার পথ নির্ণয় কর। [H. S. 1969]

10. সঞ্চরমান একটি সরলরেখা অক্ষদ্বয় হইতে যে দুইটি অংশ ছেদ করে তাহাদের যোগফল 10. ঐ সরলরেখার x ও y অক্ষদ্বয়ের মধ্যস্থিত অংশকে যে বিন্দু $2 : 3$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে সেই বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[H. S. Comp. 1975]

11. একটি চলমান বিন্দু $(5, 1)$ এবং $(-1, 2)$ বিন্দুদ্বয়ের সহিত এমন একটি ত্রিভুজ উৎপন্ন করে যাহার ক্ষেত্রফল সর্বদাই 6 বর্গ একক। ঐ বিন্দুটির সঞ্চার পথ নির্ণয় কর। [P. U. 1974]

12. $S(\sqrt{a^2-b^2}, 0)$ এবং $S'(-\sqrt{a^2-b^2}, 0)$ দুইটী নির্দিষ্ট বিন্দু। (x, y)-সমতলে P এমন একটি সঞ্চরণশীল বিন্দু যাহার জন্য $SP+S'P=2a$ হয়। P এর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

চতুর্থ অধ্যায়

সরলরেখা

(Straight Line)

4-1. সরলরেখার সাধারণ সমীকরণ।

কোন সমতলে একটি বিন্দু কোন দিক্ পরিবর্তন না করিয়া সঞ্চরণ করিলে ঐ বিন্দুর সঞ্চারপথকে সরলরেখা (straight line) বলা হয় ; সুতরাং এইরূপ ক্ষেত্রে সঞ্চরণপথের উপরিস্থিত যে কোন তিনটি ভিন্ন বিন্দু সমরেখ হইবে।

সাধারণ আকারের একঘাত বিশিষ্ট সমীকরণ :

$$Ax + By + C = 0 \quad \cdots \quad (1)$$

যেখানে A, B, C রাশি তিনটি x এবং y হইতে মুক্ত।

মনে করি, ঐ সমীকরণটির লেখটির উপর $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ এবং $R(x_3, y_3)$ তিনটি বিভিন্ন বিন্দু অবস্থিত। তাহা হইলে, এই বিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক ঐ সমীকরণটিকে সিদ্ধ করিবে ; অর্থাৎ

$$Ax_1 + By_1 + C = 0 \quad \cdots \quad (2)$$

$$Ax_2 + By_2 + C = 0 \quad \cdots \quad (3)$$

$$Ax_3 + By_3 + C = 0 \quad \cdots \quad (4)$$

এখন, (2), (3), (4) হইতে পাই,

$$A(x_2 - x_3) + B(y_2 - y_3) = 0 \quad \cdots \quad (5)$$

$$A(x_3 - x_1) + B(y_3 - y_1) = 0 \quad \cdots \quad (6)$$

$$A(x_1 - x_2) + B(y_1 - y_2) = 0 \quad \cdots \quad (7)$$

(5), (6), (7) কে যথাক্রমে y_1, y_2, y_3 গুণ করিয়া পরে তাহাদের যোগ করিলে হইবে,

$$A\{y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2)\}$$
$$+ B\{y_1(y_2 - y_3) + y_2(y_3 - y_1) + y_3(y_1 - y_2)\} = 0$$

বা, $A\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\} = 0$

$\therefore \quad x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0$, যদি $A \neq 0$.

কিন্তু $A = 0$, $B \neq 0$ হইলে, (5), (6), (7) কে যথাক্রমে x_1, x_2, x_3 দ্বারা গুণ করিয়া পরে তাহাদের যোগ করিলে হইবে,

$$B\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\} = 0$$

অর্থাৎ, $x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0.$

$A=B=0$ হইতে পারে না; কারণ, তখন (1) হইতে $C=0$ হইবে এবং তখন (1) একটি অভেদ সূচিত করিবে, যাহা এখানে সম্ভব নহে।

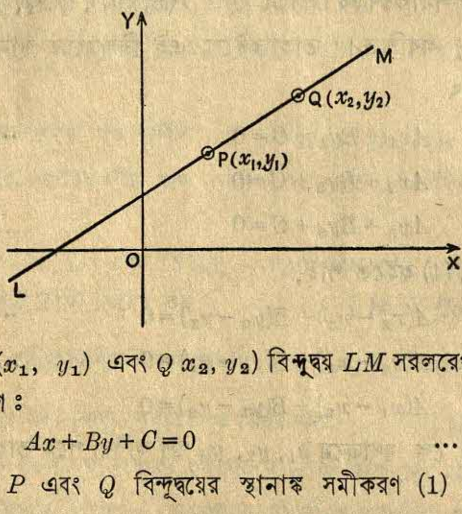
এখন, $Ax+By+C=0$ সমীকরণের লেখটির উপরিস্থিত যে কোন তিনটি বিভিন্ন বিন্দু $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ এবং $R(x_3, y_3)$ এর জন্য

$$x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)=0$$

বলিয়া এই বিন্দু তিনটি সমরেখ। সুতরাং, $Ax+By+C=0$ সমীকরণটি সর্বদাই সরল রেখার সমীকরণকে নির্দেশ করে।

মন্তব্য : A, B, C এর বিভিন্ন নির্দিষ্ট মানের জন্য $Ax+By+C=0$ সমীকরণটি অনুরূপ নির্দিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ হইবে।

4-2. $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ নির্দিষ্ট বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়।



মনে করি, $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয় LM সরলরেখার উপর অবস্থিত এবং উহার সমীকরণ :

$$Ax+By+C=0 \qquad \dots \qquad (1)$$

তাহা হইলে, P এবং Q বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক সমীকরণ (1) কে সিদ্ধ করিবে; অর্থাৎ,

$$Ax_1+By_1+C=0 \qquad \dots \qquad (2)$$

$$Ax_2+By_2+C=0 \qquad \dots \qquad (3)$$

এখন, (1), (2) ও (3) হইতে পাই,

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0$$

বা, $$A(x-x_1)=-B(y-y_1) \qquad \dots \qquad (4)$$

এবং $$A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)=0$$

বা, $$A(x_2-x_1)=-B(y_2-y_1) \qquad \dots \qquad (5)$$

এখন, (4) ÷ (5) হইতে পাই,

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \quad \text{যদি } x_1 \neq x_2,\ y_1 \neq y_2.$$

সুতরাং, $x_1 \neq x_2$ এবং $y_1 \neq y_2$ হইলে,

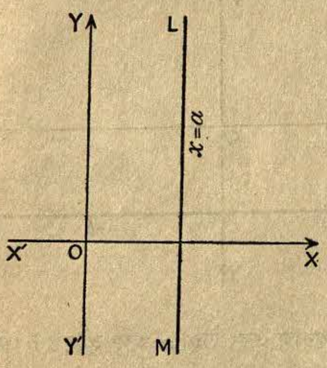
(x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার সমীকরণ :

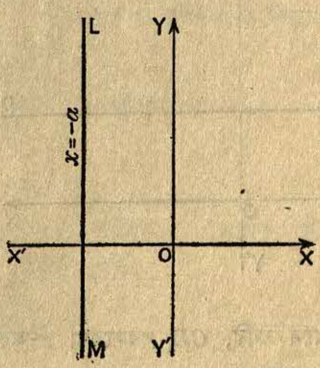
$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \quad \cdots \quad (6)$$

$$\text{বা,} \quad \frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \quad \cdots \quad (7)$$

বিশেষ দ্রষ্টব্য :

[1] **y-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ :**





মনে করি, LM সরলরেখা y অক্ষের সমান্তরাল এবং উহা ঐ অক্ষ হইতে a একক দূরে অবস্থিত। এইরূপক্ষেত্রে LM এর উপরিস্থিত প্রতিটি বিন্দু y-অক্ষ হইতে a একক দূরে অবস্থিত; অর্থাৎ, প্রতিটি বিন্দুর x-স্থানাঙ্ক a অথবা $-a$ হইবে। সুতরাং, LM এর উপরিস্থিত যে কোন দুইটি বিভিন্ন বিন্দু $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ হইলে,

$$x_1=x_2=a, \quad y_1 \neq y_2;$$

$$\text{অথবা,} \quad x_1=x_2=-a, \quad y_1 \neq y_2.$$

তাহা হইলে, (5) হইতে B = 0 এবং তখন, (4) হইতে

$A(x-x_1)=0$, অর্থাৎ

$$x=a \quad \text{অথবা,} \quad x=-a, \ (a>0).$$

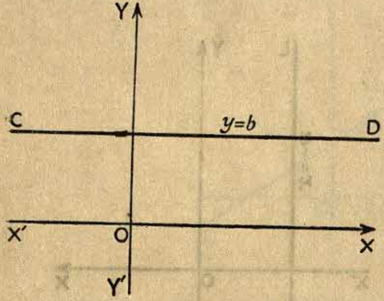
সুতরাং, y-অক্ষের সমান্তরাল এবং উহা হইতে a একক দূরে অবস্থিত LM সরল রেখার সমীকরণঃ

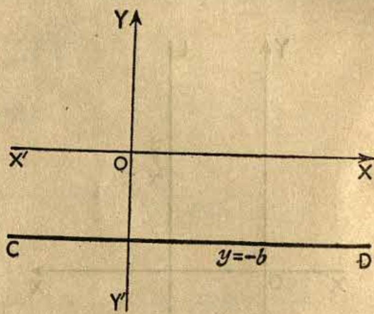
$$x = a \quad \text{অথবা,} \quad x = -a.$$

LM এর সমীকরণ $x=a$, $(a>0)$ হইলে উহা y-অক্ষের ডানদিকে থাকিবে; অর্থাৎ, OX কে ছেদ করিবে; কিন্তু LM এর সমীকরণ $x=-a$, $(a>0)$ হইলে, উহা y-অক্ষের বামদিকে থাকিবে অর্থাৎ OX' কে ছেদ করিবে।

y-অক্ষের উপরিস্থিত যে কোন বিন্দুর x-স্থানাঙ্ক 0 (শূন্য) বলিয়া y-অক্ষের সমীকরণঃ $x=0$.

[2] x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণঃ





মনে করি, CD সরলরেখা x-অক্ষের সমান্তরাল এবং উহা x-অক্ষ হইতে b একক দূরে অবস্থিত। এইরূপক্ষেত্রে, CD এর উপরিস্থিত প্রতিটি বিন্দু x-অক্ষ হইতে সমান দূরে অবস্থিত অর্থাৎ প্রতিটি বিন্দুর y-স্থানাঙ্ক b অথবা $-b$ হইবে। সুতরাং এইরূপ ক্ষেত্রে CD এর সমীকরণঃ

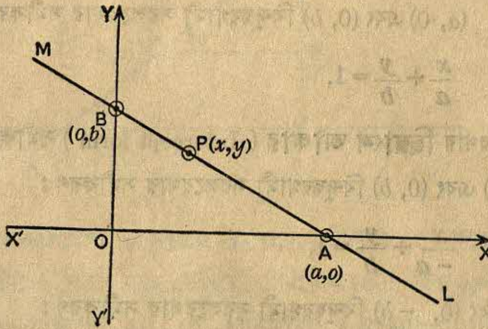
$$y = b, \quad \text{অথবা,} \quad y = -b.$$

CD এর সমীকরণ $y=b$, $(b>0)$ হইলে, উহা x-অক্ষের উপরে অবস্থিত হইবে, অর্থাৎ, OY কে ছেদ করিবে। কিন্তু CD এর সমীকরণ $y=-b$, $(b>0)$ হইলে, উহা x-অক্ষের নীচে থাকিবে, অর্থাৎ, OY' কে ছেদ করিবে।

x-অক্ষের উপরিস্থিত যে কোন বিন্দুর y-স্থানাঙ্ক 0 (শূন্য) বলিয়া x-অক্ষের সমীকরণঃ $y=0$.

4-3. নির্ধারিত আকারে (in standard forms) সরলরেখার সমীকরণ।

[A] $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ আকারে সমীকরণ।



মনে করি, LM সরলরেখা x-অক্ষকে A বিন্দুতে এবং y-অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করে এবং $OA=a$ একক, $OB=b$ একক ; $(a\neq 0, b\neq 0)$.

এখানে A এবং B বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(a, 0)$ এবং $(0, b)$.

প্রথম পদ্ধতি ঃ

AB সরলরেখার উপর যে কোন বিন্দু $P(x, y)$ লইলাম। যেহেতু, $A(a, 0)$, $P(x, y)$, $B(0, b)$ বিন্দু তিনটি একই সরলরেখার উপর অবস্থিত,

$$\therefore \quad a(y-b)+x(b-0)+0(0-y)=0$$

বা, $ay+bx=ab$

বা, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$

সুতরাং AB সরলরেখার নির্ণেয় সমীকরণ ঃ

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

দ্বিতীয় পদ্ধতি ঃ

$A(a, 0)$ এবং $B(0, b)$ বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখায় সমীকরণ ঃ

$$\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a}$$

বা, $\frac{y}{b} = -\frac{x}{a} + 1$

বা, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$

দ্রষ্টব্য ঃ (1) $(a, 0)$ এবং $(0, b)$ বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার সমীকরণ ঃ

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

এবং ইহাকে সরলরেখার **ছিন্নাংশ আকার** (Intercept form) সমীকরণ বলা হয়।

(2) $(-a, 0)$ এবং $(0, b)$ বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার সমীকরণ ঃ

$$\frac{x}{-a} + \frac{y}{b} = 1,$$

(3) $(a, 0)$ এবং $(0, -b)$ বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার সমীকরণ ঃ

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{-b} = 1,$$

(4) $(-a, 0)$ এবং $(0, -b)$ বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার সমীকরণ ঃ

$$\frac{x}{-a} + \frac{y}{-b} = 1.$$

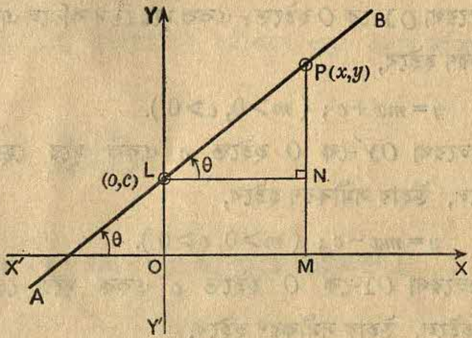
সুতরাং, যে সরলরেখা x-অক্ষ এবং y-অক্ষ উভয়কে ছেদ করিবে তাহার সমীকরণ $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$ আকারের হইবে, যেখানে $(\alpha \neq 0, \beta \neq 0)$. α এবং β কে যথাক্রমে x-অক্ষের এবং y অক্ষের ছিন্নাংশ (Intercept) বলা হয়।

মন্তব্য ঃ (*i*) মূলবিন্দুগামী সরলরেখার ক্ষেত্রে, $a = 0$ এবং $b = 0$; সুতরাং তখন, $\frac{x}{0}$ এবং $\frac{y}{0}$ অনির্দিষ্ট রাশি। তাহা হইলে, মূলবিন্দুগামী সরলরেখাকে $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ আকারে প্রকাশ করা সম্ভব হইবে না।

(*ii*) কোন সরলরেখা x-অক্ষের সমান্তরাল হইলে, উহা x-অক্ষকে ছেদ করিতে পারে না; সুতরাং তখন ঐ সরলরেখার x ছিন্নাংশ (x-intercept) থাকিতে পারে না। সেইজন্য, এইরূপ ক্ষেত্রে, ঐ সরলরেখার সমীকরণকে ছিন্নাংশ আকারে প্রকাশ করা যাইবে না।

সেইরূপ, y-অক্ষের সমান্তরাল কোন সরলরেখার সমীকরণকে ছিন্নাংশ আকারে প্রকাশ করা যাইবে না।

[B] $y=mx+c$ আকারে সমীকরণ।



মনে করি, AB সরলরেখা y-অক্ষকে $L(0, c)$ বিন্দুতে ছেদ করে এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত θ কোণে নত, যেখানে, $0^\circ < \theta < 180^\circ$ কিন্তু $\theta \neq 90^\circ$.

ধরি, $\tan\theta = m$, যাহাকে AB এর **নতিমাত্রা (gradient or slope)** বলা হয়।

মনে করি, AB এর উপর $P(x, y)$ যে কোন বিন্দু।

x-অক্ষের উপর PM লম্ব টানি ; উহা x-অক্ষকে M বিন্দুতে ছেদ করে। x-অক্ষের সমান্তরাল LN টানি ; উহা যেন PMকে N বিন্দুতে ছেদ করে।

এখন, $PN = PM - MN = y - c$;

$LN = OM = x$;

$$\therefore \quad m = \tan\theta = \frac{PN}{LN} = \frac{y-c}{x}$$

বা, $y = mx + c$.

সুতরাং, AB সরলরেখার সমীকরণ ঃ

$$y = mx + c.$$

মন্তব্য ঃ

(*i*) $\theta = 0^\circ$ হইলে, $m = 0$ হইবে ; এবং তখন AB সরলরেখা x-অক্ষের সমান্তরাল হইবে, যদি $c \neq 0$; এবং ইহার সমীকরণ হইবে $y = c$ অর্থাৎ, $y = mx + c$, যেখানে $m = 0$. x-অক্ষের সমীকরণ ঃ $y = 0$ অর্থাৎ, $y = mx + c$, যেখানে $m = 0, c = 0$.

(*ii*) $\theta = 90^\circ$ হইলে, AB সরলরেখা y-অক্ষের সমান্তরাল হইবে, অথবা, উহা -অক্ষ হইবে। এইরূপক্ষেত্রে AB-এর সমীকরণকে $y = mx + c$ আকারে প্রকাশ করা সম্ভব হইবে না, কারণ, $m = \tan\ 90^\circ =$ অনির্দিষ্ট। কিন্তু, ইহার সমীকরণ হইবে $x = a$ আকারের।

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ

(1) AB সরলরেখা OY কে O হইতে c একক দূরে ছেদ করিলে এবং $0^\circ < \theta < 90^\circ$ হইলে উহার সমীকরণ হইবে,

$$y = mx + c \; ; \; (m > 0, c > 0).$$

(2) AB সরলরেখা OY'-কে O হইতে c একক দূরে ছেদ করিলে এবং $0^\circ < \theta < 90^\circ$ হইলে, উহার সমীকরণ হইবে,

$$y = mx - c \; ; \; (m > 0, c > 0).$$

(3) AB সরলরেখা OY-কে O হইতে c একক দূরে ছেদ করিলে এবং $90^\circ < \theta < 180^\circ$ হইলে, উহার সমীকরণ হইবে,

$$y = mx + c \; ; \; (m < 0, \; c > 0).$$

(4) AB সরলরেখা OY' কে O হইতে c একক দূরে ছেদ করিলে এবং $90^\circ < \theta < 180^\circ$ হইলে, উহার সমীকরণ হইবে,

$$y = mx - c \; ; \; (m < 0, c > 0).$$

(5) AB সরলরেখা মূলবিন্দুগামী হইলে উহার সমীকরণ হইবে, (যখন $\theta \neq 0^\circ$, $\theta \neq 90^\circ$)

$$\boldsymbol{y = mx}$$

যেখানে, $m > 0$, যদি $0^\circ < \theta < 90^\circ$; অথবা, $m < 0$, যদি $90^\circ < \theta < 180^\circ$.

$\theta = 0^\circ$ হইলে x-অক্ষের সহিত এবং $\theta = 90^\circ$ হইলে y-অক্ষের সহিত AB সরলরেখা মিলিত হইবে।

বিশেষ প্রয়োজনীয় সিদ্ধান্ত ঃ

মনে করি, $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার সমীকরণ

$$y = mx + c$$

$$\therefore \; y_1 = mx_1 + c$$

এবং $y_2 = mx_2 + c$

স্বতরাং, $y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$

বা, $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \cdots \qquad (1)$$

এবং $y - y_1 = m(x - x_1)$

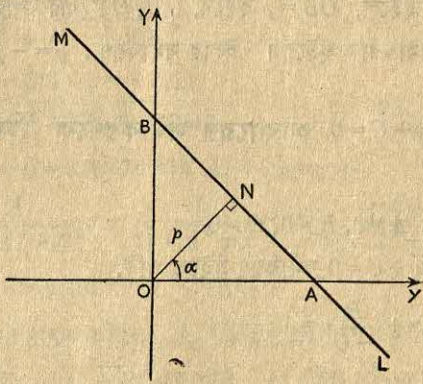
বা, $$(y - y_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \qquad \cdots \qquad (2)$$

বা, $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ ... (3)

সমীকরণ (2), PQ সরলরেখার সমীকরণ এবং উহার **নতিমাত্রা (gradient or slope) :**

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

[C] $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ আকারে সমীকরণ।



মনে করি, LM সরলরেখা x-অক্ষ ও y-অক্ষকে যথাক্রমে A এবং B বিন্দুতে ছেদ করে। মূলবিন্দু O হইতে LM এর উপর ON লম্ব, যেখানে N, AB এর উপর বিন্দু এবং $ON=p$ একক।

মনে করি, x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত ON সরলরেখা α-কোণে নত ($0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$).

এখন, $OA. \cos A\widehat{O}N = ON$, বা, $OA. \cos \alpha = p$

এবং $OB. \cos B\widehat{O}N = ON$, বা, $OB. \sin \alpha = p$.

অর্থাৎ, $OA = p \sec \alpha$ এবং $OB = p \operatorname{cosec} \alpha$.

সুতরাং, AB সরলরেখার সমীকরণ :

$$\frac{x}{p \sec \alpha}+\frac{y}{p \operatorname{cosec} \alpha}=1$$

অর্থাৎ, $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$.

মন্তব্য ঃ

$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ সমীকরণে, p সর্বদাই ধনাত্মক ; এবং $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$.

(*i*) $\alpha = 0^\circ$ হইলে, $OA = p$ হইবে এবং তখন LM সরলরেখা y-অক্ষের সমান্তরাল হইবে। ইহার সমীকরণ ঃ $x = p$.

(*ii*) $\alpha = 90^\circ$ হইলে, $OB = p$ হইবে এবং LM সরলরেখা x-অক্ষের সমান্তরাল হইবে। ইহার সমীকরণ ঃ $y = p$.

(*iii*) $\alpha = 180^\circ$ হইলে, $OA = p$ হইবে, (A, OX' এর উপর) এবং তখন LM সরলরেখা y-অক্ষের সমান্তরাল হইবে। ইহার সমীকরণ ঃ $x = -p$.

(*iv*) $\alpha = 270^\circ$ হইলে, $OB = p$ হইবে, (B, OY' এর উপর), এবং তখন LM সরলরেখা x-অক্ষের সমান্তরাল হইবে। ইহার সমীকরণ ঃ $y = -p$.

4·4. $Ax + By + C = 0$ আকারের সমীকরণকে নির্ধারিত আকারে প্রকাশ।

[1] মনে করি, $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0$.

$Ax + By + C = 0$ সমীকরণ হইতে পাই,

$$\frac{A}{-C}x + \frac{B}{-C}y = 1$$

অর্থাৎ, $$\frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/B} = 1,$$

যাহা $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ **আকারের।**

উদাহরণস্বরূপ,

(*i*) $2x + 3y - 6 = 0$, সমীকরণকে সাজাইলে পাই

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1.$$

এবং (*ii*) $8y - 3x + 12 = 0$ সমীকরণকে সাজাইয়া পাই,

$$3x - 8y = 12$$

অর্থাৎ, $$\frac{x}{4} + \frac{y}{-3/2} = 1.$$

[2] মনে করি, $B \neq 0$.

তাহা হইলে, $Ax + By + C = 0$ হইতে পাই,

$$By = -Ax - C,$$

অর্থাৎ, $y=\frac{-A}{B}x+\frac{-C}{B}$

যাহা $\boldsymbol{y=mx+c}$ আকারের।

উদাহরণস্বরূপ,

(i) $2x-3y+15=0$ সমীকরণকে সাজাইয়া পাই,

$$y=\frac{2}{3}x+5$$

যেখানে $m=2/3$ এবং $c=5$.

এবং (ii) $3x+4y+10=0$ সমীকরণকে সাজাইয়া পাই, $4y=-3x-10$

অর্থাৎ, $y=\left(\frac{-3}{4}\right)x+\left(\frac{-5}{2}\right)$,

যেখানে $m=-3/4$; $c=-5/2$.

[3] মনে করি, $A^2+B^2\neq 0$, $C\neq 0$.

এখন, $Ax+By+C=0$ হইতে পাই $Ax+By=-C$

অর্থাৎ $\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y=\frac{-C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$.

যাহা $\boldsymbol{x}\cos\alpha\boldsymbol{+y}\sin\alpha\boldsymbol{=p}$ আকারের।

লক্ষ্যণীয় : C ধনাত্মক হইলে, $\sqrt{A^2+B^2}$ এর পূর্বে '−' চিহ্ন লইতে হইবে, কিন্তু C ঋণাত্মক হইলে, $\sqrt{A^2+B^2}$ এর পূর্বে '+' চিহ্ন লইতে হইবে।

উদাহরণস্বরূপ,

(i) $\sqrt{3}x+y-12=0$ সমীকরণকে সাজাইয়া পাই,

$\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y=6$ যেহেতু, $\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$.

সুতরাং, এখানে, $p=6$;

$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ এবং $\sin\alpha=\frac{1}{2}$; অর্থাৎ, $\alpha=\frac{\pi}{6}$.

(ii) $x-\sqrt{3}y+10=0$

এখানে, $1^2+(\sqrt{3})^2=4$.

সুতরাং, সমীকরণ হইতে পাই, $x-\sqrt{3}y=-10$

বা, $-x+\sqrt{3}y=10$

বা, $\frac{-1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=5$

এখানে, $p=5$; $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$, $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$; অর্থাৎ, $\alpha=120^\circ=2\pi/3$.

4-5. $a_1x+b_1y+c_1=0$ এবং $a_2x+b_2y+c_2=0$ সমীকরণদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ।

মনে করি, সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1). তাহা হইলে,

$$a_1x_1+b_1y_1+c_1=0,$$

$$\text{এবং} \quad a_2x_1+b_2y_1+c_2=0.$$

$$\therefore \quad (a_1x_1+b_1y_1+c_1)+k(a_2x_1+b_2y_1+c_2)=0.$$

স্থতরাং, দেখা যাইতেছে যে, (x_1, y_1) বিন্দুটি

$$(a_1x+b_1y+c_1)+k(a_2x+b_2y+c_2)=0$$

সরলরেখার উপর অবস্থিত, যেখানে k যে কোন একটি ধ্রুবক এবং k-এর বিভিন্ন মানের জন্য সরলরেখার অবস্থান বিভিন্ন হইবে।

4-6. তিনটি সরলরেখা একবিন্দুগামী হইবার শর্ত নিরূপণ।

মনে করি,

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \quad \cdots \quad (1)$$

$$a_2x+b_2y+c_2=0 \quad \cdots \quad (2)$$

$$a_3x+b_3y+c_3=0 \quad \cdots \quad (3)$$

তিনটি সরলরেখার সমীকরণ। ধরি (1) ও (2)-এর ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1). তাহা হইলে,

$$a_1x_1+b_1y_1+c_1=0 \quad \cdots \quad (4)$$

$$a_2x_1+b_2y_1+c_2=0 \quad \cdots \quad (5)$$

(4) এবং (5) হইতে বজ্রগুণন প্রণালী দ্বারা,

$$\frac{x_1}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y_1}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

$$\therefore \quad x_1=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1} \quad \text{এবং} \quad y_1=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

প্রদত্ত সরলরেখা তিনটি একবিন্দুগামী হইবে, যদি (x_1, y_1) বিন্দুটি (3)-এর উপর থাকে অর্থাৎ যদি

$$a_3x_1+b_3y_1+c_3=0$$

$$\text{বা,} \quad a_3\left(\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right)+b_3\left(\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right)+c_3=0$$

$$\text{বা,} \quad a_3(b_1c_2-b_2c_1)+b_3(c_1a_2-c_2a_1)+c_3(a_1b_2-a_2b_1)=0$$

$$\text{বা,} \quad \boldsymbol{a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)=0.}$$

উদাহরণ 1. নিম্নে প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর এবং উহার 'm' বাহির কর।

(i) $(2, 4), (5, 6)$; (ii) $(0, -3), (-5, 4)$

(i) নির্ণেয় সমীকরণ :

$$\frac{y-4}{6-4}=\frac{x-2}{5-2}$$

বা, $y-4=\frac{2}{3}(x-2)$

অর্থাৎ, $y=\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}$, যাহার '$m$' $=\frac{2}{3}$.

(ii) নির্ণেয় সমীকরণ :

$$\frac{y-(-3)}{4-(-3)}=\frac{x-0}{(-5)-0}$$

বা, $\frac{y+3}{4+3}=\frac{x}{-5}$

বা, $y+3=\frac{-7x}{5}$

অর্থাৎ, $y=\left(\frac{-7}{5}\right)x-3$, যাহার '$m$' $=-\frac{7}{5}$.

উদাহরণ 2. $(1, 2)$ এবং $(2, 1)$ বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর এবং অক্ষদ্বয় দ্বারা উহার ছিন্নাংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

নির্ণেয় সমীকরণ :

$$\frac{y-2}{1-2}=\frac{x-1}{2-1}$$

অর্থাৎ, $x+y=3$

বা, $\frac{x}{3}+\frac{y}{3}=1$

সুতরাং, অক্ষদ্বয় দ্বারা সরলরেখাটির ছিন্নাংশের দৈর্ঘ্য $=\sqrt{3^2+3^2}$ একক অর্থাৎ $3\sqrt{2}$ একক।

উদাহরণ 3. $(6, 5)$ এবং $(-3, -1)$ বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার সমীকরণ বাহির কর এবং মূল বিন্দু হইতে উহার দূরত্ব নির্ণয় কর।

নির্ণেয় সমীকরণ :

$$\frac{y-5}{-1-5}=\frac{x-6}{-3-6}$$

বা, $3(y-5)=2(x-6)$

বা, $2x-3y+3=0$

বা, $(-2)x+3y=3$

এখন, $\sqrt{(-2)^2+3^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$.

স্মতরাং, নির্ণেয় সমীকরণ হইতে পাই,

$$\frac{-2}{\sqrt{13}}x+\frac{3}{\sqrt{13}}y=\frac{3}{\sqrt{13}}$$

যাহা $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ আকারের,

যেখানে, $p=\frac{3}{\sqrt{13}}$; $\cos\alpha=\frac{-2}{\sqrt{13}}$; $\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{13}}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ : $2x-3y+3=0$

এবং নির্ণেয় দূরত্ব $=\frac{3}{\sqrt{13}}$ একক।

উদাহরণ 4. $(-2\cdot5,\ 3)$ বিন্দুগামী এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত 45° কোণে নত সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর এবং উহার দ্বারা অক্ষদ্বয়ের ছিন্নাংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

মনে করি, সরলরেখাটির সমীকরণ :

$$y=mx+c \quad \dots \quad (1)$$

এখানে, $m=\tan 45^\circ=1$.

তাহা হইলে, (1) দাঁড়ায়,

$$y=x+c \quad \dots \quad (2)$$

এই সরলরেখাটি $(-2\cdot5,\ 3)$ বিন্দুগামী বলিয়া,

$$3=-5/2+c\ ; \qquad \therefore\ c=11/2$$

স্মতরাং, সরলরেখাটির সমীকরণ :

$$y=x+11/2$$

অর্থাৎ, $\frac{x}{-11/2}+\frac{y}{11/2}=1$

স্মতরাং, অক্ষদ্বয় হইতে এই সরলরেখা দ্বারা ছিন্নাংশের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $5\frac{1}{2}$ (সাংখ্যমান) এবং $5\frac{1}{2}$.

উদাহরণ 5. যে সরলরেখা অক্ষদ্বয় হইতে সমান অংশ ছিন্ন করে এবং $(7,\ -3)$ বিন্দুগামী তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

মনে করি, সরলরেখাটির সমীকরণ :

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1 \quad \dots \quad (1)$$

তাহা হইলে, ইহা $(\alpha, 0)$ এবং $(0, \beta)$ বিন্দুগামী। সুতরাং প্রদত্ত শর্তানুসারে, $\beta = \alpha$, অথবা $\beta = -\alpha$. অতএব, (1) এর সমীকরণ :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\alpha} = 1 \\ \text{অথবা,}\quad &\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\alpha} = 1 \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (2)$$

নির্ণেয় সমীকরণ $(7, -3)$ বিন্দুগামী বলিয়া,

$$\frac{7}{\alpha} + \frac{-3}{\alpha} = 1, \quad \text{অর্থাৎ, } \alpha = 4\ ;$$

$$\text{অথবা}\quad \frac{7}{\alpha} + \frac{3}{\alpha} = 1 \quad \text{অর্থাৎ, } \alpha = 10.$$

সুতরাং, নির্ণেয় সমীকরণ :

$$x + y = 4, \quad \text{অথবা,} \quad x - y = 10.$$

উদহরণ 6. x-অক্ষ এবং y-অক্ষ দ্বারা যে সরলরেখার ছিন্নাংশ $(-6, 2)$ বিন্দুতে 2 : 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

মনে করি, সরলরেখাটির সমীকরণ :

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{x}{\beta} = 1 \quad \cdots \quad (1)$$

এই সরলরেখা, x-অক্ষ এবং y-অক্ষকে যথাক্রমে $(\alpha, 0)$ এবং $(0, \beta)$ বিন্দুতে ছেদ করে ; এখন $(\alpha, 0)$ এবং $(0, \beta)$ সংযোজক রেখাংশ $(-6, 2)$ বিন্দুতে 2 : 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত।

$$\therefore \quad -6 = \frac{2 \times 0 + 3 \times \alpha}{2 + 3} = \frac{3\alpha}{5}\ ;$$

$$\text{এবং}\ 2 = \frac{2 \times \beta + 3 \times 0}{2 + 3} = \frac{2\beta}{5}.$$

$$\text{অর্থাৎ, } \alpha = -10 \quad \text{এবং} \quad \beta = 5.$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ :

$$\frac{x}{-10} + \frac{y}{5} = 1\ ; \text{অর্থাৎ, } x - 2y + 10 = 0.$$

উদাহরণ 7. দুইটি সরলরেখার সমীকরণ :

$$x - 2y + 12 = 0 \text{ এবং } 2x + 3y - 11 = 0\ ;$$

উহাদের ছেদবিন্দুগামী যে সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত $135°$ কোণে নত তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

প্রদত্ত সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী যে কোন সরলরেখার সমীকরণ

$$(x-2y+12)+k(2x+3y-11)=0$$

(যেখানে k যে কোন ধ্রুবক)

অর্থাৎ, $(3k-2)y+(2k+1)x+(12-11k)=0$

বা, $y=\left(\frac{1+2k}{2-3k}\right)x+\left(\frac{12-11k}{2-3k}\right)$

তাহা হইলে,

$$\frac{1+2k}{2-3k}=m=\tan 135^\circ=-1\ ;$$

বা, $1+2k=3k-2, \quad \therefore \quad k=3.$

সুতরাং নির্ণেয় সমীকরণ :

$$(x-2y+12)+3(2x+3y-11)=0$$

অর্থাৎ, $x+y=3$

উদাহরণ 8. $2x-3y+5=0$ এবং $3x+2y-12=0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দুগামী যে সরলরেখাগুলি অক্ষদ্বয়ের সহিত 12 বর্গ একক ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট ত্রিভুজ উৎপন্ন করে তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

মনে করি, প্রদত্ত সরলরেখাদ্বয় (h, k) বিন্দুতে ছেদ করে ; তাহা হইলে,

$$2h-3k+5=0 \quad \cdots \quad (1)$$

$$3h+2k-12=0 \quad \cdots \quad (2)$$

(1) কে 2 এবং (2) কে 3 দ্বারা গুণ করিয়া পাই

$$4h-6k+10=0 \quad \cdots \quad (3)$$

$$9h+6k-36=0 \quad \cdots \quad (4)$$

(3) এবং (4) যোগ করিয়া পাই,

$$13h=26\ ; \quad \therefore \quad h=2\ ; \quad \therefore \quad k=3$$

সুতরাং, প্রদত্ত সরলরেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক : (2, 3)

মনে করি, নির্ণেয় সরল রেখার সমীকরণ,

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1 \quad \cdots \quad (5)$$

এই সরলরেখা x-অক্ষ এবং y-অক্ষকে যথাক্রমে $A(\alpha, 0)$ এবং $B(0, \beta)$ বিন্দুতে ছেদ করে। যেহেতু, এই সরলরেখা (2, 3) বিন্দুগামী, সুতরাং,

$$\frac{2}{\alpha}+\frac{3}{\beta}=1 \quad \cdots \quad (6)$$

এবং $\alpha>0,\ \beta>0$; অথবা $\alpha<0,\ \beta>0$; অথবা $\alpha>0,\ \beta<0$; অথবা, $\alpha<0, \beta<0.$

$\therefore\ \ \triangle OAB=\frac{1}{2}\alpha\beta$, অথবা, $-\frac{1}{2}\alpha\beta$.

কিন্তু প্রদত্ত সর্তানুসারে $\triangle OAB=12$,

$$\therefore\ \ \alpha\beta=24 \qquad \dots \qquad (7)$$

$$\text{অথবা,}\ \ \alpha\beta=-24 \qquad \dots \qquad (8)$$

এখন, (6) এবং (7) হইতে পাই

$$\frac{2}{\alpha}+3\times\frac{\alpha}{24}=1\ ;$$

$$\text{বা,}\ \ \frac{2}{\alpha}+\frac{\alpha}{8}=1\ ;$$

$$\text{বা,}\ \ \alpha^2-8\alpha+16=0\ ;$$

$$\text{বা,}\ \ (\alpha-4)^2=2\ ;\quad \therefore\ \ \alpha=4,\ 4.$$

$\alpha=4$ হইলে, (7) হইতে পাই $\beta=6$.

এখন, (6) এবং (8) হইতে পাই,

$$\frac{2}{\alpha}-\frac{\alpha}{8}=1,$$

$$\text{বা,}\ \ \alpha^2+8\alpha-16=0,$$

$$\text{বা,}\ \ (\alpha+4)^2=32,$$

$$\therefore\ \ \alpha+4=\pm 4\sqrt{2}$$

$$\therefore\ \ \alpha=4(\sqrt{2}-1),\ \ \text{বা,}\ \ \alpha=-4(\sqrt{2}+1)$$

এবং তখন (8) হইতে β এর অনুরূপ মান

$$\beta=-6(\sqrt{2}+1)\ ;\ \beta=6(\sqrt{2}-1)$$

সুতরাং, নির্ণেয় সমীকরণ,

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$$

যেখানে, (i) $\alpha=4,\ \beta=6$; (ii) অথবা $\alpha=4(\sqrt{2}-1),\ \beta=-6(\sqrt{2}+1)$

(iii) অথবা, $\alpha=-4(\sqrt{2}+1),\ \beta=6(\sqrt{2}-1)$

$\therefore$ (i) $3x+2y=12$, (ii) $3(\sqrt{2}+1)x-2(\sqrt{2}-1)y=12$,

(iii) $-3(\sqrt{2}-1)x+2(\sqrt{2}+1)y=12$ উত্তর।

প্রশ্নমালা 7

1. প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) (3, 4), (5, 7) ; (ii) $(-2, 6), (0, 5)$;

(iii) $(-5, 0), (0, -3)$; (iv) $(a, b), (a+b, a-b)$;

(v) $(0, 0), (a \cos\theta, a \sin\theta)$; (vi) $(at_1{}^2, 2at_1), (at_2{}^2, 2at_2)$;

(vii) $(a \cos\alpha, a \sin\alpha), (a \cos\beta, a \sin\beta)$.

(viii) $(ct_1, c/t_1), (ct_2, c/t_2)$.

2. $(2, -3)$ এবং $(-5, 4)$ বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার নতিমাত্রা (gradient) নির্ণয় কর এবং উহা x-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তাহার স্থানাঙ্ক বাহির কর।

3. $(-3, 4)$ বিন্দুগামী এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত $60°$ কোণে নত সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

4. $(-3, 5)$ এবং $(3, 2)$ বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর এবং অক্ষদ্বয়কে যে যে বিন্দুতে ছেদ করে মূলবিন্দু হইতে তাহাদের দূরত্ব নির্ণয় কর।

5. $(-3, -4)$ বিন্দুগামী যে সরলরেখার নতিমাত্রা $-\frac{3}{4}$ তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর এবং মূল বিন্দু হইতে উহার দূরত্ব নির্ণয় কর।

6. $(-1, -3)$ বিন্দুগামী যে সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মকদিকের সহিত $135°$ কোণে নত তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর এবং মূল বিন্দু হইতে উহার দূরত্ব নির্ণয় কর।

7. যে সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিক হইতে এবং y-অক্ষের ধনাত্মক দিক হইতে যথক্রেমে 3 একক ও 5 একক দৈর্ঘ্যের অংশদ্বয় ছিন্ন করে তাহার সমীকরণ নিরূপণ কর।

8. যে সরলরেখা অক্ষদ্বয়ের ধনাত্মক দিক হইতে সমান অংশ ছিন্ন করে এবং $(-3, 4)$ বিন্দুগামী তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

9. (5, 6) বিন্দুগামী যে সরলরেখা অক্ষদ্বয় হইতে সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট অন্তঃখণ্ড (Intercept) ছিন্ন করে, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

10. যে সরলরেখা x-অক্ষ এবং y-অক্ষ হইতে যথাক্রমে -5 এবং 4 অন্তঃখণ্ড ছিন্ন করে তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর এবং উহার নতিমাত্রা বাহির কর।

11. অক্ষদ্বয় দ্বারা যে সরলরেখার ছিন্নাংশ $(-8, 3)$ বিন্দুতে 5 : 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত তাহার সমীকরণ লিখ এবং মূলবিন্দু হইতে উহার দূরত্ব নির্ণয় কর।

12. যে সরলরেখা (3, 5) বিন্দুগামী এবং অক্ষদ্বয় দ্বারা উহার সীমাবদ্ধ অংশ ঐ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর এবং মূল বিন্দু হইতে উহার লম্ব-দূরত্ব বাহির কর।

[H. S. Comp. 1960]

13. কোন সরলরেখা x এবং y অক্ষদ্বয় হইতে যথাক্রমে α এবং β এই দৈর্ঘ্যের অংশদ্বয় ছেদ করিলে উহারা সমীকরণ নির্ণয় কর।

যদি $\alpha+\beta=6$ হয়, তবে রেখাটির দুই অক্ষদ্বয় দ্বারা খণ্ডিতাংশের মধ্যবিন্দুর সঞ্চার পথ বাহির কর। [H. S. 1976]

14. $2y-x+7=0$ এবং $3x+2y-5=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী যে সরল রেখার উপর মূলবিন্দু অবস্থিত তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত উহার নতিমাত্রা বাহির কর।

15. মূলবিন্দু এবং $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ এবং $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$ এর ছেদবিন্দু সংযোজক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

16. যে সরল রেখার উপর $(1, 2)$ অবস্থিত এবং যাহা $x+3y+1=0$ ও $2x+7y+3=0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[C. U. 1946]

17. যে সরলরেখা $5x+4y=20$ এবং $4x+5y=20$ এর ছেদবিন্দুগামী এবং x-অক্ষের সহিত 45° কোণে নত তাহার সমীকরণ বাহির কর।

18. $3x-4y+1=0$ এবং $5x+y-1=0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী যে সরলরেখা অক্ষদ্বয় হইতে সমান দৈর্ঘ্যের অংশদ্বয় ছেদ করে তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[H. S. 1971]

19. একটি সরলরেখা $3x-7y+5=0$ এবং $x-2y-7=0$ এর ছেদবিন্দুগামী এবং অক্ষদ্বয় হইতে একই চিহ্ন বিশিষ্ট সমান অন্তঃখণ্ড ছিন্ন করে। মূলবিন্দু হইতে ঐ সরলরেখার লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর। [H. S. Comp. 1961]

20. A, B বিন্দু দুইটী যথাক্রমে x এবং y অক্ষের উপরে অবস্থিত। যদি OAB ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সাংখ্যমান $2c^2$ হয়, তবে AB এর মধ্যবিন্দুর সঞ্চার পথ নির্ণয় কর।

21. একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির প্রান্তবিন্দুদ্বয় $(2a, 0)$ এবং $(0, a)$ এবং সমান বাহুদ্বয়ের একটির সমীকরণ $x=2a$. উহার অপর বাহুদ্বয়ের সমীকরণ এবং ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [H. S. Comp, 1975]

22. কোন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক $(1, 2), (3, 4), (4, 1)$. প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু এবং উহার ক্ষুদ্রতম বাহুর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[P. U. 1973

23. দেখাও যে, $(1, 5)$, $(3, 14)$ এবং $(-1, -4)$ বিন্দুগুলি একই সরলরেখার উপর অবস্থিত ; উক্ত সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। **[P. U. 1971]**

24. $(2, 3), (4, 5), (6, 5)$ বিন্দুত্রয় সমরেখ কিনা তাহা পরীক্ষা কর।

[H. S. 1971]

25. দেখাও যে, $(5, 1), (1, -1)$ এবং $(11, 4)$ বিন্দুগুলি একই সরলরেখার উপর অবস্থিত ; এবং অক্ষদ্বয় হইতে উহা দ্বারা ছিন্নাংশগুলি নির্ণয় কর। ঐ সরলরেখা হইতে অক্ষদ্বয় দ্বারা খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য কত ? **[H. S. Comp. 1961]**

26. $ax+y+6=0$ সমীকরণে a এর মান কত হইল এই সরলরেখা $x+y+4=0$ এবং $2x+3y+10=0$ এর ছেদবিন্দুগামী হইবে ? **[H. S. 1972]**

27. দেখাও যে, $y-x+1=0$, $2y-x-1=0$ এবং $7x-y-19=0$ সরলরেখাত্রয় একবিন্দুগামী। **[P. U. 1968]**

28. দেখাও যে, $x+y-4=0$, $3x-4y-5=0$ এবং $4x-3y-2=0$ সরলরেখাত্রয় একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন করে। **[P. U. 1976]**

29. $x+2y-5=0$, $y+2x-7=0$, এবং $x-y+1=0$ সরলরেখাত্রয় যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে তাহার ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

30. $3y-4x-1=0$, $y-x-3=0$ এবং $x+y-5=0$ সরলরেখাত্রয় যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে তাহার পরিকেন্দ্র এবং পরিব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

31. $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$, $x \cos \beta + y \sin \beta = q$ এবং $y = x \tan \theta$ সরল রেখাত্রয় এক বিন্দুগামী হইবার সর্ত নির্ণয় কর। **[Joint Ent. Ex. 1967]**

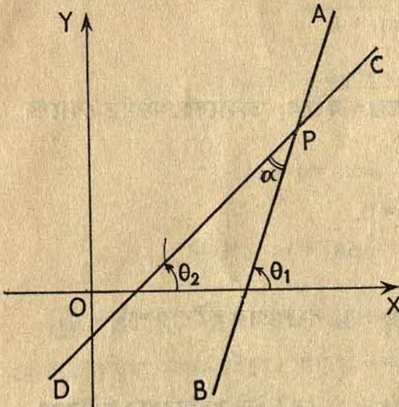
32. একটি সরলরেখা (x_0, y_0) বিন্দুগামী। দেখাও যে, অক্ষদ্বয় দ্বারা ঐ সরল রেখার সীমাবদ্ধ অংশের মধ্যবিন্দুর সঞ্চার পথের সমীকরণ

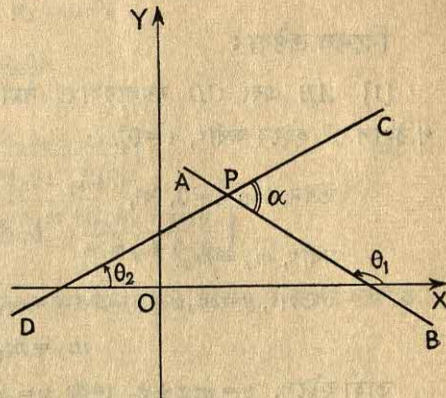
$$\frac{x_0}{x} + \frac{y_0}{y} = 2$$

[H. S. 1972]

33. $(a+b)$ দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট AB সরলরেখার A প্রান্ত x-অক্ষের উপর এবং B প্রান্ত y-অক্ষের উপর সর্বদাই অবস্থিত ; P, AB-এর উপর নির্দিষ্ট অন্তর্বিন্দু। $AP=b$ হইলে P এর সঞ্চার পথের সমীকরণ কি ?

1-7. দুইটি সরলরেখার অন্তর্গত কোণ নির্ণয়।





[A] মনে করি, AB এবং CD দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখা, যাহাদের সমীকরণ যথাক্রমে :

$$= m_1x + c_1 \qquad \cdots \qquad (1)$$

$$y = m_2x + c_2 \qquad \cdots \qquad (2)$$

AB এবং CD সরলরেখাদ্বয় x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত যথাক্রমে θ_1 এবং θ_2 কোণে নত থাকিলে,

$$\tan\theta_1 = m_1 \text{ এবং } \tan\theta_2 = m_2 \qquad \cdots \qquad (3)$$

ঐ সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের পরিমাপ α হইলে,

$$\alpha = \theta_1 - \theta_2 \text{ ; অথবা, } 180^\circ - \alpha = \theta_1 - \theta_2 \qquad \cdots \qquad (4)$$

$$\therefore \quad \pm\tan\alpha = \tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1\tan\theta_2}$$

$$\text{অর্থাৎ, } \pm\tan\alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}$$

$$\therefore \quad \tan\alpha = \frac{m_1 \sim m_2}{1 + m_1m_2} \qquad \cdots \qquad (5)$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\alpha = \tan^{-1}\frac{m_1 \sim m_2}{1 + m_1m_2}}$$

মন্তব্য :

দুইটি সরলরেখার অন্তর্গত কোণদ্বয়ের একটি α হইলে, অপর কোণটি $180^\circ - \alpha$ হইবে। সুতরাং, সূক্ষ্মকোণের পরিমাপ α হইলে, স্থূলকোণর পরিমাপ $180^\circ - \alpha$ হইবে ;

এইরূপক্ষেত্রে $\tan \alpha$ এর মান ধনাত্মক হইবে। দুইটি সরলরেখার অন্তর্গত কোণ বলিলে, উহাদের অন্তর্গত সূক্ষ্মকোণটিকে বুঝাইবে।

বিশেষ দ্রষ্টব্য :

[1] AB এবং CD সরলরেখাদ্বয় সমান্তরাল হইলে, তাহাদের অন্তর্গত কোণের পরিমাপ 0° হইবে অর্থাৎ, $\alpha = 0^\circ$.

তখন, $\tan \alpha = 0$, বা, $\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = 0$,

অর্থাৎ, $m_1 = m_2$.

সুতরাং, $y = m_1 x + c_1$ এবং $y = m_2 x + c_2$ সমান্তরাল হইবার শর্ত,

$$\boldsymbol{m_1 = m_2}.$$

তাহা হইলে, $\boldsymbol{y = mx + c_1}$ এবং $\boldsymbol{y = mx + c_2}$ যে দুইটি সরলরেখার সমীকরণ, তাহারা সমান্তরাল।

[2] AB এবং CD সরলরেখাদ্বয় পরস্পর লম্বভাবে থাকিলে, তাহাদের অন্তর্গত কোণের পরিমাপ 90° হইবে ; অর্থাৎ $\alpha = 90^\circ$.

তখন, $\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \tan \alpha = \tan 90^\circ$

অর্থাৎ, $\left(\dfrac{1 + m_1 m_2}{m_1 - m_2}\right) = \cot 90^\circ = 0$; বা, $m_1 m_2 + 1 = 0$.

সুতরাং, $y = m_1 x + c_1$ এবং $y = m_2 x + c_2$ পরস্পর লম্বভাবে থাকিবার শর্ত :

$$\boldsymbol{m_1 m_2 = -1}$$

তাহা হইলে, $\boldsymbol{y = mx + c_1}$ এবং $\boldsymbol{y = -\dfrac{1}{m}x + c_2}$ যে দুইটি সরলরেখার সমীকরণ, তাহারা লম্বভাবে অবস্থিত।

[B] মনে করি, AB এবং CD দুইটি সরলরেখার সমীকরণ যথাক্রমে,

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \quad \cdots \quad (1),$$

$$\text{এবং } a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \quad \cdots \quad (2).$$

AB এবং CD সরলরেখাদ্বয় x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের দিকের সহিত যথাক্রমে θ_1 এবং θ_2 কোণ নত থাকিলে,

$\tan \theta_1 = -a_1/b_1$; এবং $\tan \theta_2 = -a_2/b_2$ ... (3)

ঐ সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের পরিমাপ α হইলে,

$\alpha = \theta_1 - \theta_2$; অথবা, $180^\circ - \alpha = \theta_1 - \theta_2$ ... (4)

$$\therefore \quad \pm\tan\alpha = \tan(\theta_1 - \theta_2)$$

$$= \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2}$$

$$= \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_1 a_2 + b_1 b_2}$$

$$\therefore \quad \tan\alpha = \text{mod.} \left(\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 a_2 + b_1 b_2}\right) \quad \cdots \quad (5)$$

অর্থাৎ, $\boldsymbol{\alpha = \tan^{-1} \text{mod.} \left(\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 a_2 + b_1 b_2}\right)}$

দ্রষ্টব্য: (1) AB এবং CD সরলরেখাদ্বয় সমান্তরাল হইলে, উহাদের অন্তর্গত কোণের পরিমাপ শূন্য হইবে ; অর্থাৎ, $\alpha = 0^\circ$.

তখন, $\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 a_2 + b_1 b_2} = \pm\tan\alpha = \tan 0^\circ = 0.$

$\therefore \quad a_1 b_2 = a_2 b_1.$

সুতরাং, $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ এবং $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ সমান্তরাল হইবার শর্ত:

$$\boldsymbol{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}}.$$

সুতরাং, $\boldsymbol{ax + by + c_1 = 0}$

এবং $\boldsymbol{ax + by + c_2 = 0}$

সরলরেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল।

(2) AB এবং CD সরলরেখাদ্বয় পরস্পর লম্বভাবে থাকিলে, উহাদের অন্তর্গত কোণের পরিমাণ 90° হইবে ; অর্থাৎ, তখন, $\alpha = 90^\circ$.

তখন, $\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 a_2 + b_1 b_2} = \pm\tan\alpha = \tan 90^\circ.$

$\therefore \quad \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \cot 90^\circ = 0 ; \quad \therefore \quad a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0.$

সুতরাং, $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ এবং $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ লম্বভাবে থাকিবার শর্ত:

$$\boldsymbol{a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0.}$$

সুতরাং, $\boldsymbol{ax + by + c_1 = 0}$

এবং $\boldsymbol{bx - ay + c_2 = 0}$

সরলরেখাদ্বয় পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত।

উদাহরণ 1. নিম্নলিখিত সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের পরিমাপ নির্ণয় কর :

(i) $y=2x-5$ এবং $3y=x+7$;

(ii) $2x-y+6=0$ এবং $x+2y-5=0$;

(iii) $y-3x-7=0$ এবং $3y-x-8=0$.

(i) প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় হইতে পাই,

$$y=2x-5\ ;\ y=\tfrac{1}{3}x+\tfrac{7}{3}.$$

উহাদের অন্তর্গত কোণের পরিমাপ α হইলে,

$$\tan\alpha=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\frac{2-\frac{1}{3}}{1+2\times\frac{1}{3}}=1=\tan 45^\circ.$$

$\therefore$ নির্ণেয় কোণের পরিমাপ : 45°

(ii) প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় হইতে পাই,

$$y=2x+6\ ;\ \ y=-\tfrac{1}{2}x+\tfrac{5}{2}.$$

উহাদের অন্তর্গত কোণের পরিমাপ α হইলে,

$$\tan\alpha=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\frac{2-(-\frac{1}{2})}{1+2\times(-\frac{1}{2})}=\frac{5/2}{0}.$$

এখানে, $1+m_1m_2=0$; $\therefore\ \alpha=90^\circ$.

$\therefore$ নির্ণেয় কোণের পরিমাপ : 90°

(iii) প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় হইতে পাই,

$$y=3x+7\ ;\ \ y=\tfrac{1}{3}x+\tfrac{8}{3}$$

উহাদের অন্তর্গত কোণের পরিমাপ α হইলে,

$$\tan\alpha=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\frac{3-\frac{1}{3}}{1+3\times\frac{1}{3}}=\frac{4}{3}.$$

$\therefore$ নির্ণেয় কোণের পরিমাপ : $\tan^{-1}\frac{4}{3}$.

উদাহরণ 2. যে সরলরেখা $(-3, 5)$ বিন্দুগামী এবং $4x+3y+7=0$ এর সমান্তরাল তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

প্রদত্ত সরলরেখার সমান্তরাল যে কোন সরলরেখার সমীকরণ :

$$4x+3y+c=0\ ;$$

যেখানে, c যে কোন ধ্রুবক। এই সরলরেখা $(-3, 5)$ বিন্দুগামী হইলে,

$$4\times(-3)+3\times5+c=0\ ;$$

অর্থাৎ, $c=-3$.

সুতরাং, নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ :

$$4x+3y-3=0.$$

উদাহরণ 3. (3, −4) বিন্দুগামী যে সরলরেখা $2x-3y+6=0$ এর উপর লম্ব তাহার সমীকরণ বাহির কর।

প্রদত্ত সরলরেখাটির সমীকরণ :

$$y=\tfrac{2}{3}x+2 \qquad \dots \qquad (1)$$

প্রদত্ত সরলরেখার উপর লম্ব যে কোন সরলরেখার সমীকরণ :

$$y=-\tfrac{3}{2}x+k \qquad \dots \qquad (2)$$

যেখানে, k একটি নির্ণেয় ধ্রুবক।

এই সরলরেখাটি (3, −4) বিন্দুগামী হইলে,

$$-4=-\tfrac{3}{2}\times 3+k\text{ ; অর্থাৎ, } k=\tfrac{1}{2}.$$

সুতরাং, নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ :

$$y=-\tfrac{3}{2}x+\tfrac{1}{2},\text{ অর্থাৎ, } 3x+2y-1=0.$$

উদাহরণ 4. যে সরলরেখা $3y+x-3=0$ এবং $2y-x+1=0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং $4x-3y+5=0$ এর সমান্তরাল, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

এখন, $3y+x-3=0$ এবং $2y-x+1=0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী যে কোন সরলরেখার সমীকরণ :

$$(3y+x-3)+k(2y-x+1)=0\text{ ;}$$

যেখানে, k একটি নির্ণেয় ধ্রুবক। অতএব, সমীকরণটি :

$$(3+2k)y=(k-1)x+(3-k)\text{ ;}$$

$$\text{বা, } y=\left(\frac{k-1}{2k+3}\right)x+\frac{3-k}{2k+3} \qquad \dots \qquad (1)$$

আবার, প্রদত্ত সমীকরণ $4x-3y+5=0$ হইতে পাই,

$$y=\tfrac{4}{3}x+\tfrac{5}{3} \qquad \dots \qquad (2)$$

এখন, (1) এবং (2) সমান্তরাল হইবে, যদি :

$$\frac{k-1}{2k+3}=\frac{4}{3}\text{ ; অর্থাৎ, } k=-3.$$

∴ নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ :

$$(3y+x-3)-3(2y-x+1)=0\text{ ;}$$

$$\text{বা, } 4x-3y-6=0.$$

উদাহরণ 5. যে সরলরেখা $2x-3y+4=0$ এবং $3x+4y-5=0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং $6x-7y+8=0$ সরলরেখার উপর লম্ব তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

এখন, $2x-3y+4=0$ এবং $3x+4y-5=0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী যে কোন সরলরেখার সমীকরণ :

$$(2x-3y+4)+k(3x+4y-5)=0\ ;$$

বা, $$y=\left(\frac{2+3k}{3-4k}\right)x+\frac{4-5k}{3-4k} \quad \cdots \quad (1)$$

যেখানে, k যে কোন ধ্রুবক।

আবার, $6x-7y+8=0$ হইতে পাই,

$$y=\tfrac{6}{7}x+\tfrac{8}{7} \quad \cdots \quad (2)$$

এখন, (1) এবং (2) সমীকরণদ্বয় যে দুইটি সরলরেখাকে প্রকাশ করে তাহারা পরস্পর লম্ব হইবে, যদি :

$$\frac{2+3k}{3-4k}\times\frac{6}{7}=-1. \quad \text{অর্থাৎ,}\ k=33/10.$$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ :

$$(2x-3y+4)+\tfrac{33}{10}(3x+4y-5)=0$$

বা, $$119x+102y=125.$$

উদাহরণ 6. $A(-3, 4)$ এবং $B(7, -10)$ বিন্দুদ্বয় সংযোজক AB রেখাংশের লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

AB সরলরেখার সমীকরণ :

$$\frac{y-4}{-10-4}=\frac{x+3}{7+3}$$

বা, $$y-4=\frac{-7}{5}(x+3)$$

বা, $$y=\frac{-7}{5}.x-\frac{1}{5}. \quad \cdots \quad (1)$$

এখন, $A(-3, 4)$ এবং $B(7, -10)$ এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক :

$$\left(\frac{-3+7}{2},\ \frac{4-10}{2}\right);\ \text{অর্থাৎ,}\ (2,\ -3).$$

মনে করি, নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ :

$$y=mx+c. \quad \cdots \quad (2)$$

এখন, যেহেতু, উহা AB এর উপর লম্ব হইবে,
অর্থাৎ, সরলরেখা (1) এর উপর লম্ব হইবে,

$$\therefore \quad m \times (-\tfrac{7}{5}) = -1 \; ; \quad \therefore \quad m = \tfrac{5}{7}.$$

তাহা হইলে, নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ হইবে,

$$y = \tfrac{5}{7}x + c \qquad \cdots \qquad (3)$$

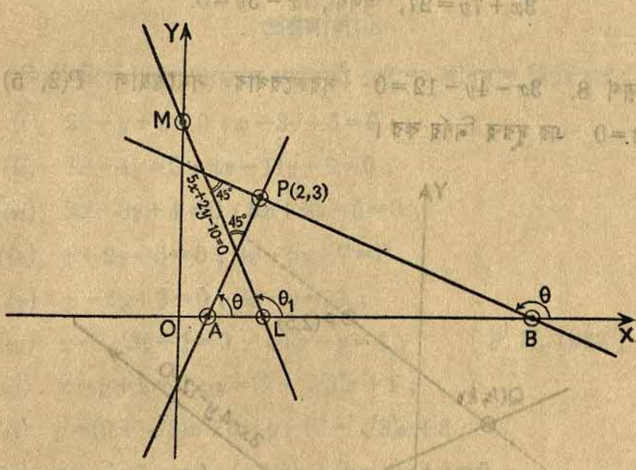
আবার, যেহেতু, উহা (2, −3) বিন্দুগামী,

$$\therefore \quad -3 = \tfrac{5}{7} \times 2 + c, \quad \therefore \quad c = -31/7.$$

সুতরাং, নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ :

$$y = \tfrac{5}{7}x - \tfrac{31}{7} \; ; \text{ অর্থাৎ, } 5x - 7y - 31 = 0.$$

উদাহরণ 7. যে সরলরেখা (2, 3) বিন্দুগামী এবং $5x + 2y - 10 = 0$ সরলরেখার সহিত 45° কোণে নত তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।



মনে করি, নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ :

$$y = mx + c \qquad \cdots \qquad (1)$$

উহা $P(2, 3)$-গামী হইলে,

$$3 = 2m + c$$

সুতরাং, নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ হইবে,

$$y = mx + (3 - 2m) \qquad \cdots \qquad (2)$$

এই সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত θ কোণে নত থাকিলে,

$$\tan\theta = m \qquad \cdots \qquad (3)$$

এখন, $5x + 2y - 10 = 0$ সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত θ_1 কোণে নত থাকিলে,

$$m_1 = \tan \theta_1 = -5/2 \qquad \cdots \qquad (4)$$

সুতরাং, প্রদত্ত সর্তানুসারে,

$$\theta - \theta_1 = 45^\circ \text{ অথবা, } \theta_1 - \theta = 45^\circ.$$

অর্থাৎ, $\pm 45^\circ = \theta - \theta_1$

$$\therefore \pm 1 = \tan(\theta - \theta_1)$$

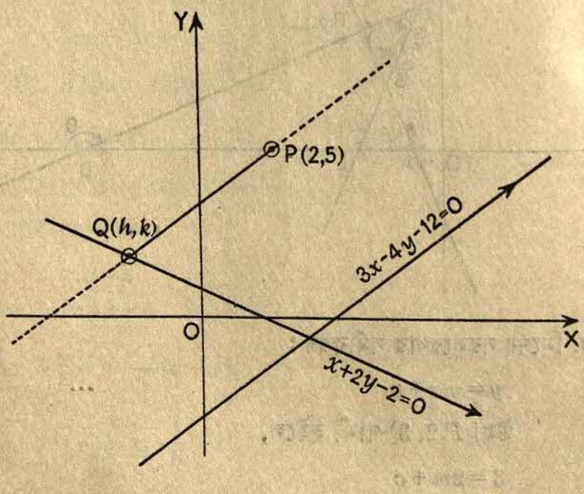
$$= \frac{\tan\theta - \tan\theta_1}{1 + \tan\theta \tan\theta_1} = \frac{m + 5/2}{1 - 5m/2}$$

$$\therefore m = -3/7 \text{ ; অথবা, } m = 7/3.$$

সুতরাং, (2) হইতে, নির্ণেয় সমীকরণ :

$$3x + 7y = 27, \text{ অথবা, } 7x - 3y = 5.$$

উদাহরণ 8. $3x - 4y - 12 = 0$ সরলরেখার সমান্তরাল $P(2, 5)$ হইতে $x + 2y - 2 = 0$ এর দূরত্ব নির্ণয় কর।



$3x - 4y - 12 = 0$ সরলরেখার সমান্তরাল যে কোন সরলরেখার সমীকরণ :

$$3x - 4y + c = 0$$

এই সরলরেখা $P(2, 5)$ বিন্দুগামী হইলে,

$$3 \times 2 - 4 \times 5 + c = 0 \text{ , অর্থাৎ, } c = 14.$$

সুতরাং, $P(2, 5)$ বিন্দুগামী এবং $3x-4y-12=0$ সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ :

$$3x-4y+14=0.$$

মনে করি, $3x-4y+14=0$ এবং $x+2y-2=0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু $Q(h, k)$. তাহা হইলে,

$$3h-4k+14=0$$

এবং $h+2k-2=0$

অর্থাৎ, $2h+4k-4=0$

$\therefore \; 5h+10=0, \; \therefore \; h=-2 \; ; \; k=2.$

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $= \sqrt{(2-h)^2+(5-k)^2}$

$= \sqrt{(2+2)^2+(5-2)^2}$

$=5$ একক।

প্রশ্নমালা 8

1. নিম্নলিখিত সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের পরিমাপ নির্ণয় কর :

(i) $2x-y+3=0$; $x-3y+5=0$;

(ii) $7x-4y=0$; $3x-11y+2=0$;

(iii) $2x-3y+4=0$; $3x+2y-5=0$;

(iv) $x+2y-5=0$; $2x-3y+7=0$;

(v) $x-4y+3=0$; $6x-y=11$;

(vi) $x-\sqrt{3}y+1=0$; $\sqrt{3}x-y=4$; **[P. U. 1964]**

(vii) $x-y+2=0$; $y=(2-\sqrt{3})x+1$;

(viii) $y=(2+\sqrt{3})x+5$; $y=(2-\sqrt{3})x+3$;

(ix) $ax-by+c=0$; $(a+b)y+(b-a)x+c=0$.

2. নিম্নলিখিত সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের পরিমাপ বাহির কর :

(i) $x=3, y=-3$; (ii) $x=0, y=-5$;

(iii) $y=-x, \; y=0$; (iv) $x=0, y=\sqrt{3}x-2$;

(v) $4y+3x+1=0, y=0$, (vi) $x=0, y\sqrt{3}+x-3=0$.

3. $3x+2y-17=0$; $x+5y+3=0$; $5x-y-11=0$; সরলরেখাত্রয় দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের প্রত্যেক কোণের পরিমাপ নির্ণয় কর।

4. $y+2=0, \; \sqrt{3}x+y=1, \; y-\sqrt{3}x+2+3\sqrt{3}=0$ সরলরেখাত্রয় দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের প্রত্যেক কোণের পরিমাপ নির্ণয় কর।

5. $x=0,\ y+\sqrt{3}x=0,\ x+y+(y-x)\sqrt{3}=a$ সরলরেখা তিনটি দ্বারা যে ত্রিভুজ গঠিত তাহার প্রত্যেক কোণের পরিমাপ নির্ণয় কর।

6. $(-4, 5)$ বিন্দুগামী এবং $3x-7y+5=0$ সরলরেখার সমান্তরাল সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

7. $(5, 3)$ বিন্দুগামী যে সরলরেখা, $2x-5y+7=0$ সরলরেখার উপর লম্ব তাহার সমীকরণ বাহির কর : [H. S. 1972]

8. $(2, 1)$ বিন্দুগামী এবং $2x+4y=7$ এর সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। x-অক্ষ, y-অক্ষ, এবং ঐ দুইটি সরলরেখা দ্বারা উৎপন্ন ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল বাহির কর। [H. S. Comp. 1974]

9. $(-2, 7)$ এবং $(8, -1)$ বিন্দুদ্বয় সংযোজক রেখাংশের লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক সরল-রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। মূলবিন্দু হইতে নির্ণেয় সরলরেখার দূরত্ব কত? [H. S. 1961]

10. $(2, 3)$ এবং $(3, -1)$ বিন্দুগামী সরলরেখার উপর লম্ব এবং $(2, 1)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [P. U. 1961]

11. $(7, 9)$ এবং $(-1, -7)$ বিন্দুদ্বয় সংযোজক রেখাংশ যে বিন্দুতে $3 : 5$ অনুপাতে বিভক্ত সেই বিন্দুগামী এবং ঐ রেখাংশের উপর লম্বভাবে অবস্থিত সরল রেখার সমীকরণ বাহির কর। মূলবিন্দু হইতে নির্ণেয় সরলরেখার দূরত্ব কত? [H. S. 1975]

12. $2x+6y-1=0$ এবং $4x-2y-9=0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং $3x+4y=0$ এর সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [H. S. 1970]

13. $3x-2y+1=0$ এবং $x-12y+7=0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং $2x-7y+10=0$ এর উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [Joint Ent. Ex. 1968]

14. যে সরলরেখা $3x+y-14=0$ এবং $2x-3y+20=0$ এর ছেদবিন্দুগামী এবং $x+y=15$ সরলরেখার উপর লম্ব তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর। [H. S. 1970]

15. P, Q, R বিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-7, 5), (3, 8), (-5, 13)$ হইলে এবং RN রেখা PQ এর উপর লম্ব এবং RT রেখা PQ-এর সমান্তরাল হইলে RN এবং RT এর সমীকরণ নির্ণয় কর। [H. S. 1976]

16. যদি $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ সরলরেখাটি $2x-y=1$ এবং $3x-4y+6=0$ এর ছেদবিন্দুগামী এবং $4x+3y=6$ এর সমান্তরাল হয়, তবে a এবং b এর মান বাহির কর।

17. $3x-4y+8=0$ সরলরেখার সমান্তরালভাবে $P(2, 5)$ বিন্দু হইতে $3x+y+4=0$ সরলরেখার দূরত্ব নির্ণয় কর। [Joint Ent. Ex. 1975]

18. AB রেখাংশের লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ $8x+6y-29=0$; A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-1, 2)$ হইলে, B বিন্দুর স্থানাঙ্ক বাহির কর।

19. $8x-18y+31=0$ সরলরেখাটি $P(2, 8)$ এবং $Q(h, k)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে। h, k-এর মান নির্ণয় কর।

[H. S. 1976]

20. যে সরলরেখা $(3, -1)$ বিন্দুগামী এবং $2x-y=5$ সরলরেখার সহিত 45° কোণে নত তাহার সমীকরণ বাহির কর।

21. $(3, -2)$ বিন্দুগামী এবং $y+\sqrt{3}x=2$ সরলরেখার সহিত 60° কোণে নত সরলরেখার সমীকরণ বাহির কর।

22. $3x-2y-1=0$ সরলরেখার সহিত 45° কোণে নত দিকে $(5, 3)$ বিন্দু হইতে ঐ প্রদত্ত সরলরেখার দূরত্ব নির্ণয় কর। [Joint Ent. Ex. 1969]

23. $(1, 2)$ বিন্দুগামী একটি সরলরেখা $x+y=4$ এর সহিত কত কোণে নত অবস্থায় অঙ্কন করিলে, ঐ সরলরেখা দুইটির ছেদবিন্দু এবং $(1, 2)$ বিন্দুর দূরত্ব $\sqrt{6}/3$ একক হইবে ? [Joint Ent. Ex. 1974]

24. মূলবিন্দু হইতে কোন একটি সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক (h, k). দেখাও যে, ঐ সরলরেখার সমীকরণ : $hx+ky=h^2+k^2$.

25. $7x-4y-29=0$ সরলরেখাটি P বিন্দুগামী; P বিন্দু হইতে $5x+2y+18=0$ এর উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-2, -4)$. P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [H. S. 1974]

26. একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের সমীকরণ, $3x+4y=4$, এবং উহার বিপরীত শীর্ষ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2, 2)$ হইলে, উহার অপর বাহুদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

27. $5x+4y=20$ এবং $4x+5y=20$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং উভয় অক্ষের সহিত 45° কোণে নত সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

28. দেখাও যে, $5x-y-6=0$; $x+5y-22=0$; $5x-y-32=0$ এবং $x+5y+4=0$ একটি বর্গক্ষেত্র উৎপন্ন করে।

29. $3x+2y-6=0$ এর সমান্তরাল অঙ্কিত সরলরেখা $x-2y=0$ এবং $y-2x=0$ এর সহিত যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে তাহার ক্ষেত্রফল 21 বর্গ একক হইলে, ঐ সরলরেখার সমীকরণ বাহির কর।

30. দেখাও যে, $x+y-4=0$, $x+5y-26=0$ এবং $3x+y=8$ সরলরেখা তিনটির উপর মূলবিন্দু হইতে অঙ্কিত লম্বত্রয়ের পাদবিন্দুগুলি একই সরলরেখার উপর অবস্থিত এবং ঐ সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

31. দেখাও যে, $(-7, 2)$, $(19, 8)$, $(15, -6)$ এবং $(-11, -12)$ এই বিন্দুগুলি একটি সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দু। উহার কর্ণদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[**H. S. Comp. 1975**]

32. $A\ (-2, 7)$, $B\ (7, 15)$, $C\ (-1, -5)$ এবং $D\ (h, k)$ বিন্দুগুলি একটি সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দু সূচিত করে এবং BC ঐ সামন্তরিকের একটি কর্ণ। (h, k) নির্ণয় কর এবং সামান্তরিকের অন্তর্গত কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর। [**H. S. 1974**]

33. $(2, 3)$ এবং $(8, 11)$ বিন্দুদ্বয় একটি আয়তক্ষেত্রের কর্ণের প্রান্তবিন্দু এবং উহার অপর কর্ণটি y-অক্ষের সমান্তরাল। উহার অপর কর্ণের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

34. দেখাও যে, $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c=0$, $ax+by+c'=0$ এবং $a'x+b'y+c'=0$ সরলরেখা চারিটি দ্বারা উৎপন্ন সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় সমকোণে ছেদ করিবে যদি $a^2+b^2=a'^2+b'^2$. [**Joint Ent. Ex. 1974**]

35. $3x=4y+7$ এবং $5y=12x+6$ সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর; এবং $(4,5)$ বিন্দুগামী যে সমস্ত সরলরেখা প্রদত্ত সরলরেখাদ্বয়ের সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করিবে তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[**Joint Ent. Ex. 1971**]

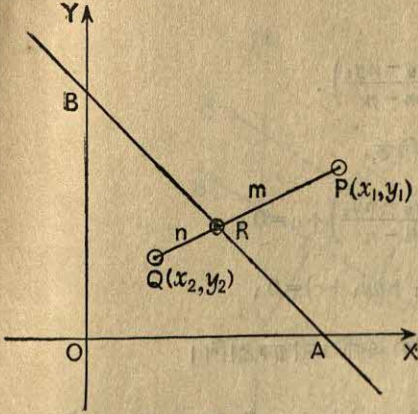
36. দেখাও যে, $x+y=0$; $(a+b)\ x+(a-b)y-2ab=0$; $(a-b)x+(a+b)y-2ab=0$; $(a>b>0)$, সরলরেখাত্রয় একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন করে। ঐ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল বাহির কর ; এবং মোটামুটি একটি চিত্র দেখাও।

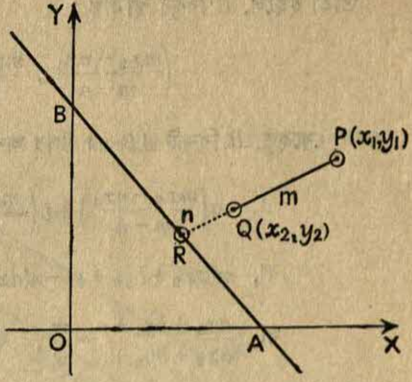
[**Joint Ent. Ex. 1975**]

37. দেখাও যে, $y=0$; $y\sqrt{3}=x$; $y=\sqrt{3}$; $\sqrt{3}y+x-10=0$ একটি বৃত্তস্থ ট্রাপিজিয়ম্ উৎপন্ন করে। ঐ বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ এবং ট্রাপিজিয়মের ক্ষেত্রফল বাহির কর।

[**Joint Ent. Ex. 1972**]

4-8. দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার একই পার্শ্বে অথবা বিপরীত পার্শ্বে থাকিবার শর্ত নির্ণয়।





মনে করি, AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা যাহার সমীকরণ :

$$ax + by + c = 0 \quad \cdots \quad (1)$$

এবং $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

[I] মনে করি, PQ রেখাংশকে AB সরলরেখা R বিন্দুতে $m : n$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে। তাহা হইলে, P এবং Q বিন্দুদ্বয় AB এর বিপরীত পার্শ্বে থাকিবে ; এবং তখন, R বিন্দুর স্থানাঙ্ক :

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right).$$

এখন, যেহেতু R বিন্দুটি AB এর উপর অবস্থিত,

$$\therefore \quad a\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}\right) + b\left(\frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right) + c = 0\,;$$

বা, $a(mx_2 + nx_1) + b(my_2 + ny_1) + c(m+n) = 0$;

বা, $m(ax_2 + by_2 + c) + n(ax_1 + by_1 + c) = 0$;

বা, $\dfrac{ax_1 + by_1 + c}{ax_2 + by_2 + c} = -\dfrac{m}{n}$, যাহা একটি ঋণাত্মক রাশি।

সুতরাং, $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয় $ax + by + c = 0$ সরলরেখার বিপরীত পার্শ্বে থাকিলে, $ax_1 + by_1 + c$ এবং $ax_2 + by_2 + c$ বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে।

[2] মনে করি, P এবং Q বিন্দুদ্বয় AB এর একই পার্শ্বে অবস্থিত; এবং PQ রেখাংশকে AB সরলরেখা R বিন্দুতে $m : n$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে।

তাহা হইলে, R বিন্দুর স্থানাঙ্ক :

$$\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right).$$

এখন, যেহেতু, R বিন্দুটি AB-এর উপর অবস্থিত,

$$\therefore \quad a\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}\right)+b\left(\frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)+c=0;$$

বা, $m(ax_2+by_2+c)-n(ax_1+by_1+c)=0$;

বা, $\frac{ax_1+by_1+c}{ax_2+by_2+c}=\frac{m}{n}$, যাহা একটি ধনাত্মক রাশি।

সুতরাং, $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয় $ax+by+c=0$ সরলরেখার একই পার্শ্বে থাকিলে, ax_1+by_1+c এবং ax_2+by_2+c একই চিহ্নযুক্ত হইবে।

সুতরাং, ax_1+by_1+c এবং ax_2+by_2+c একই চিহ্নযুক্ত হইলে, $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয় $ax+by+c=0$ এর একই পার্শ্বে থাকিবে; কিন্তু ইহারা বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট হইলে, বিন্দুদ্বয় $ax+by+c=0$ এর বিপরীত পার্শ্বে থাকিবে।

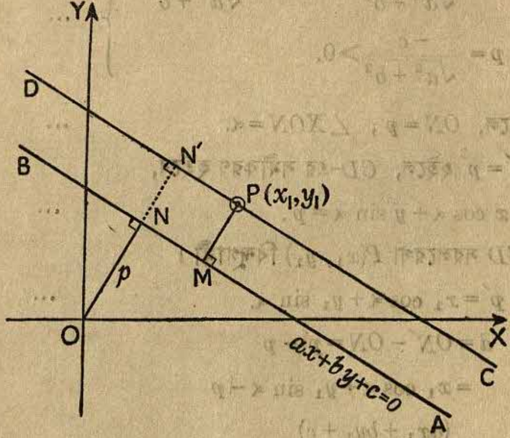
মন্তব্য :

[1] **ax_1+by_1+c ধনাত্মক হইলে,** $P(x_1, y_1)$ বিন্দুটি $ax+by+c=0$ সরলরেখার যে পার্শ্বে অবস্থিত তাহাকে **ধনাত্মক পার্শ্ব** (*positive side*) এবং ঐ সরলরেখার অপর পার্শ্বকে **ঋণাত্মক পার্শ্ব** (*negative side*) বলা হয়।

(2) যেহেতু, $a.0+b.0+c=c$, সুতরাং, $c>0$ হইলে, মূলবিন্দুটি $ax+by+c=0$ এর ধনাত্মক পার্শ্বে এবং $c<0$ হইলে, মূলবিন্দুটি $ax+by+c=0$ এর ঋণাত্মক পার্শ্বে অবস্থিত হইবে।

(3) ax_1+by_1+c এবং c একই চিহ্নবিশিষ্ট হইলে, (x_1, y_1) এবং $(0, 0)$ বিন্দুদ্বয় $ax+by+c=0$ সরলরেখার একই পার্শ্বে থাকিবে। কিন্তু, তাহারা বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট হইলে, (x_1, y_1) এবং $(0, 0)$ বিন্দুদ্বয় ঐ সরলরেখার বিপরীত পার্শ্বে থাকিবে।

4-9. একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার লম্ব-দূরত্ব নির্ণয়।



মনে করি, AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা যাহার সমীকরণ :

$$ax + by + c = 0 \quad \cdots \quad (1)$$

এবং $P(x_1, y_1)$ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু যাহা AB-এর উপর অবস্থিত নহে। মনে করি, ON, AB-এর উপর লম্ব, যেখানে, N, AB-এর উপর অবস্থিত।

এখন, $P(x_1, y_1)$ বিন্দু দিয়া AB-এর সমান্তরাল CD সরলরেখা টানিলাম। বর্ধিত ON, CDকে N' বিন্দুতে ছেদ করিলে, ON', CD-এর উপর লম্ব হইবে।

মনে করি, PM, AB এর উপর লম্ব, যেখানে, M, AB-এর উপর অবস্থিত। P বিন্দু হইতে AB-এর লম্ব দূরত্ব d একক হইলে, চিত্র হইতে,

$$d = PM = ON' - ON \quad \cdots \quad (2)$$

(1) হইতে পাই,

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0 \quad \cdots \quad (3)$$

(*i*) যদি $c < 0$ হয়, তাহা হইলে (3) হইতে,

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y = \frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

বা, $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p \quad \cdots \quad (4)$

যেখানে,

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\;;\; \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ p &= \frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}} > 0. \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (5).$$

তাহা হইলে, $ON = p$; $\angle XON = \alpha$. ... (6).

এখন, $ON' = p'$ হইলে, CD-এর সমীকরণ হইবে,

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p'. \quad \cdots \quad (7)$$

কিন্তু, CD সরলরেখা $P(x_1, y_1)$ বিন্দুগামী।

$$\therefore\; p' = x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha. \quad \cdots \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \therefore\; d &= ON' - ON = p' - p \\ &= x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p \\ &= \frac{(ax_1 + by_1 + c)}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \cdots \end{aligned}$$

(*ii*) **যদি $c>0$ হয়,** তাহা হইলে (3) হইতে

$$\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}y = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

বা, $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ ... (4′) ;

যেখানে,

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}\;;\; \sin\alpha = \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ p &= \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} > 0. \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (5').$$

তাহা হইলে, $ON = p$; $\angle XON = \alpha$. ... (6′).

$ON' = p'$ হইলে, CD এর সমীকরণ :

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p' \quad \cdots \quad (7');$$

যাহার উপর $P(x_1, y_1)$ অবস্থিত।

স্থতরাং, $p' = x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha$ ... (8′).

$$\begin{aligned} \therefore\; d &= ON' - ON = p' - p \\ &= x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p \\ &= -\frac{(ax_1 + by_1 + c)}{\sqrt{a^2+b^2}}. \quad \cdots \quad (9') \end{aligned}$$

(*iii*) **$c=0$ হইলে,** (3) হইতে,

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y=0,$$

বা, $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$;

যেখানে,

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^9}};\ \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}};\ p=0.$$

$ON'=p'$ হইলে, CD-এর সমীকরণ :

$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p'$

যাহার উপর $P(x_1, y_1)$ অবস্থিত।

$\therefore\ p'=x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha.$

$$\therefore\ d=ON'-ON=p'-0=p'$$
$$=x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha$$
$$=\frac{ax_1+by_1}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad (\because\ c=0).$$

স্থতরাং, $ax_1+by_1+c>0$ হইলে, নির্ণেয় দূরত্ব :

$$\boldsymbol{d=\frac{+(ax_1+by_1+c)}{\sqrt{a^2+b^2}}};\qquad \cdots \qquad (10A)$$

কিন্তু, $ax_1+by_1+c<0$ হইলে নির্ণেয় দূরত্ব :

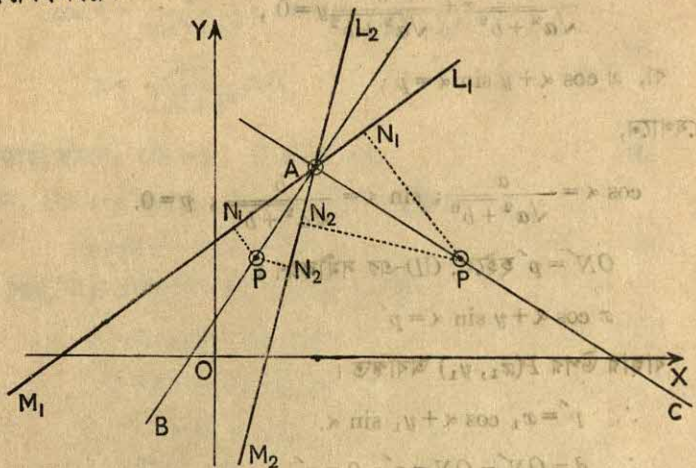
$$\boldsymbol{d=\frac{-(ax_1+by_1+c)}{\sqrt{a^2+b^2}}}\qquad \cdots \qquad (10B).$$

অর্থাৎ, $\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ এর **আঙ্কিক মানই** নির্ণেয় দূরত্ব হইবে।

P বিন্দু এবং AB সরলরেখার যে কোন অবস্থানের জন্য (10A) এবং (10B) সর্বদাই সত্য। উহাদের বিভিন্ন অবস্থানের জন্য তাহাদের অনুরূপ চিত্রের সাহায্যে (10A) এবং (10B) সম্পর্ক তুইটি অনুরূপভাবে দেখানো যাইতে পারে।

দ্রষ্টব্য : মূলবিন্দু হইতে $ax+by+c=0$ সরলরেখার লম্ব-দূরত্ব $=\frac{+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$, যদি $c>0$; অথবা $\frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$, যদি $c<0$.

4-10 দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখার অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয়।



মনে করি, L_1M_1 এবং L_2M_2 সরলরেখাদ্বয় পরস্পরকে A বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং তাহাদের সমীকরণ যথাক্রমে,

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (1);$$

এবং $a_2x+b_2y+c_2=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (2);$

যেখানে $c_1 \times c_2 > 0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (3);$

অর্থাৎ; c_1 এবং c_2 একই চিহ্নযুক্ত।

মনে করি, AB এবং AC, উহাদের মধ্যবর্তী কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক এবং যে কোণের মধ্যে মূল বিন্দুটি অবস্থিত, সেই কোণের সমদ্বিখণ্ডক AB সরলরেখা।

মনে করি, AB অথবা AC এর উপর $P(h, k)$ যে কোন বিন্দু।

L_1M_1 এবং L_2M_2 এর উপর PN_1 এবং PN_2 লম্ব টানি, যেখানে, N_1 এবং N_2 যথাক্রমে L_1M_1 এবং L_2M_2 এর উপর অবস্থিত। তাহা হইলে, $PN_1 = PN_2$ হইবে।

কিন্তু, $\dfrac{a_1h+b_1k+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}$ এবং $\dfrac{a_2h+b_2k+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$

এর আঙ্কিক মান যথাক্রমে PN_1 এবং PN_2 এর সমান হইবে।

এখন যেহেতু, c_1 এবং c_2 একই চিহ্নবিশিষ্ট, সুতরাং, P বিন্দুটি AB এর উপর থাকিলে, $a_1h+b_1k+c_1$ এবং $a_2h+b_2k+c_2$ একই চিহ্নবিশিষ্ট হইবে। তাহা হইলে, তখন,

$$\frac{a_1h+b_1k+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\frac{a_2h+b_2k+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

সুতরাং, $P(h, k)$ বিন্দুর সঞ্চারপথ, অর্থাৎ,

যে কোণের মধ্যে মূল বিন্দু অবস্থিত, সেই কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ :

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{(a_1^2+b_1^2)}}=\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{(a_2^2+b_2^2)}} \quad \cdots \quad (5a)$$

কিন্তু, P বিন্দুটি AC এর উপর থাকিলে $a_1h+b_1k+c_1$ এবং $a_2h+b_2k+c_2$ বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট হইবে। সুতরাং, তখন

$$\frac{a_1h+b_1k+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\frac{-(a_2h+b_2k+c_2)}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}. \quad (4a)$$

সুতরাং, এইরূপক্ষেত্রে, $P(h, k)$ বিন্দুর সঞ্চারপথ, অর্থাৎ, যে কোণের মধ্যে মূলবিন্দু অবস্থিত নহে, সেই কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ :

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{(a_1^2+b_1^2)}}=-\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{(a_2^2+b_2^2)}} \quad (5b)$$

সুতরাং নির্ণেয় সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ :

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{(a_1^2+b_1^2)}}=\pm\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{(a_2^2+b_2^2)}}.$$

উদাহরণ 1. দেখাও যে, $(0, -3)$ এবং $(-5, 7)$ বিন্দুদ্বয় $3x+7y-15=0$ সরলরেখার বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত।

$3x+7y-15$ এতে $x=0, y=-3$ বসাইয়া পাই,

$$3\times0+7\times(-3)-15=-36\,;$$

আবার, $3x+7y-15$-এতে $x=-5$ এবং $y=7$ বসাইয়া পাই,

$$3\times(-5)+7\times7-15=19\,;$$

সুতরাং, $(0, -3)$ এবং $(-5, 7)$ বিন্দুদ্বয় $3x+7y-15=0$ সরলরেখার বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত।

উদাহরণ 2. $(3, -2)$ বিন্দু হইতে (*i*) $5x-12y=0$; (*ii*) $3x+4y-19=0$ সরলরেখাদ্বয়ের লম্ব-দূরত্ব নির্ণয় কর।

(*i*) যেহেতু, $5\times3-12\times(-2)=39$;

$$\therefore \text{ নির্ণেয় দূরত্ব}=\frac{5\times3-12\times(-2)}{+\sqrt{5^2+(-12)^2}}$$

$$=\frac{39}{\sqrt{169}}=\frac{39}{13}=3 \text{ একক।}$$

(*ii*) যেহেতু, $3\times3+4\times(-2)-19=-18$;

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $= \dfrac{|-18|}{\sqrt{3^2+4^2}}$

$= \frac{18}{5} = 3\frac{3}{5}$ একক।

উদাহরণ 3. $12x+5y=4$ এবং $3x+4y+7=0$ সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের 'c' কে একই চিহ্নবিশিষ্ট করিয়া লিখিলে পাই,

$$-12x-5y+4=0 \text{ এবং } 3x+4y+7=0$$

সুতরাং, নির্ণেয় সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ ঃ

$$\frac{-12x-5y+4}{\sqrt{(-12)^2+(-5)^2}} = \pm\frac{3x+4y+7}{\sqrt{3^2+4^2}};$$

বা, $\dfrac{-12x-5y+4}{13} = \pm\dfrac{3x+4y+7}{5}$;

অর্থাৎ, $5(-12x-5y+4) = +13(3x+4y+7)$

এবং, $5(-12x-5y+4) = -13(3x+4y+7)$

বা, $99x+77y+71=0$; $7x-9y-37=0$.

সুতরাং, প্রদত্ত সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্গত যে কোণটির মধ্যে মূলবিন্দু অবস্থিত সেই কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ $99x+77y+71=0$, এবং অপর কোণটির সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ $7x-9y-37=0$.

উদাহরণ 4. দেখাও যে, $8y-x-2=0$ সরলরেখার উপরিস্থিত যে কোন বিন্দু হইতে $5x+12y-3=0$ এবং $3x-4y+1=0$ এর উপর পাতিত লম্বের দৈর্ঘ্য সমান।

$5x+12y-3=0$ এবং $3x-4y+1=0$ সমীকরণদ্বয়ের 'c' কে একই চিহ্নযুক্ত করিয়া লিখিলে পাই,

$$5x+12y-3=0 \text{ এবং } -3x+4y-1=0.$$

এখন, এই দুইটি সরলরেখার অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ ঃ

$$\frac{5x+12y-3}{\sqrt{5^2+12^2}} = \pm\frac{-3x+4y-1}{\sqrt{(-3)^2+4^2}}$$

বা, $\dfrac{5x+12y-3}{13} = \pm\dfrac{-3x+4y-1}{5}$

বা, $5(5x+12y-3) = \pm13(-3x+4y-1)$

বা, $8y-x-2=0$ এবং $32x+4y=1$.

সুতরাং, $8y-x-2=0$ এর উপরিস্থিত যে কোন বিন্দ $5x+12y-3=0$ এবং $3x-4y+1=0$ সরলখোদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী হইবে

উদাহরণ 5. $3x-5y+16=0$ এবং $3x-5y+50=0$ এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

$$3x-5y+16=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

এবং $$3x-5y+50=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

সরলরেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল।

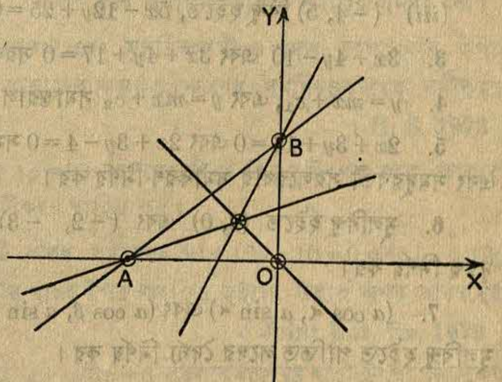
স্পষ্টতঃই, $(-2, 2)$ বিন্দুটি $3x-5y+16=0$ এর উপর অবস্থিত।

এখন, $(-2, 2)$ বিন্দু হইতে $3x-5y+50=0$ এর লম্বদূরত্বই নির্ণেয় দূরত্ব হইবে।

$$\therefore \text{ নির্ণেয় দূরত্ব} = \frac{3\times(-2)-5\times(2)+50}{\sqrt{3^2+(-5)^2}}$$

$$=\frac{34}{\sqrt{34}}=\sqrt{34} \text{ একক।}$$

উদাহরণ 6. $3x-4y+12=0$ সরলরেখাটি অক্ষদ্বয়ের সহিত যে ত্রিভূজ উৎপন্ন করে তাহার অন্তঃকোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। দেখাও যে, তাহারা এক বিন্দুগামী।



মনে করি, যে সরলরেখার সমীকরণ $3x-4y+12=0$, তাহা অক্ষদ্বয়ের সহিত AOB ত্রিভুজ উৎপন্ন করে।

এখন, $\angle AOB$ এর সমদ্বিখণ্ডক $y=-x$; অর্থাৎ, $y+x=0$.

এখানে, OA এবং OB এর সমীকরণ যথাক্রমে : $y=0$ এবং $x=0$.

$\angle OAB$ এর সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ :

$$y=\frac{3x-4y+12}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} \quad \text{বা,} \quad 3y-x-4=0.$$

আবার, $\angle OBA$ এর সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ :

$$-x=\frac{3x-4y+12}{\sqrt{3^2+(-4)^2}};$$

$$\text{বা,} \quad -5x=3x-4y+12; \quad \text{বা,} \quad 2x-y+3=0.$$

সুতরাং, নির্ণেয় সমীকরণত্রয় :

$$y+x=0\ ;\ \ 3y-x-4=0\ ;\ \ 2x-y+3=0.$$

এখন, $y+x=0$ এবং $2x-y+3=0$ সমীকরণদ্বয় সমাধান করিয়া পাই,

$$x=-1\ ; y=1.$$

স্পষ্টতঃই দেখা যাইতেছে, $(-1, 1)$ বিন্দুটি $3y-x-4=0$ এর উপর অবস্থিত। সুতরাং, ত্রিভুজের অন্তঃকোণগুলি সমদ্বিখণ্ডকত্রয় $(-1, 1)$ বিন্দুগামী।

প্রশ্নমালা 9

1. (i) $(-2, 5)$ বিন্দুটি $3y-4x-12=0$ সরলরেখার কোন্ পার্শ্বে অবস্থিত?

(ii) দেখাও যে, $(-2, 5)$ এবং $(3, 5)$ বিন্দুদ্বয় $3y-4x-12=0$ এর বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত।

2. (i) $(2, 3)$ বিন্দু হইতে $4y+3x+2=0$ এর লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর।

(ii) $(3, -5)$ বিন্দু হইতে $12x-5y-9=0$ এর লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর।

(iii) $(-4, 5)$ বিন্দু হইতে, $5x-12y+25=0$ এর লম্ব-দূরত্ব বাহির কর।

3. $3x+4y-10$ এবং $3x+4y+17=0$ সরলরেখাদ্বয়ের দূরত্ব নির্ণয় কর।

4. $y=mx+c_1$, এবং $y=mx+c_2$ সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের দূরত্ব নির্ণয় কর।

5. $2x+3y+16=0$ এবং $2x+3y-4=0$ সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের সমান্তরাল এবং সমদূরবর্তী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

6. মূলবিন্দু হইতে $(2, 0)$ এবং $(-2, -3)$ বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর।

7. $(a \cos \alpha, a \sin \alpha)$ এবং $(a \cos \beta, a \sin \beta)$ বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার উপর মূলবিন্দু হইতে পাতিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

. মূলবিন্দু হইতে $x \sin\theta + y \cos\theta = \frac{1}{2}a \sin 2\theta$ এবং $x \cos\theta - y \sin\theta = a \cos 2\theta$ এর লম্ব দূরত্ব যথাক্রমে p_1 এবং p_2 হইলে, প্রমাণ কর :

$$4{p_1}^2+{p_2}^2=a^2.$$

9. দেখাও যে, $(\pm\sqrt{a^2-b^2}, 0)$ বিন্দুদ্বয় হইতে $\frac{x}{a}\cos\theta+\frac{x}{b}\sin\theta=1$ এর উপর পাতিত লম্বদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের গুণফল $=b^2$.

10. x-অক্ষের উপরিস্থিত কোন্ বিন্দু হইতে $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ এর লম্ব-দূরত্ব a?

11. $3x-4y-6=0$ এবং $5x+12y=24$ সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

12. দেখাও যে, $7x-9y+10=0$ সরলরেখার উপরিস্থ যে কোন বিন্দু হইতে $3x+4y=5$ এবং $12x+5y=7$ সরলরেখাদ্বয়ের উপর লম্ব টানিলে উহারা (লম্বদ্বয়) সমান হইবে। [P. U. 1972]

13. দেখাও যে, $11x-3y+11=0$ এর উপরিস্থিত প্রতিটি বিন্দু $12x+5y+12=0$ এবং $3x-4y+3=0$ সরলরেখাদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী।

[Joint Ent. Ex. 1969]

14. $3x+4y+25=0$ এবং $x-3=0$ সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। ঐ সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় x-অক্ষের সহিত যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে তাহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [Joint Ent. Ex. 1975]

15. যে সরলরেখা $4x-3y+7=0$ এর উপর লম্ব এবং মূলবিন্দু হইতে 3 একক দূরে অবস্থিত তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর। [Joint Ent. Ex. 1972]

16. (0, 1) বিন্দুগামী যে দুইটি সরলরেখা (2, 2) বিন্দু হইতে এক একক দূরে অবস্থিত তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

17. যে সরলরেখা $2x-y-2=0$ এবং $3x-y-5=0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদ-বিন্দুগামী ও মূলবিন্দু হইতে $7/\sqrt{2}$ একক দূরে অবস্থিত তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

18. $4x-5y+1=0$ সরলরেখা এবং মূলবিন্দুগামী ও প্রদত্ত সরলরেখার উপর লম্বভাবে অবস্থিত যে সরলরেখা তাহাদের অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। [H. S. 1973]

19. অক্ষদ্বয়ের সহিত $5x+4y=20$ সরলরেখাটি যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে তাহার অন্তঃকোণের সমদ্বিখণ্ডকত্রয়ের সমীকরণ বাহির কর।

20. একটি বর্গক্ষেত্রের দুইটি বাহুর সমীকরণ $5x+12y-10=0$ এবং $5x+12y+29=0$; (3, 5) বিন্দুটি তৃতীয় বাহুর উপর অবস্থিত হইলে, উহার অপর বাহুদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। [Joint Ent. Ex. 1973]

21. $y=0$; $y=\sqrt{3}x$ এবং $y+\sqrt{3}x=6$ সরলরেখাত্রয়ের দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের অন্তঃকোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ এবং উহার অন্তঃকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

22. $3x+4y=384$; $3y-4x=288$ এবং $12x-5y+1488=0$ সরলরেখাত্রয় দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজটির অন্তঃকোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর ; এবং অন্তঃকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক বাহির কর।

23. $3x+4y-15=0$; $4x-3y+30=0$ এবং $y+6=0$ রেখাত্রয় দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র নির্ণয় কর।

24. $12x-5y+60=0$; $4x+3y=36$ এবং $y=0$ রেখাত্রয় দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র বাহির কর।

পঞ্চম অধ্যায়

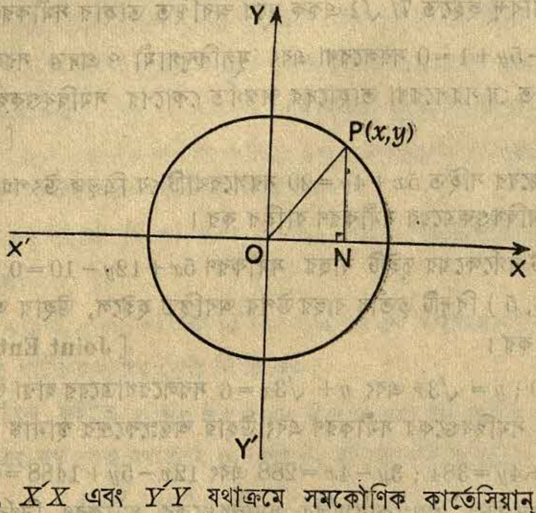
বৃত্তের সমীকরণ
(Equations of Circles)

5-1. বৃত্ত।

একটি চলমান বিন্দু P অপর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সর্বদা সমান দূরত্বে থাকিয়া নির্দিষ্ট বিন্দু এবং P বিন্দুর সহিত একই সমতলে সঞ্চরণ করিলে উহার সঞ্চার-পথকে **বৃত্ত** (Circle) বলা হয় ; নির্দিষ্ট দূরত্বকে ঐ বৃত্তের **ব্যাসার্ধ** এবং নির্দিষ্ট বিন্দুকে উহার **কেন্দ্র** বলা হয়।

5-2. নির্ধারিত আকারে বৃত্তের সমীকরণ।

[1] a একক ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু :



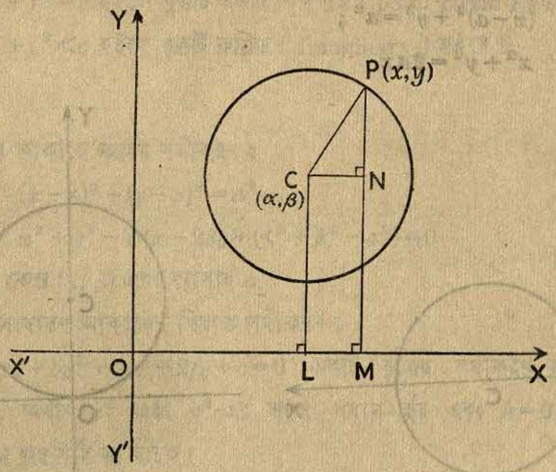
মনে করি, $X'X$ এবং $Y'Y$ যথাক্রমে সমকৌণিক কার্তেসিয়ান্ x-অক্ষ এবং y-অক্ষ এবং তাহাদের ছেদবিন্দু O মূলবিন্দু। মনে করি, a একক ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র O এবং $P(x, y)$ ঐ বৃত্তের উপরিস্থিত যে কোন বিন্দু। OP যোগ করি এবং $X'X$-এর উপর PN লম্ব টানি, যেখানে N, $X'X$-এর উপর অবস্থিত। তাহা হইলে,

$ON = x$ এবং $PN = y$ এবং $OP = a$. $\widehat{PNO}$-এর পরিমাপ এক সমকোণ বলিয়া,

$$ON^2 + PN^2 = OP^2 \text{ বা, } x^2 + y^2 = a^2.$$

সুতরাং, বৃত্তের সমীকরণ : $\mathbf{x^2 + y^2 = a^2}$.

[2] a একক ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র (α, β) :



মনে করি, $X'X$ এবং $Y'Y$ যথাক্রমে সমকৌণিক কার্তেসিয়ান্ x-অক্ষ এবং y-অক্ষ ; O মূলবিন্দু।

মনে করি, a একক ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র $C(\alpha, \beta)$ এবং $P(x, y)$ ঐ বৃত্তের উপরিস্থিত যে কোন বিন্দু। $X'X$-এর উপর CL এবং PM লম্ব টানি ; তারপর PM-এর উপর CN লম্ব টানি, যেখানে N, PM-এর উপর অবস্থিত।

তাহা হইলে,

$$CN = LM = OM - OL = x - \alpha;$$

$$PN = PM - NM = PM - CL = y - \beta;$$

এবং $CP = a$.

এখন, $\widehat{PNC}$-এর পরিমাপ এক সমকোণ বলিয়া,

$$CN^2 + PN^2 = CP^2;$$

বা, $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = a^2$.

সুতরাং, বৃত্তের সমীকরণ :

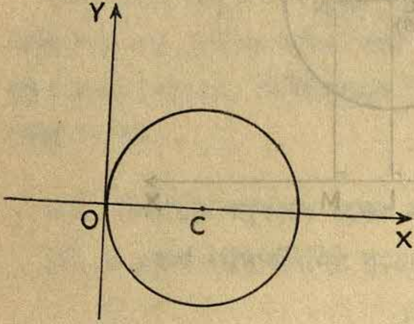
$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta^2) = a^2.$$

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ

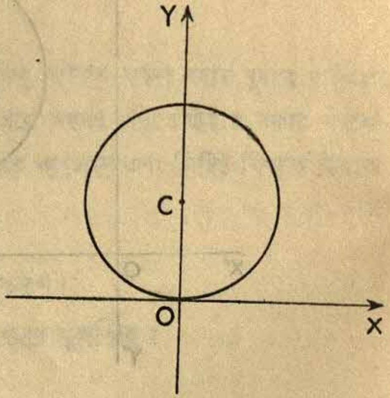
(1) a একক ব্যাসার্ধবিশিষ্ট এবং $C(a, 0)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ হইবে

$$(x-a)^2+y^2=a^2;$$

বা, $\boldsymbol{x^2+y^2=2ax.}$



(1)



(2)

(2) a একক ব্যাসার্ধবিশিষ্ট এবং $C(0, a)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ হইবে

$$x^2+(y-a)^2=a^2;$$

বা, $\boldsymbol{x^2+y^2=2ay.}$

5-3. $\boldsymbol{x^2+y^2+2gx+2fy+c=0}$ আকারের যে কোন দ্বিঘাত সমীকরণই বৃত্তের সমীকরণ।

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \quad \dots \quad (1)$$

সমীকরণ হইতে পাই,

$$(x+g)^2+(y+f)^2=\{\sqrt{g^2+f^2-c}\}^2 \quad \dots \quad (2)$$

ধরি,

$$-g=\alpha\,;\ -f=\beta\,;\ \sqrt{g^2+f^2-c}=a \quad \dots \quad (3)$$

তাহা হইলে, (2) হইতে পাই,

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=a^2 \quad \dots \quad (4)$$

যাহা একটি বৃত্তের সমীকরণ।

সুতরাং, দেখা যাইতেছে যে, সমীকরণ (1) সর্ব্বদাই বৃত্তের সমীকরণ যাহার কেন্দ্র $(-g, -f)$ এবং ব্যাসার্ধ $\sqrt{g^2+f^2-c}$.

দ্রষ্টব্য ঃ

(i) $g^2+f^2>c$ হইলে বৃত্তটি বাস্তব হইবে।

(ii) $g^2+f^2=c$ হইলে বৃত্তটি একটি বিন্দু-বৃত্ত (point-circle) হইবে।

(iii) $g^2+f^2<c$ হইলে বৃত্তটি কল্পিত (Imaginary) হইবে।

মন্তব্য ঃ

সাধারণ আকারে বৃত্তের সমীকরণ ঃ

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=a^2$$

বা, $x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+(\alpha^2+\beta^2-a^2)=0$

যাহার কেন্দ্র (α, β) এবং ব্যাসার্ধ a.

সুতরাং, সাধারণ আকারের দ্বিঘাত সমীকরণ ঃ

$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ একটি বৃত্তের সমীকরণ হইবে, যদি $b=a\neq 0$ হয়, অর্থাৎ, x^2 এবং y^2-এর সহগ সমান হয় এবং $h=0$ হয়, অর্থাৎ, xy ঘটিত কোন পদ যদি না থাকে।

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ

(1) (i) $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=a^2$ এবং (ii) $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=b^2$

সমীকরণদ্বয় **এককেন্দ্রিক বৃত্তের** (concentric circles).

(2) (i) $x^2+y^2+2gx+2fy+c_1=0$

এবং (ii) $x^2+y^2+2gx+2fy+c_2=0$

সমীকরণদ্বয় এককেন্দ্রিক বৃত্তের ;

এবং $c_1>c_2$ হইলে, $\sqrt{g^2+f^2-c_1}<\sqrt{g^2+f^2-c_2}$ হইবে,

অর্থাৎ, প্রথম বৃত্তের ব্যাসার্ধ দ্বিতীয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে।

5-4. তিনটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ।

মনে করি, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ তিনটি নির্দিষ্ট বিভিন্ন বিন্দু, যাহারা একই সরলরেখার উপর অবস্থিত নহে।

ধরি, বৃত্তটির নির্ণেয় সমীকরণ ঃ

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \quad \cdots \quad (1)$$

এই বৃত্তটির উপর A, B, C অবস্থিত বলিয়া,

$$x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0 \quad \cdots \quad (2)$$

$$x_2^2+y_2^2+2gx_2+2fy_2+c=0 \quad \cdots \quad (3)$$

$$x_3^2+y_3^2+2gx_3+2fy_3+c=0 \quad \cdots \quad (4)$$

(2)—(3) হইতে পাই,

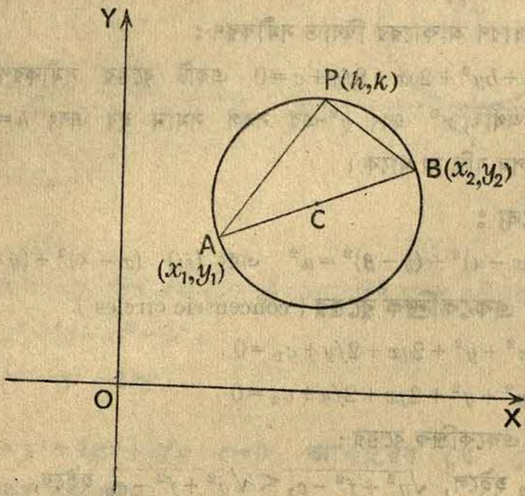
$$(x_1^2+y_1^2)-(x_2^2+y_2^2)+2g(x_1-x_2)+2f(y_1-y_2)=0 \quad \ldots \quad (5)$$

(3)—(4) হইতে পাই,

$$(x_2^2+y_2^2)-(x_3^2+y_3^2)+2g(x_2-x_3)+2f(y_2-y_3)=0 \quad \ldots \quad (6)$$

(5) এবং (6) হইতে g এবং f ; এবং পরে (2) হইতে c সহজেই নির্ণয় করা যাইবে। স্থতরাং, (1)-এতে g, f এবং c-এর মান বসাইলে নির্ণেয় সমীকরণ পাওয়া যাইবে।

5-5. (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয় সংযোজক রেখাংশ যে বৃত্তের ব্যাস তাহার সমীকরণ নির্ণয়।



মনে করি, AB ব্যাসবিশিষ্ট একটি বৃত্তের কেন্দ্র C, যেখানে A এবং B এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2),

মনে করি, $P(h, k)$ ঐ বৃত্তের উপরিস্থিত যে কোন বিন্দু।

এখন, PA সরলরেখার নতিমাত্রা : $\dfrac{k-y_1}{h-x_1}$;

এবং PB সরলরেখার নতিমাত্রা : $\dfrac{k-y_2}{h-x_2}$.

আবার, $\widehat{APB}$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ বলিয়া, উহার পরিমাপ এক সমকোণ।

স্থতরাং, PA এবং PB সরলরেখাদ্বয় পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত।

$$\therefore \quad \frac{k-y_1}{h-x_1} \cdot \frac{k-y_2}{h-x_2} = -1 ;$$

বা, $(h-x_1)(h-x_2)+(k-y_1)(k-y_2)=0.$

$\therefore$ বৃত্তটির নির্ণেয় সমীকরণ ঃ

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0.$$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ

$A(x_1, y_1)$ এবং $B(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয় সংযোজক রেখাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক ঃ

$$C\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right),$$ যাহা বৃত্তটির কেন্দ্র ;

এবং $\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

= বৃত্তটির ব্যাসার্ধ।

স্থতরাং, বৃত্তটির নির্ণেয় সমীকরণ ঃ

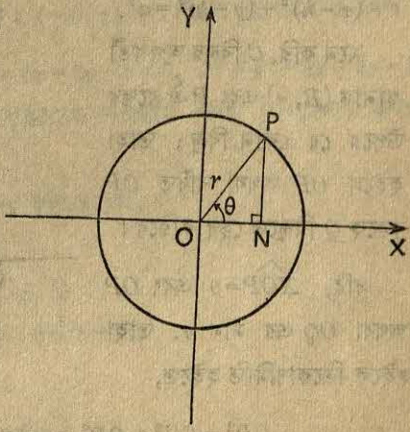
$$\{x-\tfrac{1}{2}(x_1+x_2)\}^2+\{y-\tfrac{1}{2}(y_1+y_2)\}^2$$
$$=\{\tfrac{1}{2}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\}^2$$

বা, $x^2+y^2-(x_1+x_2)x-(y_1+y_2)y+x_1x_2+y_1y_2=0$

বা, $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0.$

5-6. অক্ষবর্তী স্থানাঙ্কে বৃত্তের সমীকরণ।

মনে করি, a একক ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু; এবং ঐ বৃত্তের উপরিস্থিত যে কোন বিন্দু P, যাহার অক্ষবর্তী স্থানাঙ্ক (r, θ). OX-এর উপর PN লম্ব টানি।



স্থতরাং, $ON=r\cos\theta$;

$PN=r\sin\theta,$

কিন্তু, $ON^2+PN^2=OP^2,$

বা, $r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta=a^2,$

$(\because OP=a)$;

বা, $r^2=a^2$, অর্থাৎ, $r=a.$

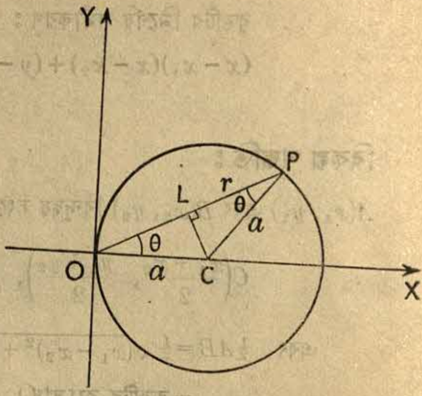
স্থতরাং, $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের অক্ষবর্তী স্থানাঙ্কে সমীকরণ ঃ

$$r=a.$$

[2] মনে করি, a একক ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র C; বৃত্তের উপরিস্থিত O একটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

O কে মূলবিন্দু এবং OC কে মূলরেখা ধরি। এখন এই বৃত্তের সমীকরণ :

$$(x-a)^2+y^2=a^2.$$



P ঐ বৃত্তের উপরিস্থিত যে কোন বিন্দু; P বিন্দুর অক্ষবর্তী স্থানাঙ্ক (r, θ) হইলে,

$\widehat{CPO}=\widehat{COP}=\theta$; $OC=PC=a$; $OP=r$; OP এর উপর CL লম্ব।

তাহা হইলে, $r=OP=OL+LP$

$$=a\cos\theta+a\cos\theta=2a\cos\theta.$$

$\therefore$ $(x-a)^2+y^2=a^2$ বৃত্তের অক্ষবর্তী স্থানাঙ্কে সমীকরণ :

$$r=2a\cos\theta.$$

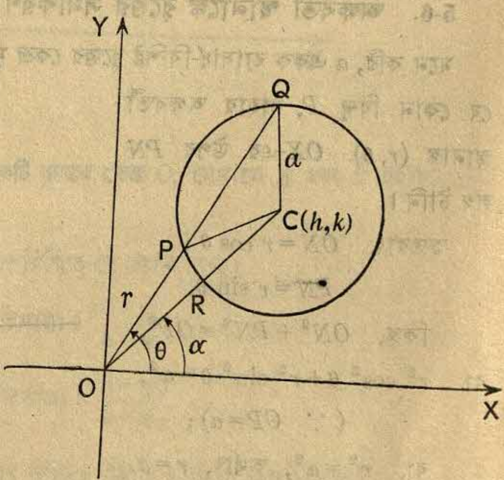
দ্রষ্টব্য : অনুরূপভাবে, $x^2+(y-a)^2=a^2$ বৃত্তের অক্ষবর্তী স্থানাঙ্কে সমীকরণ :

$$r=2a\sin\theta.$$

[3] মনে করি, একটি বৃত্তের কেন্দ্র $C(h, k)$ এবং ব্যাসার্ধ a একক।

সমকৌণিক কার্তেসিয়ান্ স্থানাঙ্কে বৃত্তের সমীকরণ :

$$(x-h)^2+(y-k)^2=a^2.$$



মনে করি, C বিন্দুর অক্ষবর্তী স্থানাঙ্ক (R, α) এবং P ঐ বৃত্তের উপরে যে কোন বিন্দু; তাহা হইলে OP অথবা বর্ধিত OP বৃত্তকে Q বিন্দুতে ছেদ করিবে।

ধরি, $\widehat{XOP}=\theta$ এবং OP অথবা OQ এর মান r. তাহা হইলে ত্রিকোণমিতি হইতে,

$$CP^2=OC^2+OP^2-2.OC.OP\cos\widehat{POC};$$

বা, $a^2=R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\alpha)$;

বা, $r^2 - 2Rr\cos(\theta - \alpha) + (R^2 - a^2) = 0.$

স্থতরাং, $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$ বৃত্তের অক্ষবর্তী স্থানাঙ্কে সমীকরণ :

$$r^2 - 2Rr\cos(\theta-\alpha) + (R^2 - a^2) = 0$$

যেখানে, $R^2 = h^2 + k^2$; $h = R\cos\alpha$, $k = R\sin\alpha$.

দ্রষ্টব্য : (i) মূলরেখা বৃত্তের কেন্দ্রগামী হইলে $\alpha = 0$; তখন বৃত্তের সমীকরণ :

$$r^2 - 2Rr\cos\theta + R^2 - a^2 = 0.$$

(ii) মূলবিন্দু বৃত্তের উপরে থাকিলে $R = a$; তখন বৃত্তের সমীকরণ :

$$r = 2a\cos(\theta - \alpha) ;$$

অর্থাৎ, $r = A\cos\theta + B\sin\theta$ আকারের।

উদাহরণ 1. নিম্নলিখিত বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর :

(i) $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0.$

(ii) $4x^2 + 4y^2 + 40x - 4y + 65 = 0.$

(i) $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ হইতে পাই,

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 5^2$$

যাহার কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক : $(3, -2)$ এবং ব্যাসার্ধ : 5 একক।

(ii) প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই,

$$x^2 + y^2 + 10x - y + 65/4 = 0 ;$$

বা, $(x^2 + 10x + 25) + (y^2 - y + \frac{1}{4}) = 9$;

বা, $(x+5)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = 3^2.$

$\therefore$ কেন্দ্রের নির্ণেয় স্থানাঙ্ক : $(-5, \frac{1}{2})$ এবং নির্ণেয় ব্যাসার্ধ : 3 একক।

উদাহরণ 2. দেখাও যে, $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 5 = 0$, $x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$ এবং $x^2 + y^2 + 4x - 14y + 11 = 0$ বৃত্তত্রয়ের কেন্দ্রগুলি একই সরলরেখার উপর অবস্থিত।

$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 5 = 0$ হইতে পাই,

$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 18,$

যাহার কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক : $(2, 3)$.

$x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$ হইতে পাই,

$(x-4)^2 + (y-1)^2 = 25,$

যাহার কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক : $(4, 1)$.

$x^2 + y^2 + 4x - 14y + 11 = 0$ হইতে পাই,

$$(x+2)^2+(y-7)^2=42,$$

যাহার কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক : $(-2, 7)$.

এখন, $(2, 3)$ এবং $(4, 1)$ বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার সমীকরণ :

$$\frac{y-3}{x-2}=\frac{1-3}{4-2} \quad \text{বা,} \quad y+x=5$$

স্পষ্টতঃ $(-2, 7)$ বিন্দুটি $y+x=5$ এর উপরে অবস্থিত। সুতরাং কেন্দ্রত্রয় সমরেখ।

উদাহরণ 3. 5 একক ব্যাসার্ধবিশিষ্ট যে বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(-3, 7)$ তাহার সমীকরণ বাহির কর।

নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ :

$$(x+3)^2+(y-7)^2=5^2;$$

বা, $x^2+y^2+6x-14y+33=0.$

উদাহরণ 4. $y+3x-9=0$ এবং $2y-x+10=0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী যে বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(0, -6)$ তাহার সমীকরণ বাহির কর।

প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় হইতে পাই,

$$y+3x-9=0 \qquad \dots \quad (1)$$

এবং $6y-3x+30=0 \qquad \dots \quad (2)$

(1) এবং (2) যোগ করিয়া পাই,

$7y+21=0$ অর্থাৎ $y=-3.$

তাহা হইলে, (1) হইতে, $x=4.$

সুতরাং, প্রদত্ত সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক : $(4, -3)$; তাহা হইলে, নির্ণেয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ :

$$\sqrt{4^2+(-3+6)^2}=\sqrt{16+9}=5.$$

সুতরাং, নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ :

$$(x-0)^2+(y+6)^2=5^2$$

বা, $x^2+y^2+12y+11=0.$

উদাহরণ 5. A এবং B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(3, -5)$ এবং $(-3, 7)$. AB যে বৃত্তের ব্যাস তাহার সমীকরণ কি ?

নির্ণেয় সমীকরণ : $(x-3)(x+3)+(y+5)(y-7)=0;$

বা, $x^2-9+y^2-2y-35=0;$

বা, $x^2+y^2-2y-44=0.$

উদাহরণ 6. (3, 2), (0, 5) এবং (−2, 4) বিন্দুত্রয়গামী বৃত্তের সমীকরণ বাহির কর।

প্রদত্ত বিন্দুত্রয় সমরেখ নয় বলিয়া তাহারা একটি বৃত্তের উপর থাকিবে।

মনে করি, নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ :

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \qquad \cdots \qquad (1)$$

প্রদত্ত বিন্দুত্রয় এই বৃত্তের উপর অবস্থিত বলিয়া,

$$9+4+6g+4f+c=0$$

$$0+25+0+10f+c=0\ ;$$

$$4+16-4g+8f+c=0\ ;$$

অর্থাৎ ; $6g+4f+c+13=0 \qquad \cdots \qquad (2)$

$$10f+c+25=0 \qquad \cdots \qquad (3)$$

$$-4g+8f+c+20=0 \qquad \cdots \qquad (4)$$

(2)—(3) হইতে পাই,

$$6g-6f-12=0, \text{ বা, } g-f=2 \qquad \cdots \qquad (5)$$

(3) − (4) হইতে পাই,

$$4g+2f+5=0 \qquad \cdots \qquad (6)$$

(5) হইতে পাই,

$$2g-2f-4=0 \qquad \cdots \qquad (7)$$

(6) + (7) হইতে পাই,

$$6g+1=0 \text{ বা, } g=-\tfrac{1}{6}.$$

স্থতরাং, (5) হইতে $f=-\frac{13}{6}$;

এবং, (3) হইতে, $c=-\frac{10}{3}$.

স্থতরাং, নির্ণেয় সমীকরণ :

$$3x^2+3y^2-x-13y-10=0.$$

উদাহরণ 7. (3, −5) বিন্দুগামী বৃত্ত দ্বারা x-অক্ষের ধনাত্মক দিক্ হইতে দুইটি ছিন্নাংশের দৈর্ঘ্য 4 এবং 6 একক হইলে, ঐ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

প্রদত্ত সর্তানুযায়ী নির্ণেয় বৃত্তটি (3, −5), (4, 0), (6, 0) বিন্দুত্রয়গামী হইবে। মনে করি, নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ :

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \qquad \cdots \qquad (1)$$

$$\therefore\ 34+6g-10f+c=0 \qquad \cdots \qquad (2)$$

$$16+8g+c=0 \qquad \cdots \qquad (3)$$

$$36+12g+c=0 \qquad \cdots \qquad (4)$$

(4)-(3) হইতে পাই,

$$4g+20=0\ ;\ \text{অর্থাৎ},\ g=-5.$$

সুতরাং, (3) হইতে, $c=24$;

এবং (2) হইতে, $f=14/5$.

সুতরাং, নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ :

$$x^2+y^2-10x+\tfrac{28}{5}y+24=0\ ;$$

অর্থাৎ, $5x^2+5y^2-50x+28y+120=0.$

উদাহরণ 8. (4, 3) এবং (−2, 5) বিন্দুদ্বয়গামী বৃত্তের কেন্দ্র $3x-5y+13=0$ সরলরেখার উপর অবস্থিত। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

মনে করি, বৃত্তটির সমীকরণ :

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \quad \cdots \quad (1)$$

যাহার কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক : $(-g, -f)$.

কেন্দ্রটি প্রদত্ত সরলরেখার উপর অবস্থিত বলিয়া,

$$-3g+5f+13=0. \quad \cdots \quad (2)$$

আবার, বৃত্তটি (4, 3) এব2 (−2, 5) বিন্দুদ্বয়গামী বলিয়া,

$$25+8g+6f+c=0, \quad \cdots \quad (3)$$

$$29-4g+10f+c=0. \quad \cdots \quad (4)$$

(3)—(4) হইতে পাই,

$$12g-4f-4=0,$$

বা, $3g-f-1=0.$ $\cdots$ (5)

(2) এবং (5) যোগ করিয়া পাই,

$$4f+12=0\ ;\ \text{বা},\ f=-3.$$

সুতরাং, (5) হইতে, $g=-2/3$;

এবং (3) হইতে পাই, $c=-5/3$.

সুতরাং, নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ :

$$3x^2+3y^2-4x-18y-5=0.$$

উদাহরণ 9. $x^2+y^2-24x-10y+160=0$ সমীকরণকে অক্ষবর্তী স্থানাঙ্কে রূপান্তর কর।

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই,

$$(x-12)^2+(y-5)^2=3^2.$$

$$\therefore\ R^2=12^2+5^2=13^2\ ; \qquad R=13\ ;$$

বৃত্তটির কেন্দ্র C হইলে, $OC=R=13$;

এখন, OC রেখা x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত α উৎপন্ন করিলে,

$\tan\alpha=\frac{5}{12}$; অর্থাৎ, $\alpha=\tan^{-1}\frac{5}{12}$.

তাহা হইলে, নির্ণেয় সমীকরণ :

$$r^2-2Rr\cos(\theta-\alpha)+(R^2-a^2)=0;$$

অর্থাৎ, $r^2-2.13.r\cos(\theta-\alpha)+(13^2-3^2)=0$;

বা, $r^2-26\,r\cos(\theta-\alpha)+160=0$;

যেখানে, $\alpha=\tan^{-1}(\frac{5}{12})$.

উদাহরণ 10. নিম্নলিখিত বৃত্তের কেন্দ্র এবং ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর :

(i) $r=3\sin\theta$; (ii) $r=4\cos\theta+6\sin\theta$,

(iii) $r^2+10r\cos\theta+16=0$

(i) প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই, $r^2=3(r\sin\theta)$;

বা, $x^2+y^2=3y$, $(\because\ x=r\cos\theta;\ y=r\sin\theta)$;

বা, $x^2+(y-\frac{3}{2})^2=(3/2)^2$;

যাহার ব্যাসার্ধ : 3/2 একক এবং

কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক : (0, 3/2); অর্থাৎ, $(3/2, \pi/2)$.

(ii) প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই,

$$r^2=4\,r\cos\theta+6\,r\sin\theta;$$

বা, $x^2+y^2=4x+6y$;

বা, $(x-2)^2+(y-3)^2=13$.

সুতরাং, বৃত্তটির ব্যাসার্ধ : $\sqrt{13}$ একক;

এবং কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক : (2, 3);

অর্থাৎ, $(\sqrt{13}, \alpha)$ যেখানে $\alpha=\tan^{-1}(\frac{3}{2})$.

(iii) প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই,

$$x^2+y^2+10x+16=0;$$

বা, $(x+5)^2+y^2=3^2$

যাহার ব্যাসার্ধ : 3 একক এবং কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক : (−5, 0); অর্থাৎ, $(5, \pi)$.

প্রশ্নমালা 10

1. নিম্নলিখিত বৃত্তগুলির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর :

(i) $x^2+y^2=25$; (ii) $x^2+y^2-12=0$;

(iii) $x^2+y^2-4x-6y-12=0$;

(iv) $x^2+y^2+4x+6y+4=0$;

(v) $x^2+y^2-6x+10y+21=0$;

(vi) $x^2+y^2-6x+14y+33=0$; [C. U. 1951]

(vii) $3x^2+3y^2-6x+7y+5=0$.

2. নিম্নলিখিত বৃত্তগুলিকে বৃহত্তম ব্যাসার্ধ হইতে ক্ষুদ্রতম ব্যাসার্ধের ক্রমে সাজাও :

(i) $x^2+y^2+6x-10y+30=0$;

(ii) $x^2+y^2-6x-10y-2=0$;

(iii) $x^2+y^2-6x+10y-15=0$;

(iv) $x^2+y^2+6x+10y-66=0$;

(v) $x^2+y^2+6x+10y+9=0$.

3. নিম্নলিখিত বৃত্তগুলিকে ক্ষুদ্রতম ব্যাসার্ধ হইতে বৃহত্তম ব্যাসার্ধের ক্রমে সাজাও :

(i) $x^2+y^2-2x+4y-20=0$;

(ii) $x^2+y^2-6x+4y-36=0$;

(iii) $x^2+y^2-6x-3y+5=0$;

(iv) $2x^2+2y^2+10x-6y-1=0$.

4. দেখাও যে, $x^2+y^2+4x+6y-51=0$; $x^2+y^2+8x+2y-8=0$; এবং $x^2+y^2-4x+14y-11=0$ বৃত্তত্রয়ের কেন্দ্র একটি সরলরেখায় অবস্থিত।

5. প্রমাণ কর যে, $x^2+y^2-2x+6y+1=0$, $x^2+y^2+4x-12y+9=0$, এবং $x^2+y^2-16=0$ বৃত্তত্রয়ের কেন্দ্র একটি সরলরেখায় অবস্থিত। [H. S. 1974]

6. প্রমাণ কর যে, $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2+6x-2y=6$, এবং $x^2+y^2-12x+4y=9$ বৃত্তত্রয়ের কেন্দ্র সমরেখ এবং তাহাদের ব্যাসার্ধ সমান্তর প্রগতিতে আছে। [H. S. 1965]

7. $x^2+y^2-2x-4y+4=0$, $x^2+y^2-8x+2y+13=0$ এবং $x^2+y^2-12x-4y+31=0$ বৃত্তত্রয়ের কেন্দ্রবিন্দুগুলির সংযোজক রেখাংশ দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল বাহির কর।

8. দেখাও যে, $x^2+y^2-8x-6y+9=0$, $x^2+y^2-2x+4y-4=0$, $x^2+y^2-14x+4y+4=0$ বৃত্তের কেন্দ্রগুলি একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন করে।

9. দেখাও যে, $x^2+y^2-2x-6y+6=0$ এবং $x^2+y^2-12x-6y+36=0$ বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্রের দূরত্ব উহাদের ব্যাসার্ধের যোগফলের সমান।

10. দেখাও যে, $x^2+y^2+4x-10y-20=0$ এবং $x^2+y^2-4x-4y+4=0$ বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্রের দূরত্ব উহাদের ব্যাসার্ধের অন্তরফলের সমান।

11. যদি $x^2+y^2+2ax+c^2=0$ এবং $x^2+y^2+2by+c^2=0$ বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্রের দূরত্ব উহাদের ব্যাসার্ধের যোগফল অথবা অন্তরফলের সমান হয়, তবে,

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{c^2}.$$

12. যে বৃত্তের ব্যাসার্ধ 5 একক এবং যাহা (2, 7) এবং (−2, 5) বিন্দুগামী তাহার সমীকরণ বাহির কর।

13. যে বৃত্তের কেন্দ্র $C(3, -5)$ এবং যাহা $P(-1, -2)$ বিন্দুগামী তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

14. $3x-2y-1=0$ এবং $4x+y-27=0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী যে বৃত্তের কেন্দ্র $C(2, 3)$ তাহার সমীকরণ বাহির কর।

15. মূলবিন্দুগামী যে বৃত্তের কেন্দ্র (3, −5) তাহার সমীকরণ বাহির কর।

16. $x^2+y^2-2x+4y-11=0$ এর সহিত এককেন্দ্রীয় যে বৃত্ত (4, 2) বিন্দুগামী তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

17. $x^2+y^2-4x-6y-3=0$ বৃত্তের সমকেন্দ্রীয় যে বৃত্ত $x^2+y^2+8x+10y-59=0$ বৃত্তটির কেন্দ্রগামী তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

18. (3, 7) এবং (9, 1) বিন্দুদ্বয় সংযোজক রেখাংশ যে বৃত্তের ব্যাস তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর। [H. S. 1970]

19. (0, −1) এবং (2, 3) বিন্দুদ্বয় সংযোজক রেখাংশ যে বৃত্তের ব্যাস তাহার সমীকরণ বাহির কর ; এবং ঐ বৃত্ত দ্বারা x-অক্ষের ছিন্নাংশ নির্ণয় কর। [H. S. 1966]

20. (−2, 1), (3, 4), (2, −2) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ বাহির কর।

[H. S. 1971]

21. (3, 4), (3, −6), (−1, 2) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর ; এবং ঐ বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং ব্যাসার্ধ বাহির কর। [H. S. 1961]

22. মূল বিন্দুগামী যে বৃত্ত দ্বারা x-অক্ষের এবং y-অক্ষের ছিন্নাংশ যথাক্রমে 3 এবং −4 একক, তাহার সমীকরণ বাহির কর।

23. মূলবিন্দুগামী যে বৃত্ত দ্বারা x-অক্ষ এবং y-অক্ষের ধনাত্মক দিকের ছিন্নাংশ যথাক্রমে 6 একক এবং 8 একক তাহার সমীকরণ বাহির কর।

24. (1, −1) এবং (7, 5) বিন্দুদ্বয়গামী যে বৃত্তের কেন্দ্র x-অক্ষের উপর অবস্থিত তাহার সমীকরণ বাহির কর।

25. x-অক্ষের উপর অবস্থিত এবং মূলবিন্দু হইতে 3 একক দূরত্বে অবস্থিত বিন্দুদ্বয়-গামী যে বৃত্তের ব্যাসার্ধ 5 একক তাহার সমীকরণ বাহির কর।

26. (1, 9) এবং (4, 6) বিন্দুদ্বয়গামী কোন বৃত্তের একটি ব্যাসের সমীকরণ $2x - y + 4 = 0$ হইলে বৃত্তটি সমীকরণ, উহার কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। [H. S. Comp. 1975]

27. যে বৃত্তের কেন্দ্র $x - 4y + 7 = 0$ সরলরেখার উপর অবস্থিত এবং x-অক্ষকে $x = 2$ এবং $x = 6$ বিন্দুতে ছেদ করে তাহার সমীকরণ বাহির কর। [H. S. 1969]

28. যে ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক (0, 1), (−2, 3) এবং (4, −5) তাহার পরিবৃত্তের সমীকরণ বাহির কর।

29. নিম্নোল্লিখিত সরলরেখাত্রয় দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের পরিবৃত্তের সমীকরণ বাহির কর: (*i*) $y = 2x$; $y = 3x$; $y = 5x + 4$;

(*ii*) $x - y = 11$; $5x + y = 103$; $2x - 3y - 31 = 0$,

30. দেখাও যে, (2, 3), (16, 1), (16, 3), (14, 7) বিন্দুগুলি সমবৃত্ত। [H. S. Comp. 1973]

31. দেখাও যে, (3, 3), (6, 4), (7, 1) এবং (4, 0) বিন্দুগুলি একটি বৃত্তের উপর অবস্থিত। ঐ বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। [P. U. 1976]

32. দেখাও যে, (0, 0), (2, 4), (5, 5), (8, 4) এবং (9, 3) বিন্দু পাঁচটি সমবৃত্ত ; ঐ বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং ব্যাসার্ধ বাহির কর।

33. নিম্নলিখিত বৃত্তগুলির সমীকরণ অক্ষবর্তী স্থানাঙ্কে পরিবর্তন কর এবং উহাদের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক অক্ষবর্তী স্থানাঙ্কে লিখ:

(*i*) $x^2 + y^2 = 16$; (*ii*) $(x - 2)^2 + y^2 = 9$;

(*iii*) $x^2 + y^2 + 6x = 0$; (*iv*) $x^2 + y^2 - 8x + 7 = 0$;

(*v*) $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$.

34. নিম্নলিখিত বৃত্তগুলির ব্যাসার্ধ এবং কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর:

(*i*) $r^2 = 5$; (*ii*) $r = 5 \cos \theta$;

(*iii*) $r = 3 \sin \theta$; (*iv*) $r^2 - 10r \cos \theta + 16 = 0$;

(*v*) $r = 7 \cos (\theta - \pi/2)$; (*vi*) $r = 3\sqrt{3} \cos \theta + 3 \sin \theta$.

35. 5 একক ব্যাসার্ধবিশিষ্ট যে বৃত্তের কেন্দ্র $(3, \pi/3)$ তাহার সমীকরণ বাহির কর।

36. (3, 0°), (2, 30°) এবং (5, 90°) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

37. $(2, -\pi/2)$ এবং $(2, \pi/2)$ বিন্দুদ্বয় সংযোজক রেখাংশ যে বৃত্তের ব্যাস তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর। উহার কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক বাহির কর।

5-7. একটি নির্দিষ্ট বৃত্তের সাপেক্ষে কোন বিন্দুর অবস্থান নির্ণয়।

মনে করি, নির্দিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ :

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0,$$

যাহার কেন্দ্র $C(-g, -f)$ এবং যাহার ব্যাসার্ধ $a=\sqrt{g^2+f^2-c}$.

মনে করি, $P(x_1, y_1)$ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

$$\therefore \quad CP^2=(x_1+g)^2+(y_1+f)^2$$

তাহা হইলে, P বিন্দুটি বৃত্তটির বাহিরে, উপরে অথবা ভিতরে থাকিবে যদি যথাক্রমে,

$$CP >, \text{ বা } =, \text{ বা, } < a \text{ হয়,}$$

অর্থাৎ, যদি, $CP^2 <$, বা, $=$, বা, $<a^2$ হয় ;

অর্থাৎ, যদি, $(x_1+g)^2+(y_1+f)^2 >$, বা, $=$, বা, $< g^2+f^2-c$ হয় ;

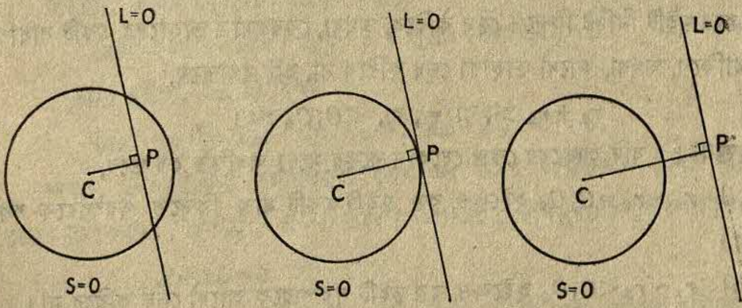
অর্থাৎ, **যদি $x_1{}^2+y_1{}^2+2gx_1+2fy_1+c>$, বা, $=$, বা, <0 হয়।**

মন্তব্য : (*i*) মনে করি,

$$S\equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

এবং $L\equiv Ax+By+C=0$

যথাক্রমে একটি নির্দিষ্ট বৃত্ত এবং একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ।



$S=0$ বৃত্তের কেন্দ্র $C(-g, -f)$, এবং ব্যাসার্ধ $\sqrt{g^2+f^2-c}$.

$L=0$ সরলরেখার উপর CP লম্ব হইলে, যেখানে P বিন্দুটি $L=0$ এর উপর অবস্থিত, $L=0$ সরলরেখাটি $S=0$ বৃত্তকে দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে ছেদ করিবে, অথবা, $S=0$ বৃত্তের উপরিস্থিত একটিমাত্র বিন্দুগামী হইবে, অথবা, $S=0$ কে আদৌ ছেদ করিবে না, যদি যথাক্রমে

$$CP <, \text{ বা, } =, \text{ বা, } > \sqrt{g^2+f^2-c} \text{ হয়;}$$

যেখানে $CP=\text{mod.}\,(-Ag-Bf+C)/\sqrt{A^2+B^2}$

(*ii*) মনে করি,

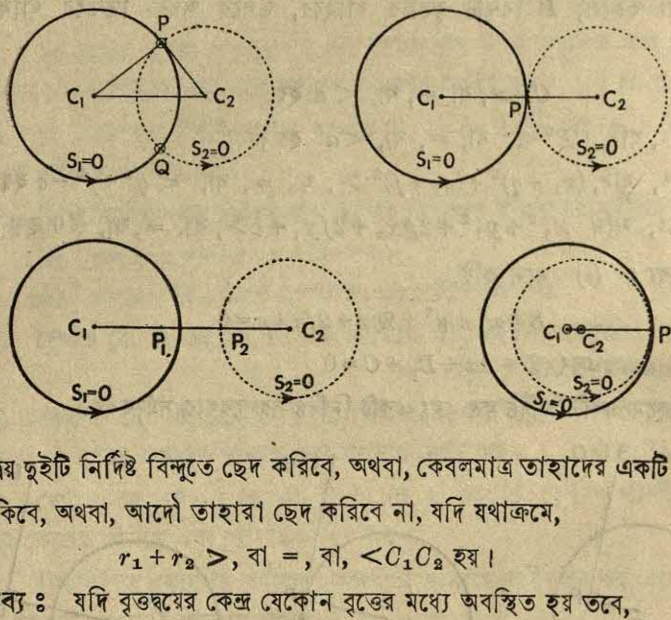
$$S_1 \equiv x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0,$$

এবং $S_2 \equiv x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$

দুইটি নির্দিষ্ট বৃত্ত, যাহাদের ব্যাসার্ধ এবং কেন্দ্র যথাক্রমে,

$$r_1 = \sqrt{g_1^2 + f_1^2 - c_1}, \quad r_2 = \sqrt{g_2^2 + f_2^2 - c_2}\ ;$$

এবং $C_1(-g_1, -f_1)$; $C_2(-g_2, -f_2)$.



বৃত্তদ্বয় দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে ছেদ করিবে, অথবা, কেবলমাত্র তাহাদের একটি সাধারণ বিন্দু থাকিবে, অথবা, আদৌ তাহারা ছেদ করিবে না, যদি যথাক্রমে,

$$r_1 + r_2 >, \text{ বা } =, \text{ বা, } < C_1C_2 \text{ হয়।}$$

মন্তব্য ঃ যদি বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্র যেকোন বৃত্তের মধ্যে অবস্থিত হয় তবে,

(*i*) $r_1 \sim r_2 = C_1C_2$ হইলেও, বৃত্ত দুইটি একটি মাত্র বিন্দুতে পরস্পরকে স্পর্শ করিবে।

(*ii*) $r_1 \sim r_2 < C_1C_2$ হইলেও, বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে আদৌ ছেদ করিবে না।

(*iii*) $r_1 \sim r_2 < C_1C_2$ হইলে বৃত্ত দুইটি ছেদ করিবে।

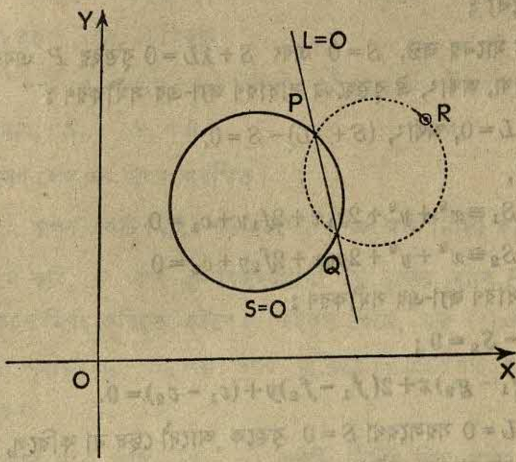
5-8. (1) একটি নির্দিষ্ট বৃত্ত এবং একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ এবং (2) দুইটি নির্দিষ্ট বৃত্তের ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের অথবা সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়।

[1] মনে করি,

$$S \equiv ax^2 + ay^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \cdots \quad (1)$$

এবং $L \equiv Ax + By + C = 0 \quad \cdots \quad (2)$

যথাক্রমে একটি নির্দিষ্ট বৃত্ত এবং একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ; এবং উহারা দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু P এবং Q-এতে ছেদ করে।



এখন, P অথবা Q-এর স্থানাঙ্ক (h, k) হইলে,

$$ah^2 + ak^2 + 2gh + 2fk + c = 0$$

এবং $Ah + Bk + C = 0.$

সুতরাং, λ এর যে কোন মানের জন্য

$$(ah^2 + ak^2 + 2gh + 2fk + c) + \lambda(Ah + Bk + C) = 0 \quad \cdots \quad (3)$$

তাহা হইলে, (h, k) বিন্দুটি

$$(ax^2 + ay^2 + 2gx + 2fy + c) + \lambda(Ax + By + C) = 0, \quad \cdots \quad (4)$$

অর্থাৎ, $S + \lambda L = 0$ সমীকরণের লেখ এর উপর অবস্থিত। কিন্তু, (4) একটি বৃত্তের সমীকরণ। সুতরাং, $S = 0$ এবং $L = 0$-এর ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ :

$$S + \lambda L = 0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (5)$$

দ্রষ্টব্য : অপর একটি নির্দিষ্ট শর্ত হইতে λ-এর মান পাওয়া যাইতে পারে। যেমন, (*i*) P এবং Q বিন্দুদ্বয়গামী যে বৃত্তের একটি ব্যাস PQ রেখাংশ হইবে, সেই বৃত্তের অর্থাৎ, (5)-এর কেন্দ্রবিন্দু $L = 0$-এর উপর থাকিবে; এই শর্ত হইতে λ-এর মান পাওয়া যাইবে।

(*ii*) আবার, মনে করি, $R(x', y')$ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু যাহা PQ সরলরেখার উপর অবস্থিত নয়। তাহা হইলে সমীকরণ (5)-এর লেখ, R বিন্দুগামী হইলে, এখান হইতে λ-এর মান পাওয়া যাইবে।

মন্তব্য : $R(x', y')$ বিন্দুটি PQ সরলরেখার উপর অবস্থিত হইলে λ-এর কোন মান পাওয়া যাইবে না যাহার জন্য $S+\lambda L=0$ ঐ বিন্দুগামী হইবে।

বিশেষ দ্রষ্টব্য :

λ-এর নির্দিষ্ট মানের জন্য, $S=0$ এবং $S+\lambda L=0$ বৃত্তদ্বয় P এবং Q বিন্দুগামী এবং PQ সরলরেখা, অর্থাৎ, ঐ বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা-এর সমীকরণ :

$$L=0, \text{ অর্থাৎ, } (S+\lambda L)-S=0.$$

তাহা হইলে,

$$S_1 \equiv x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0$$

এবং $S_2 \equiv x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2=0$

বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা-এর সমীকরণ :

$$\boldsymbol{S_1-S_2=0};$$

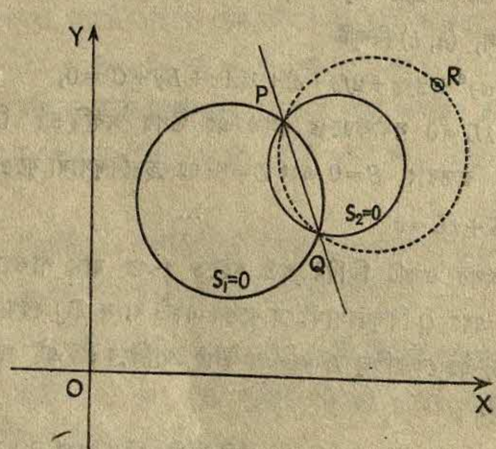
অর্থাৎ, $2(g_1-g_2)x+2(f_1-f_2)y+(c_1-c_2)=0.$

মন্তব্য : $L=0$ সরলরেখা $S=0$ বৃত্তকে আদৌ ছেদ না করিলে, উহাদের ছেদ-বিন্দুগামী কোন বৃত্ত পাওয়া যাইবে না।

[2] মনে করি,

$$S_1 \equiv x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0 \quad \cdots \quad (1)$$
$$S_2 \equiv x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2=0 \quad \cdots \quad (2)$$

দুইটি নির্দিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ এবং উহারা দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু P এবং Qতে ছেদ করে।



মনে করি, P অথবা Q-এর স্থানাঙ্ক (h, k). তাহা হইলে,

$$h^2+k^2+2g_1h+2f_1k+c_1=0;$$

এবং $h^2+k^2+2g_2h+2f_2k+c_2=0.$

সুতরাং, λ-এর যে কোন মানের জন্য

$$(h^2+k^2+2g_1h+2f_1k+c_1)+\lambda(h^2+k^2+2g_2h+2f_2k+c_2)=0. \quad \cdots \quad (3)$$

তাহা হইলে, (h, k) বিন্দুটি

$$(x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1)+\lambda(x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2)=0\ ;$$

অর্থাৎ, $\boldsymbol{S_1+\lambda S_2=0}$ $\quad \cdots \quad (4)$

সমীকরণের লেখ এর উপর অবস্থিত।

দ্রষ্টব্য ঃ অপর একটি নির্দিষ্ট শর্ত হইতে, λ-এর মান নির্দিষ্ট হইবে। যেমন,

(*i*) মনে করি, P এবং Q বিন্দুদ্বয়গামী যে বৃত্তের ব্যাস PQ রেখাংশ হইবে তাহার সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে। এইরূপ ক্ষেত্রে, বৃত্ত (4) এর কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক PQ সরলরেখা অর্থাৎ, $S_1-S_2=0$ উপর থাকিবে। এই শর্ত হইতে λ-এর মান পাওয়া যাইবে।

(*ii*) আবার মনে করি, $R(x', y')$ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু যাহা PQ সরলরেখার উপর অবস্থিত নয়। তাহা হইলে যে বৃত্ত, P এবং Q বিন্দুগামী হইবে, R বিন্দুটি সেই বৃত্ত, অর্থাৎ, $S_1+\lambda S_2=0$ এর উপর থাকিবে। এই শর্ত হইতে λ এর মান পাওয়া যাইবে।

মন্তব্য ঃ (*i*) $R(x', y')$ বিন্দুটি PQ সরলরেখার উপর অবস্থিত না হইলে, এবং $S_1+\lambda S_2=0$ ঐ বিন্দুগামী হইলে, $S_1+\lambda S_2=0$ একটি বৃত্তের সমীকরণ হইবে।

(*ii*) R বিন্দুটি PQ-এর উপর থাকিলে, কিন্তু P অথবা Q না হইলে, এবং $S_1+\lambda S_2=0$ ঐ বিন্দুগামী হইলে, $S_1+\lambda S_2=0$, PQ এর সমীকরণ হইবে।

(*iii*) $S_1=0$ এবং $S_2=0$ আদৌ ছেদ না করিলে উহাদের ছেদবিন্দুগামী কোন সরলরেখা বা বৃত্ত পাওয়া যাইবে না।

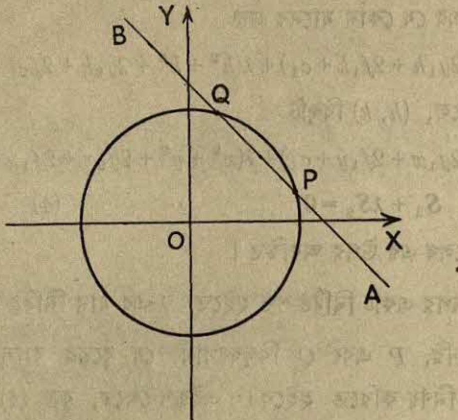
5-9. একটি নির্দিষ্ট বৃত্ত দ্বারা একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার ছেদিত জ্যা-এর দৈর্ঘ্য নিরূপণ।

মনে করি, বৃত্তটির সমীকরণ ঃ $x^2+y^2=a^2$ এবং AB সরলরেখাটির সমীকরণ ঃ $y=mx+c$.

সমীকরণদ্বয় হইতে পাই,

$$x^2+(mx+c)^2=a^2\ ;$$

বা, $(1+m^2)x^2+2mcx+(c^2-a^2)=0. \quad \cdots \quad (1)$



মনে করি, সরলরেখাটি বৃত্তটিকে P এবং Q বিন্দুতে ছেদ করে; এবং উহাদের ছেদবিন্দু যথাক্রমে (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2). তাহা হইলে, (1) এর বীজদ্বয় x_1 এবং x_2 হইবে। সুতরাং,

$$x_1 + x_2 = -\frac{2mc}{1+m^2} \text{ এবং } x_1x_2 = \frac{c^2 - a^2}{1+m^2}.$$

$$\therefore \quad (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$$
$$= \frac{4m^2c^2}{(1+m^2)^2} - \frac{4(c^2-a^2)}{1+m^2}$$
$$= \frac{4\{a^2(1+m^2) - c^2\}}{(1+m^2)^2}$$

আবার, (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয় $y = mx + c$-এর উপর অবস্থিত বলিয়া,

$$y_1 = mx_1 + c \text{ এবং } y_2 = mx_2 + c.$$

$$\therefore \quad y_1 - y_2 = m(x_1 - x_2).$$

$\therefore$ PQ জ্যা-এর দৈর্ঘ্য

$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$
$$= \sqrt{(1+m^2)(x_1 - x_2)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{4\{a^2(1+m^2) - c^2\}}{1+m^2}}.$$

মন্তব্য : (i) $c^2 < a^2(1+m^2)$ হইলে, AB সরলরেখা বৃত্তটিকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে।

(ii) $c^2 = a^2(1+m^2)$ হইলে, AB সরলরেখা বৃত্তটির উপরিস্থিত কেবলমাত্র একটি বিন্দু দিয়া যাইবে। এইরূপক্ষেত্রে, P এবং Q বিন্দু একই হইবে।

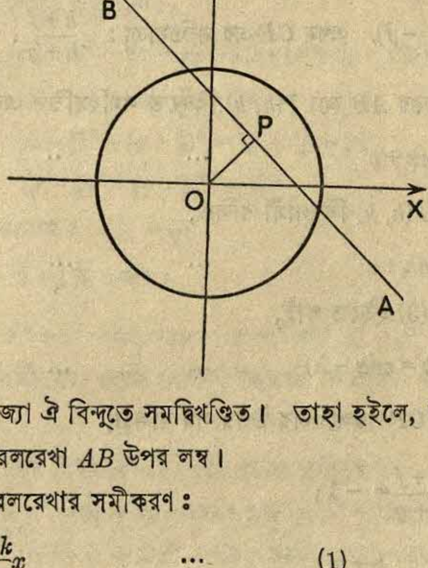
(*iii*) $c^2>a^2(1+m^2)$ হইলে, AB সরলরেখা বৃত্তটিকে একেবারেই ছেদ করিবে না। এইরূপক্ষেত্রে, AB-এর উপরিস্থিত প্রতিটি বিন্দু বৃত্তের বাহিরে থাকিবে।

দ্রষ্টব্য : (1) $Ax+By+C=0$ সরলরেখা $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তকে P এবং Q দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিলে পূর্বোক্ত নিয়মে PQ জ্যা-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করা যাইবে।

(2) $y=mx+c$ অথবা $Ax+By+C=0$ যে সরলরেখার সমীকরণ তাহা $x^2+y^2+2gx+2fy+d=0$ বৃত্তকে P এবং Q দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিলে পূর্বোক্ত নিয়মে PQ জ্যার দৈর্ঘ্য বাহির করা যাইবে।

5-10. একটি নির্দিষ্ট বৃত্তের অন্তঃস্থ কোন বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত জ্যা-এর সমীকরণ।

(1) মনে করি, $P(h, k)$ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু যাহা $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের ভিতরে



অবস্থিত ; এবং AB জ্যা ঐ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত। তাহা হইলে, সামতলিক জ্যামিতি হইতে পাই, OP সরলরেখা AB উপর লম্ব।

এখন, OP সরলরেখার সমীকরণ :

$$y=\frac{k}{h}x \quad \cdots \quad (1)$$

মনে করি, AB জ্যা-এর সমীকরণ :

$$y=mx+c \quad \cdots \quad (2)$$

যেহেতু, উহা $P(h,k)$ বিন্দুগামী,

$$\therefore \quad k=mh+c \quad \cdots \quad (3)$$

(2)—(3) হইতে পাই

$$y-k=m(x-h) \quad \cdots \quad (4)$$

কিন্তু AB সরলরেখা OP-এর উপর লম্ব বলিয়া,

$$m \times \left(\frac{k}{h}\right) = -1 ; \quad \text{অর্থাৎ,} \quad m = -\frac{h}{k} .$$

তাহা হইলে, AB জ্যা-এর সমীকরণ :

$$y - k = \frac{-h}{k}(x - h)$$

অর্থাৎ, $\boldsymbol{h(x-h)+k(y-k)=0}$.

[2] মনে করি, বৃত্তের সমীকরণ :

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \cdots \quad (1)$$

এবং $P(h,k)$ উহার অন্তঃস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। বৃত্তটির কেন্দ্র C হইলে, উহার স্থানাঙ্ক হইবে $C(-g, -f)$. এখন CP-এর নতিমাত্রা : $\dfrac{k+f}{h+g}$.

মনে করি, ঐ বৃত্তের AB জ্যা $P(h, k)$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত এবং উহার সমীকরণ :

$$y = mx + c \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

এই সরলরেখা, $P(h, k)$ বিন্দুগামী বলিয়া,

$$k = mh + c \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

$\therefore$ (2)—(3) হইতে পাই,

$$y - k = m(x - h) \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$$

এখন, AB জ্যা CP সরলরেখার উপর লম্ব বলিয়া,

$$m \times \frac{k+f}{h+g} = -1 ;$$

$$\text{অর্থাৎ,}\ m = -\frac{h+g}{k+f} \quad \cdots \quad \cdots \quad (5)$$

সুতরাং, (4) এবং (5) হইতে পাই,

$$y - k = -\frac{h+g}{k+f}(x - h)$$

সুতরাং, যে জ্যা $P(h, k)$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত তাহার সমীকরণ :

$$\boldsymbol{(h+g)(x-h)+(k+f)(y-k)=0.}$$

উদাহরণ 1. $x^2+y^2-6x+4y-12=0$ এবং $x+3y-12=0$ এর ছেদ বিন্দুগামী যে বৃত্ত $(-3, 0)$ বিন্দুগামী তাহার কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং ব্যাসার্ধ বাহির কর।

$x^2+y^2-6y+4y-12=0$ এবং $x+3y-12=0$ এর ছেদ বিন্দুগামী যে কোন বৃত্তের সমীকরণ :

$$x^2+y^2-6x+4y-12+\lambda(x+3y-12)=0 \quad \cdots \quad (1)$$

যেখানে λ যে কোন ধ্রুবক।

সমীকরণ (1) এর লেখ যদি $(-3, 0)$ বিন্দুগামী হয়,

তাহা হইলে,

$$9+0+18+0-12+\lambda(-3+0-12)=0$$

$$\text{বা,}\quad 15-\lambda\times 15=0. \qquad \therefore\ \lambda=1.$$

স্থতরাং, নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ :

$$x^2+y^2-6x+4y-12+(x+3y-12)=0\ ;$$

$$\text{বা,}\quad x^2+y^2-5x+7y-24=0\ ;$$

$$\text{বা,}\quad (x-\tfrac{5}{2})^2+(y+\tfrac{7}{2})^2=\tfrac{25}{4}+\tfrac{49}{4}+24\ ;$$

$$\text{বা,}\quad (x-\tfrac{5}{2})^2+(y+\tfrac{7}{2})^2=\tfrac{170}{4}.$$

ইহার কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক : $(\frac{5}{2}, -\frac{7}{2})$

এবং ব্যাসার্ধ : $\frac{1}{2}\sqrt{170}$ একক।

উদাহরণ 2. $x^2+y^2-6x+4y-12=0$ এবং $x^2+y^2-10x-4y+20=0$ বৃত্তদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী যে বৃত্তের ব্যাস উহাদের সাধারণ জ্যা তাহার সমীকরণ বাহির কর।

প্রদত্ত বৃত্তদ্বয়ের ছেদ বিন্দুগামী যে কোন বৃত্তের সমীকরণ

$$(x^2+y^2-6x+4y-12)+\lambda(x^2+y^2-10x-4y+20)=0\ ;$$

$$\text{বা,}\quad (1+\lambda)x^2+(1+\lambda)y^2-2(3+5\lambda)x+2(2-2\lambda)y$$
$$+(20\lambda-12)=0,$$

$$\text{যাহার কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক :}\quad \left(\frac{3+5\lambda}{1+\lambda},\ \frac{2\lambda-2}{1+\lambda}\right).$$

এখন, প্রদত্ত বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা-এর সমীকরণ :

$$(x^2+y^2-6x+4y-12)-(x^2+y^2-10x-4y+20)=0\ ;$$

$$\text{বা,}\quad 4x+8y-32=0\ ;$$

$$\text{বা,}\quad x+2y=8.$$

প্রদত্ত শর্তানুসারে,

$$\frac{3+5\lambda}{1+\lambda}+\frac{4\lambda-4}{1+\lambda}=8\ ;$$

বা, $3+5\lambda-4+4\lambda=8+8\lambda$,

বা, $\lambda=9$.

স্থতরাং, নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ :

$$(x^2+y^2-6x+4y-12)+9(x^2+y^2-10x-4y+20)=0,$$

বা, $10x^2+10y^2-96x-32y+168=0$,

বা, $5x^2+5y^2-48x-16y+84=0$.

উদাহরণ 3. $3y+4x=1$ সরলরেখা $x^2+y^2+38x+32y-33=0$ বৃত্তকে যে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে তাহাদের স্থানাঙ্ক বাহির কর এবং ঐ সরলরেখাটি বৃত্তটিকে যে জ্যাতে ছেদ করে তাহার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

$$3y+4x=1 \text{ হইতে, } y=\frac{1-4x}{3}.$$

এখন, $x^2+y^2+38x+32y-33=0$ হইতে পাই,

$$x^2+\frac{(1-4x)^2}{9}+38x+32\times\frac{(1-4x)}{3}-33=0\ ;$$

বা, $9x^2+(1+16x^2-8x)+342x+96(1-4x)-297=0$;

বা, $25x^2-50x-200=0$;

বা, $x^2-2x-8=0$;

বা, $(x+2)(x-4)=0$.

$\therefore\ x=-2, 4$.

তখন, $3y+4x=1$ হইতে,

যখন, $x=-2$, তখন $y=3$; এবং যখন $x=4$, তখন, $y=-5$.

স্থতরাং, প্রদত্ত বৃত্ত এবং সরলরেখার ছেদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক :

$(-2, 3)$ এবং $(4, -5)$

$\therefore$ নির্ণেয় জ্যা এর দৈর্ঘ্য ;

$\sqrt{(4+2)^2+(-5-3)^2}$ একক অর্থাৎ 10 একক।

উদাহরণ 4. $x^2+y^2=36$ বৃত্তের যে জ্যা $(2, -3)$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত তাহার সমীকরণ বাহির কর।

নির্ণেয় জ্যা-এর সমীকরণ :

$$2(x-2)+(-3)(y+3)=0$$

অর্থাৎ, $2x-3y=13$.

উদাহরণ 5. দেখাও যে, $(3, -6)$ বিন্দুটি $x^2+y^2-2x+4y-20=0$ বৃত্তের মধ্যে অবস্থিত ; $(3,-6)$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত জ্যা-এর সমীকরণ বাহির কর।

প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক : $(1, -2)$ এবং ব্যাসার্ধ $=5$ একক।

এখন, $(3, -6)$ এবং $(1, -2)$ বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব

$= \sqrt{(3-1)^2+(-6+2)^2}$ একক ;

অর্থাৎ $\sqrt{20}$ একক <5 একক.

সুতরাং, $(3, -6)$ বিন্দুটি বৃত্তের মধ্যে অবস্থিত।

নির্ণেয় জ্যা-এর সমীকরণ :

$(3-1)(x-3)+(-6+2)(y+6)=0$;

অর্থাৎ, $x-2y=15$.

বিকল্প পদ্ধতি :

$(3, -6)$ এবং $(1, -2)$ বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার সমীকরণ

$$\frac{y+6}{x-3}=\frac{-2+6}{1-3}$$

যাহার নতিমাত্র $=-2$.

নির্ণেয় জ্যা-এর সমীকরণ

$y+6=m(x-3)$

যেখানে, $m\times(-2)=-1$; অর্থাৎ $m=\frac{1}{2}$,

সুতরাং, নির্ণেয় জ্যার সমীকরণ

$y+6=\frac{1}{2}(x-3)$,

অর্থাৎ, $x-2y=15$.

প্রশ্নমালা 11

1. $(-4, 5)$, $(6, 4)$, $(-5, 5)$, $(0, 7)$ বিন্দুগুলির কোন্ কোন্টি $x^2+y^2=50$ এর মধ্যে, বা উপরে, অথবা, বাহিরে অবস্থিত তাহা ঠিক কর।

2. $(-3, 2)$, $(5, 4)$, $(1, 9)$, $(1, 3)$ বিন্দুগুলির কোন্ কোন্টি $x^2+y^2+6x-12y+20=0$ এর মধ্যে, বা উপরে, বা বাহিরে অবস্থিত তাহা নির্ণয় কর।

3. $x^2+y^2=20$ এবং $y-x+2=0$ এর ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

4. $x^2+y^2=5$ এবং $x+2y+5=0$ এর ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

5. দেখাও যে, $3x+4y=30$ সরলরেখা $x^2+y^2=25$ বৃত্তকে আদৌ ছেদ করিবে না।

6. $5x+12y+2=0$ সরলরেখা যে বিন্দুতে $x^2+y^2-6x-8y=0$-কে ছেদ করে তাহার স্থানাঙ্ক বাহির কর।

7. (*a*) দেখাও যে, $4x-7y+28=0$ সরলরেখাকে $x^2+y^2-6x-8y+23=0$ বৃত্তটি আদৌ ছেদ করে না। [P. U. 1975]

(b) দেখাও যে, $24x-7y+28=0$ সরলরেখাটি $x^2+y^2-6x-8y+24=0$ বৃত্তকে আদৌ ছেদ করে না।

8. $x^2+y^2-5x+2y-48=0$ বৃত্তের যে ব্যাস (5, 6) বিন্দুগামী তাহার সমীকরণ বাহির কর। [P. U. 1973]

9. $x^2+y^2=25$ বৃত্তের যে জ্যা $(-3, -2)$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত তাহার সমীকরণ লিখ।

10. $x^2+y^2-2x-6y-15=0$ বৃত্তের যে জ্যা $(-1, 2)$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

11. $3x-4y=25$ সরলরেখা $x^2+y^2=50$ বৃত্তকে যে বিন্দুগুলিতে ছেদ করে তাহাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর ; এবং ঐ সরলরেখাটি বৃত্তটিকে যে জ্যাতে ছেদ করে তাহার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [H. S. 1976]

12. দেখাও যে, $x^2+y^2+5x-2y-24=0$ এই বৃত্তের x-অক্ষের উপর ছেদিত জ্যা-এর দৈর্ঘ্য y-অক্ষের উপর ছেদিত জ্যা-এর দৈর্ঘ্য অপেক্ষা এক একক বেশী। [H. S. 1975]

13. মূলবিন্দুগামী যে বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (5, 7) তাহার সমীকরণ লিখ। ঐ বৃত্ত দ্বারা $3x+4y+c=0$ সরলরেখা হইতে ছেদিত জ্যা-এর দৈর্ঘ্য 14 একক হইলে, c এর মান বাহির কর। [H. S. 1970]

14. $x^2+y^2+8x+6y-75=0$ এবং $x+y=7$ এর ছেদবিন্দুগামী যে বৃত্ত $(3, -1)$ বিন্দুগামী তাহার সমীকরণ বাহির কর।

15. দেখাও যে, $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ জ্যাকে ব্যাস ধরিলে নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ হইবে, $x^2+y^2-2p(x\cos\alpha+y\sin-p)=a^2$,

16. $x^2+y^2=a^2$ বৃত্ত দ্বারা $y=mx+c$ সরলরেখা হইতে ছেদিত জ্যা-এর দৈর্ঘ্য $2b$ হইলে দেখাও যে $c^2=(1+m^2)(a^2-b^2)$.

17. $x^2+y^2-4x+2y+4=0$ এবং $x^2+y^2+6x+8y=0$ বৃত্তদ্বয়ের ছেদ বিন্দুগামী যে বৃত্তের কেন্দ্র x-অক্ষের উপর অবস্থিত তাহা নির্ণয় কর। [P. U. 1973]

18. $x^2+y^2+2x+3y-7=0$ এবং $x^2+y^2+3x-2y-1=0$ বৃত্তদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী যে বৃত্তের উপর (1, 2) অবস্থিত তাহা বাহির কর।

19. $x^2+y^2-2x-2y-14=0$ এবং $x^2+y^2-6x-4y+4=0$ বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয় কর, এবং দেখাও যে, ঐ সরলরেখাটি উহাদের কেন্দ্র-দ্বয়গামী সরলরেখার উপর লম্ব। [P. U. 1970]

20. $x^2+y^2+4x-22y=0$ এবং $x^2+y^2-10x+6y=0$ বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

21. দেখাও যে $x+3y+30=0$, $x-y+30=0$, $2x-y+25=0$ দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের পরিবৃত্ত মূলবিন্দুগামী। মূলবিন্দুর সাপেক্ষে ঐ ত্রিভুজের **পাদ-রেখা** Simson's Line) নির্ণয় কর।

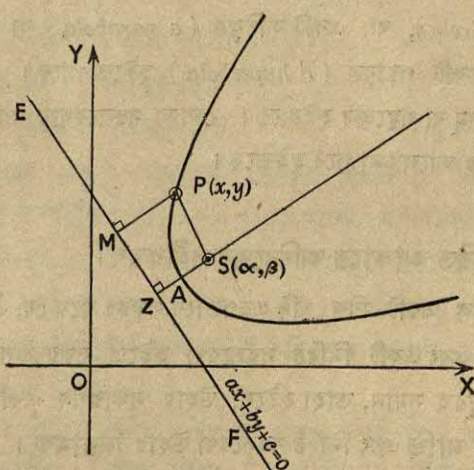
ষষ্ঠ অধ্যায়

কনিকের সমীকরণ

(Equations of Conics)

6-1. শঙ্কুচ্ছেদ বা কনিক্ সেক্শনের সংজ্ঞা।

কোন সমতলে যদি একটি বিন্দু এমনভাবে সঞ্চরণ করে যে, ঐ সমতলে অবস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা হইতে সঞ্চরণশীল বিন্দুর দূরত্বদ্বয়ের অনুপাত সতত ধ্রুবক **(constant)** তাহা হইলে, ঐ বিন্দুর সঞ্চার পথকে **শঙ্কুচ্ছেদ,** বা **কনিক্ সেক্শন্ (Conic Section)** বা কেবল **কনিক্** বলা হয়। এইরূপক্ষেত্রে, ঐ নির্দিষ্ট বিন্দুকে কনিক্ সেক্শনের **নাভি (Focus),** নির্দিষ্ট সরলরেখাকে উহার **নিয়ামক (Directrix)** এবং নির্দিষ্ট অনুপাতকে উহার **উৎকেন্দ্রতা (Eccentricity)** বলা হয়। উৎকেন্দ্রকতাকে e দ্বারা সূচিত করা হয়। e একটি ধনাত্মক বাস্তব রাশি। নাভিগামী যে সরলরেখা নিয়ামকের উপর লম্ব তাহাকে কনিকের **অক্ষ (Axis)** বলা হয়। ঐ অক্ষ কনিক্ সেক্শান্‌কে যে যে বিন্দুতে ছেদ করে তাহাদিগকে **শীর্ষ বিন্দু (Vertices)** বলা হয়। কনিক্ সেক্শনের উপর অবস্থিত যে কোন দুইটি বিন্দুর সংযোজক রেখাংশকে উহার **জ্যা (Chord)** বলা হয়। নাভিগামী যে জ্যা উহার অক্ষের উপর লম্ব তাহাকে **নাভিলম্ব (Latus-Rectum)** বলা হয়।



মনে করি, $S\ (\alpha, \beta)$ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু, এবং EF একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা, যাহার সমীকরণ : $ax+by+c=0$. মনে করি, কনিক্ সেক্শনের উপর $P(x, y)$ যে

কোন বিন্দু। PS যোগ করি এবং EF এর উপর PM লম্ব টানি, যেখানে M, EF-এর উপর অবস্থিত।

এখন, $PS=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}$;

এবং, $PM=\pm\dfrac{(ax+by+c)}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

সুতরাং, সংজ্ঞানুসারে,

$PS : PM=e$, অর্থাৎ, $PS^2=e^2.PM^2$;

$$\text{বা,}\quad (x-\alpha)^2+y-\beta)^2=e^2\left\{\frac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}\right\} \quad \cdots \quad (1)$$

যাহা $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ … … (2)

আকারের। ইহাই কনিকের সাধারণ সমীকরণ।

মনে করি, SZ সরলরেখা EF এর উপর লম্ব এবং উহা শঙ্কুচ্ছেদকে A বিন্দুতে ছেদ করে। তাহা হইলে, $S(\alpha, \beta)$ শঙ্কুচ্ছেদের **নাভি**, EF উহার **নিয়ামক**, ZS **অক্ষ**, A **শীর্ষবিন্দু** এবং $(SA/AZ)=e=$ **উৎকেন্দ্রতা**।

$e=1$ হইলে, কনিক সেকশন্‌টি **অধিবৃত্ত** (*Parabola*), $0<e<1$ হইলে উহা **উপবৃত্ত** (*Ellipse*) এবং $e>1$ হইলে উহা **পরাবৃত্ত** (*Hyperbola*) হইবে।

মন্তব্য : একটি যুগ্ম শঙ্কুকে (Double cone) একটি সমতল (Plane) ছেদ করিলে ঐ ছেদন (Section) এক জোড়া সরলরেখা (*a pair of straight lines*), বা, একটি বৃত্ত (*a circle*), বা, একটি অধিবৃত্ত (*a parabola*) বা একটি উপবৃত্ত (*an Ellipse*) বা একটি পরাবৃত্ত (*a hyperbola*) হইতে পারে। সেই জন্য ইহাদের নাম কনিক্ সেক্শন্ বা শঙ্কুচ্ছেদ হইয়াছে। জোড়া সরলরেখার আলোচনা পাঠ্যসূচীর বহির্ভূত। বৃত্তের আলোচনা পূর্বে হইয়াছে।

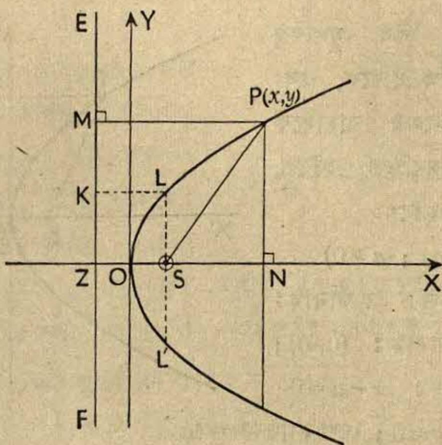
6-2. নির্ধারিত আকারে অধিবৃত্তের সমীকরণ।

কোন সমতলে একটি বিন্দু যদি এরূপভাবে সঞ্চরণ করে যে, ঐ সমতলে অবস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা হইতে সঞ্চরণশীল বিন্দুর যে কোন অবস্থানে উহার দূরত্ব সমান, তাহা হইলে, উহার সঞ্চারপথ একটি **অধিবৃত্ত** হইবে; নির্দিষ্ট বিন্দু উহার **নাভি** এবং নির্দিষ্ট সরলরেখা উহার **নিয়ামক**।

মনে করি, অধিবৃত্তটির নাভি S এবং নিয়ামক EF সরলরেখা, EF এর উপর SZ লম্ব টানি। O, SZ এর মধ্যবিন্দু; তাহা হইলে, $OS=OZ$; সুতরাং, অধিবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে, O বিন্দুটি অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত এবং ইহা অধিবৃত্তের **শীর্ষবিন্দু**।

মনে করি, $ZS=2a$; তাহা হইলে $OS=OZ=a$.

O কে মূলবিন্দু, বর্ধিত OS কে x-অক্ষ এবং EF এর সমান্তরাল OY কে y-অক্ষ ধরা যাক্।



মনে করি, $P(x, y)$ অধিবৃত্তের উপর যে কোন বিন্দু। PM এবং PN যথাক্রমে EF এবং ZS এর উপর লম্ব ; SP যোগ করি।

এখন, অধিবৃত্তের সংজ্ঞা হইতে $SP=PM$.

$\therefore \; SP^2=PM^2$, বা, $SN^2+PN^2=ZN^2$,

বা, $(ON-OS)^2+PN^2=(ZO+ON)^2$;

অর্থাৎ, $(x-a)^2+y^2=(a+x)^2$.

$\therefore \; \boldsymbol{y^2=4ax}$; চিত্রে $(a>0)$,

মন্তব্য : এইরূপ স্থলে, অধিবৃত্তটির নাভির স্থানাঙ্ক $(a, 0)$, শীর্ষের স্থানাঙ্ক $(0, 0)$ এবং নিয়ামকের সমীকরণ : $x+a=0$, এবং অক্ষের সমীকরণ : $y=0$.

অধিবৃত্তের সমীকরণ : $y^2=4ax$; $(a>0)$, হইতে দেখা যাইতেছে যে, y-অক্ষের বামদিকের কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক (অর্থাৎ, $x<0$) অধিবৃত্তের সমীকরণকে সিদ্ধ করিবে না। আবার, অধিবৃত্তটি x-অক্ষ অর্থাৎ অধিবৃত্তের অক্ষের সাপেক্ষে **প্রতিসম** (*Symmetrical about its axis*).

মনে করি, নাভিগামী LL' জ্যা অধিবৃত্তের অক্ষের উপর লম্ব ; যেখানে, L' এবং L অধিবৃত্তের উপরে অবস্থিত। তাহা হইলে, LL' অধিবৃত্তের **নাভিলম্ব।**

মনে করি, KL, EF এর উপর লম্ব। তাহা হইলে,

$$LL'=2.LS=2.KL=2.ZS.$$
$$=2.2.OS=4.OS=4a \; ; (a>0).$$

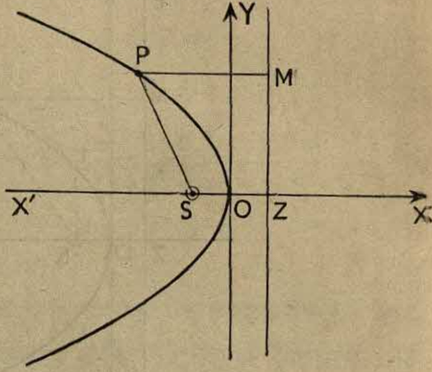
সুতরাং, **নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য = 4a একক।**

$OZ = OS = a$; $SZ = 2a$ = নাভি হইতে নিয়ামকের লম্ব দূরত্ব।

বিশেষ দ্রষ্টব্য :

[1] অধিবৃত্তের শীর্ষ মূলবিন্দু এবং অক্ষকে x-অক্ষ ধরিলে, এবং উহার নাভি y-অক্ষের বামদিকে x-অক্ষের উপর অবস্থিত হইলে, অধিবৃত্তের সমীকরণ হইবে

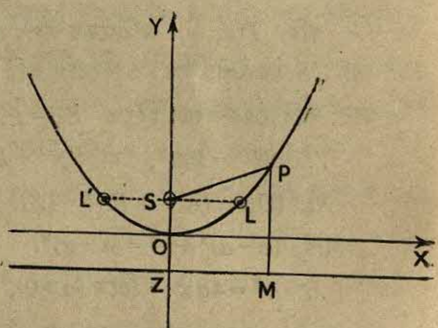
$$y^2 = -4ax \; ; (a > 0).$$



এইরূপক্ষেত্রে, নাভি S এর স্থানাঙ্ক : $(-a, 0)$; শীর্ষের স্থানাঙ্ক : $(0, 0)$; নিয়ামকের সমীকরণ : $x - a = 0$; অক্ষের সমীকরণ : $y = 0$; এবং নাভিলম্ব $= 4a$.

[2] অধিবৃত্তের নাভি S, y-অক্ষের উপর উহার ধনাত্মকদিকে এবং উহার শীর্ষ মূলবিন্দু হইলে, অধিবৃত্তের সমীকরণ হইবে,

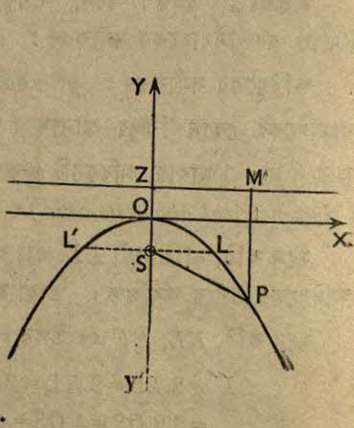
$$x^2 = 4ay \; ; (a > 0),$$



এইরূপক্ষেত্রে, নাভি S এর স্থানাঙ্ক $(0, a)$, শীর্ষের স্থানাঙ্ক : $(0, 0)$: নিয়ামকের সমীকরণ, $y + a = 0$; অক্ষের : সমীকরণ : $x = 0$ এবং নাভিলম্ব $= 4a$.

[3] অধিবৃত্তের নাভি S, y-অক্ষের উপর উহার ঋণাত্মকদিকে এবং শীর্ষ বিন্দু মূলবিন্দু হইলে উহার সমীকরণ হইবে,

$$x^2 = -4ay \; ; (a > 0).$$

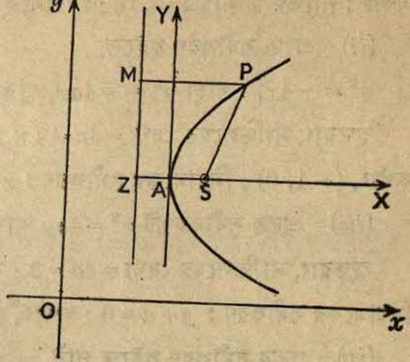


এইরূপক্ষেত্রে, নাভি S এর স্থানাঙ্ক : $(0, -a)$, শীর্ষের স্থানাঙ্ক : $(0, 0)$;

নিয়ামকের সমীকরণ : $y - a = 0$;

অক্ষের সমীকরণ : $x = 0$ এবং নাভিলম্ব $= 4a$.

[4] মনে করি, অধিবৃত্তের সমীকরণঃ $(y-\beta)^2=4a(x-\alpha)$. উহার শীর্ষের স্থানাঙ্কঃ $A\ (\alpha, \beta)$. A কে মূলবিন্দু ধরিলে এই বিন্দুগামী সমান্তরাল অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে অধিবৃত্তের সমীকরণ হইবে $Y^2=4aX$.



তাহা হইলে, অধিবৃত্তের নাভি S এর স্থানাঙ্ক: $X=a$; $Y=0$; অর্থাৎ, $x-\alpha=a$; $y-\beta=0$; অর্থাৎ, $(a+\alpha, \beta)$; শীর্ষের স্থানাঙ্ক: $X=0$, $Y=0$; অর্থাৎ, (α, β); নিয়ামকের সমীকরণঃ $X+a=0$; অর্থাৎ $x-\alpha+a=0$; অধিবৃত্তের অক্ষের সমীকরণ: $Y=0$; অর্থাৎ $y-\beta=0$; অধিবৃত্তের নাভি লম্ব $=4a$; $(a>0)$.

[5] মনে করি, অধিবৃত্তের সমীকরণ:

$$(x-\alpha)^2=4a\ (y-\beta),$$

এইরূপক্ষেত্রে, শীর্ষের স্থানাঙ্ক: $A\ (\alpha, \beta)$.

A কে মূলবিন্দু ধরিলে ঐ বিন্দুগামী সমান্তরাল অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে অধিবৃত্তের সমীকরণ হইবে

$$X^2=4aY;$$

যাহার নাভিলম্ব $=4a$; $(a>0)$ ইত্যাদি।

6-3. Parametric আকারে অধিবৃত্তের সমীকরণ ঃ

অধিবৃত্তের সমীকরণ ঃ $y^2=4ax$.

লক্ষ্যণীয়, t এর যে কোন মানের জন্য $(at^2, 2at)$ বিন্দু সতত $y^2=4ax$ কে সিদ্ধ করিবে। সুতরাং, $y^2=4ax$ এর Parametric আকারে সমীকরণ ঃ

$$x=at^2\ ;\ y=2at.$$

উদাহরণ 1. নিম্নলিখিত অধিবৃত্তগুলির প্রত্যেকটির নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য, নাভির স্থানাঙ্ক এবং নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর ঃ

(i) $y^2=8x$; (ii) $y^2+4x=0$; (iii) $x^2=3y$;

(iv) $2x^2+3y=0$.

(i) ইহা $y^2=4ax$ আকারের; যাহার নাভি লম্বের দৈর্ঘ্য $=4a$; নাভির স্থানাঙ্ক: $(a, 0)$; নিয়ামকের সমীকরণ: $x+a=0$.

এখানে, $a=2$. সুতরাং, প্রদত্ত সমীকরণের জন্য, নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=4\times2=8$ একক ; নাভির স্থানাঙ্ক : $(2, 0)$; নিয়ামকের সমীকরণ : $x+2=0$.

(ii) প্রদত্ত সমীকরণ হইতে,

$y^2=-4x$, যাহা $y^2=-4ax$ আকারের। এখানে $a=1$.

সুতরাং, নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=4a=4\times1=4$ একক ; নাভির স্থানাঙ্ক : $(-a, 0)$; অর্থাৎ, $(-1, 0)$; নিয়ামকের সমীকরণ : $x-a=0$; অর্থাৎ, $x-1=0$.

(iii) প্রদত্ত সমীকরণটি $x^2=4ay$ আকারের, যেখানে $a=3/4$.

সুতরাং, নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=4a=3$; নাভির স্থানাঙ্ক : $(0, a)$; অর্থাৎ, $(0, 3/4)$; নিয়ামকের সমীকরণ : $y+a=0$; অর্থাৎ, $4y+3=0$.

(iv) প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই,

$x^2=-\frac{3}{2}y$, যাহা $x^2=-4ay$ আকারের, যেখানে $a=3/8$.

এখানে নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=4a=3/2$; নাভির স্থানাঙ্ক : $(0, -a)$; অর্থাৎ, $(0, -3/8)$; নিয়ামকের সমীকরণ : $y-a=0$ অর্থাৎ, $8y-3=0$.

উদাহরণ 2. $y^2=2px$ অধিবৃত্তটি $(3, -2)$ বিন্দুগামী হইলে, উহার নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য এবং নাভির স্থানাঙ্ক বাহির কর।

$y^2=2px$ অধিবৃত্তের উপর $(3, -2)$ বিন্দু অবস্থিত বলিয়া,

$$(-2)^2=2.p.3. ; \therefore p=2/3$$

সুতরাং, অধিবৃত্তটির সমীকরণ :

$$y^2=4.\tfrac{1}{3}.x.$$

$\therefore$ নির্ণেয় নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=4/3$; এবং নাভির স্থানাঙ্ক : $(\frac{1}{3}, 0)$.

উদাহরণ 3. $y^2-4y-4x-8=0$ অধিবৃত্তের নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য, শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক, নাভির স্থানাঙ্ক, অক্ষের সমীকরণ এবং নিয়ামকের সমীকরণ বাহির কর।

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই,

$$(y-2)^2=4(x+3)$$

এখন, O' $(-3, 2)$ কে মূল বিন্দু ধরিলে, সমান্তরাল অক্ষদ্বয় $O'X$ এবং $O'Y$ এর সাপেক্ষে প্রদত্ত অধিবৃত্তের সমীকরণ হইবে, $Y^2=4X$.

যেখানে, $X=y-2$; $X=x+3$; $a=1$.

(i) নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=4a=4$;

(ii) $X=0$ এবং $Y=0$ অর্থাৎ $x+3=0$ এবং $y-2=0$ হইতে শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক পাওয়া যাইবে ; সুতরাং, মূল অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক : $(-3, 2)$.

(*iii*) $X=1$ এবং $Y=0$ অর্থাৎ $x+3=1$ এবং $y-2=0$ হইতে নাভির স্থানাঙ্ক পাওয়া যাইবে। সুতরাং, মূল অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে নাভির স্থানাঙ্ক : $(-2, 2)$

(*iv*) অক্ষের সমীকরণ :

$Y=0$; অর্থাৎ, $y-2=0$.

(*v*) নিয়ামকের সমীকরণ : $X+1=0$;

অর্থাৎ, $x+4 \quad 0$.

উদাহরণ 4. যে অধিবৃত্তের নাভির স্থানাঙ্ক $(-2, 0)$ এবং শীর্ষ মূলবিন্দুতে অবস্থিত তাহার সমীকরণ বাহির কর।

শীর্ষবিন্দু এবং নাভির দূরত্ব $=2$;

অধিবৃত্তের নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=4\times 2=8$.

এবং উহার অক্ষের সমীকরণ : $y=0$;

নিয়ামকের সমীকরণ : $x-2=0$.

অধিবৃত্তের নাভি $S(-2, 0)$; অধিবৃত্তের উপর $P(x, y)$ যে কোন বিন্দু এবং P হইতে নিয়ামকের দূরত্ব PM হইলে, অধিবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে,

$$SP=PM$$

$$\text{বা,} \quad SP^2=PM^2$$

$$\text{বা,} \quad (x+2)^2+y^2=\frac{(x-2)^2}{1}$$

$$\text{বা,} \quad y^2+8x=0,$$

সুতরাং, অধিবৃত্তের সমীকরণ : $y^2+8x=0$,

উদাহরণ 5. একটি অধিবৃত্তের নাভি $S(2, 3)$ এবং শীর্ষ $A(-2, 3)$; উহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

$$AS=\sqrt{(2+2)^2+(3-3)^2}=4 ;$$

AS সরলরেখার সমীকরণ : $y=3$

SA সরলরেখা নিয়ামককে Z বিন্দুতে ছেদ করিলে, Z এর স্থানাঙ্ক : $(-6, 3)$.

সুতরাং, নিয়ামকের সমীকরণ : $x+6=0$.

মনে করি, অধিবৃত্তের উপর $P\ (x, y)$ যে কোন বিন্দু এবং P হইতে নিয়ামকের দূরত্ব PM. তাহা হইলে, অধিবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে,

$$SP=PM,$$

$$\text{বা,} \quad SP^2=PM^2,$$

বা, $(x-2)^2+(y-3)^2=(x+6)^2$;

বা, $y^2-6y-16x-23=0.$

সুতরাং, অধিবৃত্তের সমীকরণ

$$y^2-6y-16x-23=0.$$

উদাহরণ 6. একটি অধিবৃত্তের নাভি $S\,(2, 1)$ এবং নিয়ামক EF এর সমীকরণ $4x-3y=1$. অধিবৃত্তের সমীকরণ এবং নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর :

$P\,(x, y)$ অধিবৃত্তের উপর যে কোন বিন্দু হইলে,

$$SP=\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}$$

P হইতে নিয়ামকের দূরত্ব PM হইলে,

$$PM=\text{mod.}\left(\frac{4x-3y-1}{\sqrt{4^2+3^2}}\right)=\text{mod.}\left(\frac{4x-3y-1}{5}\right)$$

অধিবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে, $SP=PM$;

বা, $SP^2=PM^2$.

$$\therefore\quad (x-2)^2+(y-1)^2=\frac{(4x-3y-1)^2}{25}$$

সুতরাং, অধিবৃত্তের সমীকরণ :

$$9x^2+24xy+16y^2-92x-56x+124=0.$$

S হইতে নিয়ামকের দূরত্ব SZ হইলে,

$$SZ=\frac{4\times 2-3\times 1-1}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{4}{5}$$

$\therefore$ অধিবৃত্তের নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য

$$=LL'=2\,SL=2.SZ=2\times\tfrac{4}{5}=(8/5)\text{ একক ।}$$

প্রশ্নমালা 12

1. নিম্নলিখিত অধিবৃত্তগুলির প্রত্যেকটির নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য এবং নাভির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(i) $y^2=12x$; (ii) $y^2=3x$; (iii) $3y^2=5x$;

(iv) $y^2+3x=0$; (v) $3x^2=8y$; (vi) $2x^2+7y=0$.

2. $3y^2+22x=0$ অধিবৃত্তের নাভির স্থানাঙ্ক এবং নিয়ামকের সমীকরণ বাহির কর। [P. U. 1973]

3. $y^2=3ax$ অধিবৃত্ত $(2, -1)$ বিন্দুগামী হইলে উহার নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য এবং নাভির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

4. $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তটি $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ এবং $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদ-বিন্দুগামী হইলে অধিবৃত্তের নাভির স্থানাঙ্ক বাহির কর। [P. U. 1963]

5. $y^2 = 2mx$ অধিবৃত্তটি $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ এবং $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$ এর ছেদবিন্দুগামী হইলে, এবং $a + b \neq 0$ হইলে, অধিবৃত্তের নাভির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[Joint Ent. Ex. 1971]

6. $(y-3)^2 = 6(x-2)$ অধিবৃত্তটির শীর্ষ, নাভির স্থানাঙ্ক, নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য, এবং এবং অক্ষ ও নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

7. $(y+3)^2 = 2(x+2)$ অধিবৃত্তের নাভি ও শীর্ষের স্থানাঙ্ক এবং নিয়ামকের সমীকরণ বাহির কর। [H. S. 1964]

8. $y^2 + 4y + 8x + 12 = 0$ অধিবৃত্তের নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য, নাভির স্থানাঙ্ক, শীর্ষ এবং অক্ষ ও নিয়ামকের সমীকরণ বাহির কর।

9. $y = ax^2 + bx + c$ অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু ও নাভির স্থানাঙ্ক এবং নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

10. একটি অধিবৃত্তের শীর্ষ মূলবিন্দুতে এবং নাভির স্থানাঙ্ক $(0, -3)$, উহার সমীকরণ বাহির কর এবং নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

11. যে অধিবৃত্তের নাভির স্থানাঙ্ক $(0, 0)$ এবং নিয়ামকের সমীকরণ $3y + 4 = 0$, তাহার সমীকরণ লিখ। [P. U. 1973]

12. যে অধিবৃত্তের নাভির স্থানাঙ্ক $(5, 0)$ এবং নিয়ামকের সমীকরণ $3x - 4y + 2 = 0$, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর। [P. U. 1964]

13. যে অধিবৃত্তের নাভির স্থানাঙ্ক $(-3, 4)$ এবং নিয়ামকের সমীকরণ $6x - 7y + 5 = 0$ তাহার সমীকরণ বাহির কর। [H. S. 1960]

14. একটি অধিবৃত্তের শীর্ষ এবং নাভির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(1, 2)$ এবং $(-1, 2)$, উহার সমীকরণ বাহির কর। [H. S. 1972]

15. যে অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু $(2, 3)$-তে এবং নাভিলম্বের সমীকরণ $x = 4$ তাহার সমীকরণ বাহির কর। এই অধিবৃত্ত এবং উহার নাভিলম্বের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [H. S. 1975]

16. কোন অধিবৃত্তের অক্ষ ও নিয়ামকের সমীকরণ যথাক্রমে $y-3=0$ এবং $x+3=0$ এবং নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য 8 একক। অধিবৃত্তের সমীকরণ বাহির কর এবং উহার শীর্ষের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

17. যে অধিবৃত্তের নাভি এবং শীর্ষের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-2, 3)$ এবং $(2, 6)$ তাহার সমীকরণ বাহির কর।

18. $(-1, 1)$ বিন্দুতে যাহার নাভি এবং $x+y+1=0$ যাহার নিয়ামক সেই অধিবৃত্তের সমীকরণ বাহির কর, এবং উহার শীর্ষের স্থানাঙ্ক ও নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

19. একটি অধিবৃত্তের অক্ষ y-অক্ষ বরাবর, নাভির স্থানাঙ্ক $(0, 3)$ এবং নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য 12. অধিবৃত্তের সমীকরণ ও উহার নিয়ামক বাহির কর।

20. $y^2=12x$ অধিবৃত্তের নাভি এবং $x^2+y^2-18x-16y+45=0$ বৃত্তের কেন্দ্র সংযোজক রেখাংশ যে বৃত্তের ব্যাস তাহার সমীকরণ বাহির কর। x-অক্ষ দ্বারা ছিন্ন ঐ বৃত্তের জ্যা-এর দৈর্ঘ্য বাহির কর। **[H. S. Comp. 1974]**

21. $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের নাভিলম্ব যে বৃত্তের ব্যাস তাহার সমীকরণ বাহির কর। দেখাও যে, এই বৃত্তটি অধিবৃত্তের অক্ষ এবং নিয়ামকের ছেদবিন্দুগামী।

[Joint Ent. Ex. 1976]

22. $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের কোন একটি দ্বিগুণিত কোটি (Double Ordinate) এর দৈর্ঘ্য $8a$. দেখাও যে, উহার দুই প্রান্তের সহিত অধিবৃত্তটির শীর্ষবিন্দু সংযোজক রেখাংশদ্বয় সমকোণে অবস্থিত। **[H. S. 1960]**

23. $y^2=4ax$ এর উপর Q যে কোন বিন্দু; Q বিন্দুর কোটি QN. QN এর মধ্য বিন্দু P. প্রমাণ কর যে, P বিন্দুর সঞ্চার পথ একটি অধিবৃত্ত যাহার নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য প্রদত্ত অধিবৃত্তের নাভিলম্বের দৈর্ঘ্যের এক চতুর্থাংশ।

[H. S. 1976]

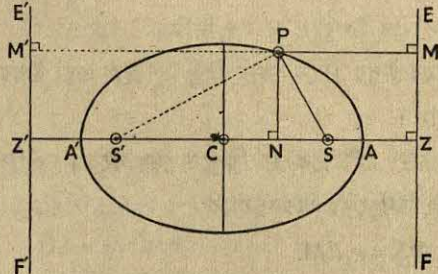
24. $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের PN যে কোন কোটি; PN এর উপর অবস্থিত M বিন্দু PNকে $m : n$ অনুপাতে বিভক্ত করে। M বিন্দুর সঞ্চার পথ নির্ণয় কর।

[Joint Ent. Ex. 1967]

25. কোন অধিবৃত্তের শীর্ষ A এবং নাভি S; এবং উহার উপর যে কোন বিন্দু P এর কোটি PN. প্রমাণ কর যে, $PN^2=4AS \cdot AN$.

6·4. উপবৃত্তের কতিপয় ধর্ম।

কোন সমতলে একটি বিন্দু যদি এমনভাবে সঞ্চরণ করে যে, ঐ সমতলে অবস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা হইতে ঐ চলমান বিন্দুর দূরত্বদ্বয়ের অনুপাত একটি ধ্রুবক e, যেখানে $0<e<1$, তাহা হইলে, উহার সঞ্চারপথকে **উপবৃত্ত** (*Ellipse*) বলা হয়। নির্দিষ্ট বিন্দুকে উপবৃত্তের **নাভি** এবং নির্দিষ্ট সরলরেখাকে উহার **নিয়ামক** বলে।



মনে করি, উপবৃত্তের নাভি S এবং নিয়ামক EF সরলরেখা। EF এর উপর SZ লম্ব টানি। তাহা হইলে, যেহেতু, $0<e<1$, SZ এবং বর্ধিত ZS এর উপর দুইটি বিন্দু A এবং A' যথাক্রমে থাকিবে, যেখানে,

$$AS=e.\,AZ \quad \cdots \quad (1),$$

এবং $$A'S=e.\,A'Z \quad \cdots \quad (2).$$

মনে করি, $AA'=2a$ এবং AA' এর মধ্যবিন্দু C. তাহা হইলে,

$$\boldsymbol{CA=CA'=a}. \quad \cdots \quad (3)$$

C বিন্দুকে উপবৃত্তের **কেন্দ্র** (*Centre*) বলা হয়। উপবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে, A এবং A' বিন্দুদ্বয় উপবৃত্তের উপর থাকিবে এবং উহারা উপবৃত্তের শীর্ষ।

এখন, (1) এবং (2) যোগ করিয়া পাই,

$$AS+A'S=e.\,(AZ+A'Z),$$

বা, $$AA'=e.(CZ-CA+CZ+CA),$$

বা, $$2a=2e.CZ.$$

$$\therefore\ \boldsymbol{CZ=\frac{a}{e}}. \quad \cdots \quad (4)$$

(2) হইতে (1) বিয়োগ করিয়া পাই,

$$A'S-AS=e(A'Z-AZ),$$

বা, $(CA' + CS) - (CA - CS) = e.AA'$,

বা, $2.CS = 2e.a$.

$\therefore \quad CS = ae. \quad \dots \quad (5)$

এখন, বর্ধিত ZS-এর উপর দুইটি বিন্দু S' এবং Z' লই, যেখানে,

$$CS' = CS = ae \quad \dots \quad (6)$$

$$\text{এবং} \quad CZ' = CZ = \frac{a}{e}. \quad \dots \quad (7)$$

আবার, ZZ' এর উপর $E'F'$ লম্ব টানি।

মনে করি, উপবৃত্তের উপর P যে কোন বিন্দু। EF এর উপর PM এবং ZZ' এর উপর PN লম্ব টানি।

মনে করি, বর্ধিত MP, $E'F'$ কে M' বিন্দুতে ছেদ করে। $S'P$ যোগ করি।

তাহা হইলে, উপবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে

$$PS = e.PM. \quad \dots \quad (8)$$

$\therefore \quad PS^2 = e^2.PM^2$;

বা, $NS^2 + PN^2 = e^2.ZN^2$;

বা, $(CS - CN)^2 + PN^2 = e.^2(CZ - CN)^2$;

বা, $(CS' - CN)^2 + PN^2 = e^2.(CZ' - CN)^2$;

বা, $(CS' + CN)^2 + NP^2 - 4.CS'.CN$
$= e^2.(CZ' + CN)^2 - 4e^2.CZ'.CN$;

বা, $S'N^2 + NP^2 - 4.CS'.CN.$
$= e^2.Z'N^2 - 4e^2.CZ'.CN$;

বা, $S'P^2 - 4.ae.CN = e^2.M'P^2 - 4e^2.\frac{a}{e}.CN$;

বা, $S'P^2 = e^2.M'P^2$.

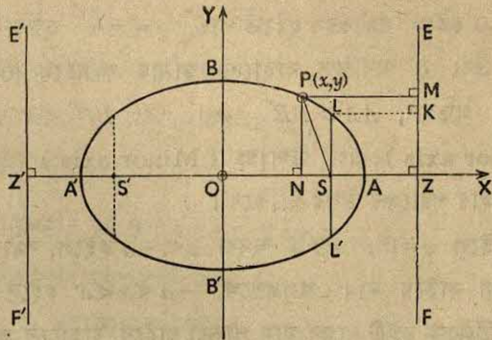
$\therefore \quad PS' = e.PM'. \quad \dots \quad (9)$

সুতরাং, দেখা যাইতেছে যে, উপবৃত্তটির দ্বিতীয় নাভি S' এবং এই নাভির সাপেক্ষ দ্বিতীয় নিয়ামক $E'F'$ অতি অবশ্যই থাকিবে। নাভিদ্বয়গামী সরলরেখাকে উপবৃত্তের **অক্ষ** (Axis) বলা হয়। আবার,

$$SP + S'P = e.(PM + PM')$$
$$= e.MM' = e.ZZ'$$
$$= 2e.CZ = 2.CA.$$

অর্থাৎ, $SP + S'P = 2a. \quad \dots \quad (10)$

6-5. নির্ধারিত আকারে উপবৃত্তের সমীকরণ।



মনে করি, উপবৃত্তের নাভিদ্বয় S এবং S' ; নিয়ামকদ্বয় EF এবং $E'F'$; শীর্ষবিন্দুদ্বয় A এবং A', এবং উৎকেন্দ্রতা e, $(0<e<1)$. AA' এর মধ্যবিন্দু O এবং $AA'=2a$ হইলে,

$$OA=OA'=a. \qquad \cdots \qquad (1)$$

তাহা হইলে, $OS=OS'=ae \qquad \cdots \qquad (2)$

এবং $OZ=OZ'=\dfrac{a}{e}. \qquad \cdots \qquad (3)$

এখন, O কে মূলবিন্দু, AA' কে x-অক্ষ এবং AA'-এর উহার লম্ব OB-কে y-অক্ষ ধরা যাক্। তাহা হইলে, S, A, Z-এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে, $(ae, 0)$, $(a, 0)$, $(a/e, 0)$.

মনে করি, উপবৃত্তের উপর $P\ (x, y)$, যে কোন বিন্দু। EF এর উপর PM এবং OA এর উপর PN লম্ব টানি এবং SP যোগ করি, তাহা হইলে। উপবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে,

$$PS=e.PM.$$

$$\therefore\ PS^2=e^2.PM^2\ ;$$

বা, $NS^2+PN^2=e^2.NZ^2$,

বা, $(OS-ON)^2+PN^2=e^2.(OZ-ON)^2$.

$$\therefore\ (ae-x)^2+y^2=e^2.(a/e-x)^2\ ;$$

বা, $x^2(1-e^2)+y^2=a^2(1-e^2)$,

বা, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1. \qquad \cdots \qquad (4)$

উপবৃত্তের উপরিস্থিত P এর যে কোন অবস্থানের জন্য দেখানো যাইবে, (4) সত্য।

ধরা যাক্, $b=a\sqrt{1-e^2}. \qquad \cdots \qquad (5)$

তাহা হইলে, উপবৃত্তের সমীকরণ :

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1} \qquad \cdots \qquad (6)$$

মন্তব্য : $OA = OA' = a$; A এবং A' উপবৃত্তের শীর্ষবিন্দু। $0 < e < 1$ বলিয়া, $0 < b < a$; $x = 0$ হইলে, সমীকরণ হইতে পাই, $y = \pm b$. সুতরাং, উপবৃত্তের উপর দুইটি বিন্দু B এবং B' অবস্থিত যাহাদের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(0, b)$ এবং $(0, -b)$. যেহেতু, $a > b$, সুতরাং, $AA' > BB'$. AA' এবং BB' কে যথাক্রমে উপবৃত্তের **পরাক্ষ** (**Major axis**) এবং **উপাক্ষ** (**Minor axis**) বলা হয়। উপবৃত্তের নাভিদ্বয় সর্বদা উহার পরাক্ষের উপর থাকিবে।

$x = \pm a$ হইলে $y = 0$; $x > a$ অথবা $x < -a$ হইলে, সমীকরণ হইতে y এর বাস্তব মান পাওয়া যাইবে না। অপরপক্ষে, $-a < x < a$ হইলে সমীকরণ হইতে y এর বিপরীত চিহ্নযুক্ত দুইটি বাস্তব মান পাওয়া যাইবে, যাহাদের আঙ্কিকমান সমান। অতএব, উপবৃত্তটি x অক্ষের সাপেক্ষে **প্রতিসম** (**Symmetrical**). অনুরূপভাবে, ইহা y-অক্ষের সাপেক্ষে **প্রতিসম**।

বিশেষ দ্রষ্টব্য :

মনে করি, S বিন্দুগামী LL' জ্যা উপবৃত্তের পরাক্ষের উপর লম্ব। তাহা হইলে, উপবৃত্তের **নাভিলম্ব** $= LL'$; S এর স্থানাঙ্ক $(ae, 0)$ এবং L উপবৃত্তের উপর অবস্থিত।

$$\therefore \quad \frac{a^2e^2}{a^2} + \frac{SL^2}{b^2} = 1,$$

বা, $SL^2 = b^2(1 - e^2) = b^4/a^2$,

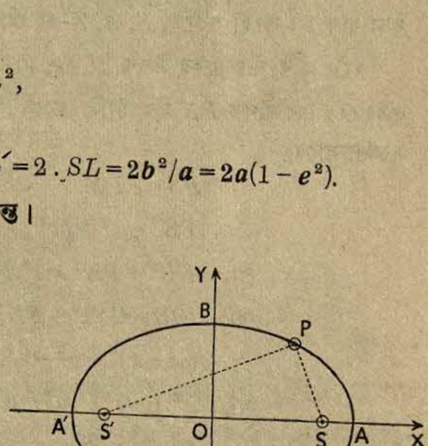
বা, $SL = b^2/a$

$\therefore$ **নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য** $= LL' = 2 . SL = 2b^2/a = 2a(1 - e^2)$.

6-6. কতিপয় প্রয়োজনীয় সিদ্ধান্ত।

[1] উপবৃত্তের সমীকরণ :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \ (a > b > 0).$$



এইরূপ ক্ষেত্রে, উপবৃত্তের অক্ষ (Axis) x-অক্ষ বরাবর; কেন্দ্র, মূলবিন্দুতে; এবং নাভিদ্বয় S, S' উহার পরাক্ষ, অর্থাৎ, x-অক্ষের উপর অবস্থিত।

(i) পরাক্ষের দৈর্ঘ্য $= AA' = 2a$; উপাক্ষের দৈর্ঘ্য $= BB' = 2b$.

(ii) নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= 2b^2/a = 2a(1 - e^2)$.

(iii) উৎকেন্দ্রতা e-এর জন্য : $b^2 = a^2(1 - e^2)$.

(iv) $S(ae, 0) \equiv [\sqrt{(a^2-b^2)}, 0]$ এবং
$S'(-ae, 0) \equiv [-\sqrt{(a^2-b^2)}, 0]$ নাভিদ্বয়।

(v) নাভিদ্বয়ের দূরত্ব $= SS' = 2ae$.

(vi) $A(a, 0)$ এবং $A'(-a, 0)$ শীর্ষবিন্দুদ্বয়।

(vii) কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক : $O(0, 0)$.

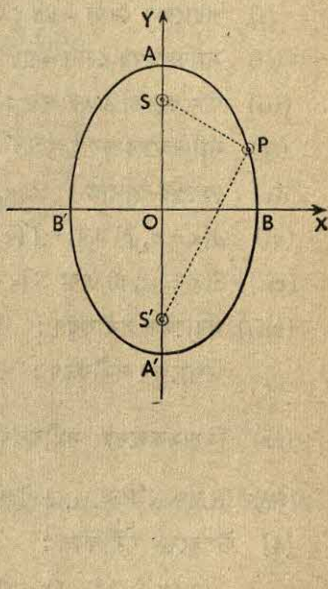
(viii) নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ : $x = \pm a/e$.

(ix) উপবৃত্তের পরাক্ষের সমীকরণ : $y=0$;
উপাক্ষের সমীকরণ : $x=0$.

(x) $SP + S'P = 2a$; P উপবৃত্তের উপর অবস্থিত।

[2] উপবৃত্তের সমীকরণ :

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \; ; \; (a>b>0).$$



এইরূপক্ষেত্রে, উপবৃত্তের পরাক্ষ (Major Axis) y-অক্ষ বরাবর ; কেন্দ্র মূলবিন্দুতে ; নাভিদ্বয় S এবং S' y-অক্ষের উপর অবস্থিত।

(i) পরাক্ষের দৈর্ঘ্য $= AA' = 2a$; উপাক্ষের দৈর্ঘ্য $= BB' = 2b$.

(ii) নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= 2b^2/a = 2a(1-e^2)$.

(iii) উৎকেন্দ্রতা e-এর জন্য :

$$b^2 = a^2(1-e^2).$$

(iv) নাভিদ্বয়ের দূরত্ব $= SS' = 2ae$.

(v) $S(0, ae)$ এবং $S'(0, -ae)$ নাভিদ্বয়।

(vi) $A(0, a)$ এবং $A'(0, -a)$ শীর্ষদ্বয়।

(vii) কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক : $O(0, 0)$.

(viii) নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ : $y = \pm a/e$

(ix) উপবৃত্তের পরাক্ষের সমীকরণ : $x=0$;
উপাক্ষের সমীকরণ : $y=0$.

(x) $SP + S'P = 2a$, P উপবৃত্তের উপর অবস্থিত।

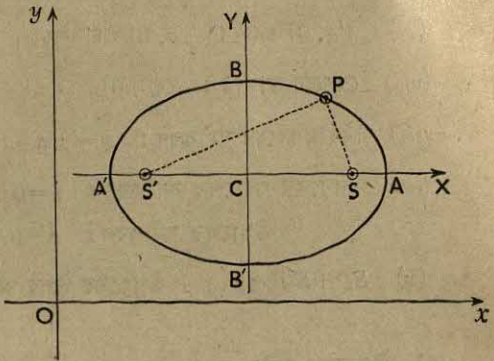
[3] উপবৃত্তের সমীকরণ :

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1\ ;\qquad (a>b>0).$$

এইরূপক্ষেত্রে, উপবৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $C(\alpha, \beta)$.

$C(\alpha, \beta)$ কে মূলবিন্দু ধরিলে, সমান্তরাল অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে উপবৃত্তের সমীকরণ :

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1\ ;\ (a>b>0).$$



উপবৃত্তের পরাক্ষ, $C(\alpha, \beta)$ বিন্দুগামী, x-অক্ষের সমান্তরালে অবস্থিত, এবং নাভিদ্বয় S এবং S' উহার উপর অবস্থিত। সুতরাং,

(*i*) পরাক্ষের দৈর্ঘ্য $=2a$; উপাক্ষের দৈর্ঘ্য $=2b$.

(*ii*) নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=2b^2/a=2a\,(1-e^2)$.

(*iii*) উৎকেন্দ্রতা e এর জন্য : $b^2=a^2\,(1-e^2)$.

(*iv*) নাভিদ্বয়ের দূরত্ব $=SS'=2ae$.

(*v*) কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক : $C(\alpha, \beta)$.

(*vi*) $A(\alpha+a, \beta)$ এবং $A'(\alpha-a, \beta)$ শীর্ষদ্বয়।

(*vii*) $S(\alpha+ae, \beta)$ এবং $S'(\alpha-ae, \beta)$ নাভিদ্বয়।

(*viii*) পরাক্ষের সমীকরণ : $Y=0$ অর্থাৎ $y-\beta=0$;
উপাক্ষের সমীকরণ : $X=0$ অর্থাৎ $x-\alpha=0$.

(*ix*) নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ : $X=\pm\dfrac{a}{e}$; অর্থাৎ, $x-\alpha=\pm\dfrac{a}{e}$.

(*x*) $SP+S'P=2a$, P উপবৃত্তের উপরিস্থ।

[4] উপবৃত্তের সমীকরণ :

$$\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}+\frac{(x-\beta)^2}{a^2}=1\ ;\ (a>b>0).$$

এইরূপক্ষেত্রেও, উপবৃত্তের কেন্দ্র $C(\alpha, \beta)$; কেন্দ্রকে মূলবিন্দু ধরিলে, সমান্তরাল অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে উপবৃত্তের সমীকরণ :

$$\frac{X^2}{b^2}+\frac{Y^2}{a^2}=1\ ;\ (a>b>0).$$

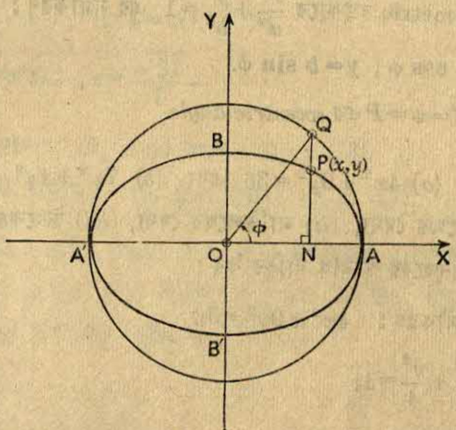
এখানে, উপবৃত্তের পরাক্ষ, $C(\alpha, \beta)$ বিন্দুগামী y-অক্ষের সমান্তরালে অবস্থিত, এবং নাভিদ্বয় উহার উপর অবস্থিত।

(2) এবং (3) এর আলোচনার সাহায্যে এই উপবৃত্তের অনুরূপ বিষয়বস্তু পর্যালোচনা করা যাইতে পারে।

মন্তব্য ঃ উপবৃত্তের কেন্দ্রগামী প্রতিটি জ্যা কেন্দ্রেই সমদ্বিখণ্ডিত।

6-7. Parametric আকারে উপবৃত্তের সমীকরণ।

কোন উপবৃত্তের পরাক্ষকে ব্যাস লইয়া অঙ্কিত বৃত্তকে উহার **সহকারী বৃত্ত** (*Auxiliary circle*) বলা হয়।



মনে করি, উপবৃত্তের সমীকরণ ঃ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ ;\ (a>b>0). \quad \cdots \quad (1)$$

উহার কেন্দ্র মূলবিন্দুতে অবস্থিত এবং পরাক্ষের দৈর্ঘ্য $=2a$. সুতরাং, এই উপবৃত্তের সহকারী বৃত্তের সমীকরণ ঃ

$$x^2+y^2=a^2 \quad \cdots \quad (2)$$

মনে করি, উপবৃত্তের উপর $P(x, y)$ যে কোন বিন্দু এবং PN উহার কোটি; বর্ধিত NP, সহকারী উপবৃত্তকে Q বিন্দুতে ছেদ করে।

মনে করি, Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক ঃ $(a\cos\phi, a\sin\phi)$; $\phi=\widehat{XOQ}$.

তাহা হইলে, P বিন্দুর x-স্থানাঙ্ক হইবে $a \cos \phi$. সুতরাং, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(a \cos \phi, k)$ হইলে, উপবৃত্তের সমীকরণ হইতে পাই,

$$\frac{a^2 \cos^2\phi}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} = 1\,;$$

বা, $k^2 = b^2 \sin^2\phi$. $\quad \therefore\ k = b \sin\phi$, (বর্ত্তমান চিত্রের জন্য)।

অর্থাৎ, $PN = k = b \sin \phi$.

সুতরাং, P এর স্থানাঙ্ক : $(a \cos \phi, b \sin \phi)$;

এবং $PN : QN = b : a$.

সুতরাং, ϕ এর যে কোন মানের জন্য $(a \cos \phi,\ b \sin \phi)$ সর্বদাই উপবৃত্তের উপর অবস্থিত। এইরূপক্ষেত্রে, 'ϕ'কে P বিন্দুর 'Eccentric Angle' বলা হয়।

সুতরাং, Parametric আকারে $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর সমীকরণ :

$$\boldsymbol{x = a \cos \phi\ ;\ y = b \sin \phi.}$$

এখানে, $\widehat{QON} = \phi = P$ এর *eccentric angle.*

উদাহরণ 1. (*a*) $4x^2 + 9y^2 = 36$ এবং (*b*) $7x^2 + 4y^2 = 28$ উপবৃত্তদ্বয়ের (*i*) পরাক্ষ ও উপাক্ষের দৈর্ঘ্য, (*ii*) নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য, (*iii*) উৎকেন্দ্রতা, (*iv*) নাভির স্থানাঙ্ক (*v*) শীর্ষবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক বাহির কর।

(*a*) প্রদত্ত সমীকরণ : $4x^2 + 9y^2 = 36$.

বা, $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$,

যাহা $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ আকারের,

যেখানে, $a = 3, b = 2\,;\ a > b > 0$.

সুতরাং, উপবৃত্তের পরাক্ষ x-অক্ষ বরাবর, এবং কেন্দ্র মূলবিন্দুতে।

(*i*) পরাক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2a = 6$ একক ; উপাক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2b = 4$ একক।

(*ii*) নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 4}{3} = 8/3$ একক।

(*iii*) $b^2 = a^2(1 - e^2)$, বা, $4 = 9(1 - e^2)$.

$\therefore$ উৎকেন্দ্রতা : $e = \sqrt{5}/3$.

(*iv*) নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক : $(\pm ae, 0)$ অর্থাৎ, $(\pm \sqrt{5}, 0)$.

(*v*) শীর্ষবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক : $(\pm a, 0)$ অর্থাৎ, $(\pm 3, 0)$.

(b) প্রদত্ত সমীকরণ : $7x^2+4y^2=28$;

বা, $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{7}=1$;

বা, $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$,

যেখানে, $a=\sqrt{7}$, $b=2$, $a>b>0$.

স্মতরাং, উপবৃত্তের পরাক্ষ y-অক্ষ বরাবর, কেন্দ্র মূলবিন্দুতে।

(i) পরাক্ষের দৈর্ঘ্য $=2a=2\sqrt{7}$ একক ; উপাক্ষের দৈর্ঘ্য $=2b=4$ একক।

(ii) নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\times 4}{\sqrt{7}}=\frac{8\sqrt{7}}{7}$ একক।

(iii) $b^2=a^2(1-e^2)$; বা, $4=7(1-e^2)$;

$\therefore$ উৎকেন্দ্রতা : $e=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

(iv) নাভির স্থানাঙ্ক : $(0, \pm ae)$ অর্থাৎ, $(0, \pm\sqrt{3})$.

(v) শীর্ষবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক : $(0, \pm a)$ অর্থাৎ, $(0, \pm\sqrt{7})$.

উদাহরণ 2. $9(x+3)^2+16(y-2)^2=144$ উপবৃত্তের (i) পরাক্ষ ও উপাক্ষের দৈর্ঘ্য, (ii) নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য, (iii) উৎকেন্দ্রতা, (iv) নাভির স্থানাঙ্ক, (v) শীর্ষের স্থানাঙ্ক, (vi) নিয়ামকের সমীকরণ বাহির কর।

প্রদত্ত সমীকরণ :

$$\frac{(x+3)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{9}=1.$$

$O'(-3, 2)$ কে মূলবিন্দু ধরিলে, সমান্তরাল অক্ষদ্বয় $O'X$ এবং $O'Y$ এর সাপেক্ষে উপবৃত্তের সমীকরণ :

$$\frac{X^2}{16}+\frac{Y^2}{9}=1,$$

বা, $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$,

যেখানে, $a=4$, $b=3$, $a>b>0$.

(i) পরাক্ষের দৈর্ঘ্য $=2a=8$ একক ; উপাক্ষের দৈর্ঘ্য $=2b=6$ একক।

(ii) নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\times 9}{4}=4\frac{1}{2}$ একক।

(iii) $b^2 = a^2(1-e^2)$; বা, $9 = 16(1-e^2)$,

$\therefore$ উৎকেন্দ্রতা : $e = \sqrt{7}/4$

(iv) $ae = \sqrt{7}$; $X = \pm ae$, $Y = 0$

অর্থাৎ, $x+3 = \pm\sqrt{7}$, $y-2=0$

বা, $x = -3 \pm \sqrt{7}$, $y = 2$.

সুতরাং, নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক : $(-3 \pm \sqrt{7}, 2)$.

(v) $X = \pm a$, $Y = 0$

অর্থাৎ, $x+3 = \pm 4$, $y-2=0$;

বা, $x = -3 \pm 4$, $y = 2$;

$\therefore$ শীর্ষবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক : $(-3 \pm 4, 2)$.

(vi) $X = \pm a/e$, অর্থাৎ, $x+3 = \pm \dfrac{4 \times 4\sqrt{7}}{7}$,

বা, $x = -3 \pm \dfrac{16\sqrt{7}}{7}$.

সুতরাং, নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ :

$$x = -3 \pm \frac{16\sqrt{7}}{7}.$$

উদাহরণ 3. যে উপবৃত্তের পরাক্ষ এবং উপাক্ষ যথাক্রমে x-অক্ষ এবং y-অক্ষ বরাবর, এবং যাহার নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য 3 একক এবং উৎকেন্দ্রতা $\frac{1}{2}$ তাহার সমীকরণ বাহির কর।

মনে করি, উপবৃত্তটির সমীকরণ :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ যেখানে, } a > b > 0.$$

প্রদত্ত শর্তানুসারে,

$\dfrac{2b^2}{a}$ = নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য = 3, অর্থাৎ, $2b^2 = 3a$;

এবং, $b^2 = a^2(1-e^2)$;

অর্থাৎ, $b^2 = a^2(1-1/4)$;

বা, $4b^2 = 3a^2$.

$\therefore$ $6a = 4b^2 = 3a^2$;

বা, $a = 2$. $\quad \therefore$ $b^2 = 3$.

স্থতরাং, নির্ণেয় উপবৃত্তটির সমীকরণ :

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1;$$

বা, $3x^2+4y^2=12.$

উদাহরণ 4. যে উপবৃত্তের অক্ষদ্বয় "স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয়" বরাবর, নাভির স্থানাঙ্ক $(0, \pm 4)$, এবং উৎকেন্দ্রতা $4/5$, তাহার সমীকরণ বাহির কর।

এখানে উপবৃত্তের নাভিদ্বয় y-অক্ষের উপর অবস্থিত এবং উহার কেন্দ্র মূলবিন্দুতে। স্থতরাং, উহার পরাক্ষ y-অক্ষ বরাবর হইবে।

মনে করি, উপবৃত্তের সমীকরণ :

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1, \quad a>b>0.$$

দেওয়া আছে, $e=4/5$;

এবং, $(0, \pm ae)$ = নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $=(0, \pm 4)$.

$$\therefore \quad ae=4;$$

বা, $a\times\frac{4}{5}=4, \qquad \therefore \quad a=5.$

আবার, $b^2=a^2(1-e^2)$ হইতে পাই,

$$b^2=25(1-16/25); \qquad \text{বা,} \quad b^2=9.$$

স্থতরাং, নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ :

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1.$$

উদাহরণ 5. 'স্থানাঙ্ক-অক্ষদ্বয়' যে উপবৃত্তের দুই অক্ষ এবং যাহা $(2, -2)$ এবং $(3, 1)$ বিন্দুগামী তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর। উহার নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য কত ?

মনে করি, উপবৃত্তটির সমীকরণ :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

এই উপবৃত্তটি $(2, -2)$ এবং $(3, 1)$ বিন্দুদ্বয়গামী বলিয়া,

$$\frac{4}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1 \quad \text{এবং} \quad \frac{9}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1.$$

$$\therefore \quad a^2=32/3; \qquad b^2=32/5.$$

স্থতরাং, নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ ;

$$3x^2+5y^2=32.$$

উহার নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{8\sqrt{6}}{5}$ একক।

উদাহরণ 6. যে উপবৃত্তের নাভির স্থানাঙ্ক $(0, -3)$, উহার নিকটবর্তী নিয়ামকের সমীকরণ $3x-4y+1=0$ এবং উৎকেন্দ্রতা $\frac{1}{\sqrt{2}}$ তাহার সমীকরণ বাহির কর।

মনে করি, নাভি S যাহার স্থানাঙ্ক $(0, -3)$, এবং উহার নিকটবর্তী নিয়ামক EF যাহার সমীকরণ :

$3x-4y+1=0$; $P(x, y)$ উপবৃত্তের উপরিস্থ যে কোন বিন্দু; P হইতে নিয়ামকের লম্ব-দূরত্ব PM.

তাহা হইলে, উপবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে,

$$SP = e.PM;$$

বা, $SP^2 = e^2.PM^2$;

বা, $x^2+(y+3)^2 = \frac{1}{2}.\frac{(3x-4y+1)^2}{3^2+4^2}$;

বা, $50x^2+50(y+3)^2 = (3x-4y+1)^2$;

বা, $41x^2+24xy+34y^2-6x+308y+449=0$.

প্রশ্নমালা 13

1. নিম্নলিখিত উপবৃত্তগুলির প্রত্যেকটির পরাক্ষ ও উপাক্ষের দৈর্ঘ্য, নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য, নাভির স্থানাঙ্ক বাহির কর :

(i) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$; (ii) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$;

(iii) $9x^2+25y^2=225$; (iv) $x^2+4y^2=16$;

(v) $9x^2+4y^2=9$; (vi) $4x^2+3y^2=1$;

(vii) $x^2+2y^2=8$.

2. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ উপবৃত্তের নাভির স্থানাঙ্ক, উৎকেন্দ্রতা এবং নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [H. S. 1976]

3. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা, নাভির স্থানাঙ্ক এবং নিয়ামকের সমীকরণ বাহির কর। [P.U. 1976]

4. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ উপবৃত্তের নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[H. S. 1971]

5. $4x^2+5y^2=20$ উপবৃত্তের নাভির স্থানাঙ্ক এবং উৎকেন্দ্রতা নির্ণয় কর।

[Joint Ent. Ex. 1969]

6 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, (a>b>0)$ উপবৃত্তের নাভিদ্বয়ের দূরত্ব উপাক্ষের দৈর্ঘ্যের সমান হইলে, উহার উৎকেন্দ্রতা বাহির কর।

7. $4(x-2)^2+9(y-3)^2=36$ উপবৃত্তের পরাক্ষ ও উপাক্ষের দৈর্ঘ্য, নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য এবং নাভির স্থানাঙ্ক বাহির কর।

8. $9x^2+16y^2-54x+64y+1=0$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা, নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য, এবং কেন্দ্র নির্ণয় কর। [Joint Ent. Ex. 1970]

9. যে উপবৃত্তের পরাক্ষ x-অক্ষ বরাবর, কেন্দ্র মূলবিন্দুতে, পরাক্ষের দৈর্ঘ্য 4 একক এবং উৎকেন্দ্রতা $\frac{3}{4}$, তাহার সমীকরণ বাহির কর।

10. যে উপবৃত্তের পরাক্ষ ও উপাক্ষ যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর, উৎকেন্দ্রতা $1/\sqrt{2}$ এবং নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য 3, তাহার সমীকরণ বাহির কর। [H. S. 1962]

11. যে উপবৃত্তের পরাক্ষ ও উপাক্ষ যথাক্রমে y-অক্ষ ও x-অক্ষ বরাবর, নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য 8/3 এবং উৎকেন্দ্রতা $\sqrt{5}/4$ তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

12. একটি উপবৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দুতে, উপাক্ষ x-অক্ষ বরাবর, নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য 5 এবং উৎকেন্দ্রতা 2/3 উহার সমীকরণ লিখ।

13. একটি উপবৃত্তের নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(1, 0)$ এবং $(-1, 0)$, উপাক্ষের দৈর্ঘ্য 2 একক। উপবৃত্তের সমীকরণ বাহির কর। [P.U. 1973]

14. যে উপবৃত্তের অক্ষদ্বয় 'স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয়' বরাবর এবং যাহা $(1, 3)$ ও $(2, 1)$ বিন্দুদ্বয়গামী তাহার সমীকরণ লিখ। উহার নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক বাহির কর।

[P.U. 1974]

15. একটি উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা 2/3 এবং নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(3, 0)$ এবং $(-3, 0)$; উহার সমীকরণ বাহির কর।

16. একটি উপবৃত্তের নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য 9 একক এবং নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(0, 5)$ এবং $(0, -5)$; ইহার সমীকরণ বাহির কর, এবং উৎকেন্দ্রতা নির্ণয় কর।

17. যে উপবৃত্তের পরাক্ষ y-অক্ষ বরাবর কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(0, 2)$, পরাক্ষের দৈর্ঘ্য 6 ইঞ্চি, উৎকেন্দ্রতা 1/2, তাহার সমীকরণ বাহির কর। [P. U. 1968]

18. কোন উপবৃত্তের পরাক্ষ ও উপাক্ষের সমীকরণ যথাক্রমে $y-2=0$ এবং $x-3=0$; উৎকেন্দ্রতা $2/3$ এবং নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $9/2$; উহার সমীকরণ বাহির কর।

19. কোন উপবৃত্তের একটি নাভির স্থানাঙ্ক $(-1, 1)$, উহার নিকটবর্তী নিয়ামকের সমীকরণ : $x-y+3=0$, উৎকেন্দ্রতা $1/2$. উহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[H. S. 1966]

20. দেখাও যে, $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ উপবৃত্তের একটি নাভিলম্বের উপরের প্রান্তবিন্দু এবং অপরটির নীচের প্রান্তবিন্দুগামী সরলরেখা মূলবিন্দুগামী।

21. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $(a>b>0)$ উপবৃত্তের পরাক্ষ ও উপাক্ষ যথাক্রমে AA' এবং BB'; C উহার কেন্দ্র এবং S উহার একটি নাভি। দেখাও যে,

$$CA^2-CB^2=CS^2.$$

22. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $(a>b>0)$ এই উপবৃত্তের পরাক্ষ AA' এবং এই উপবৃত্তের উপরিস্থিত কোন বিন্দু P হইতে পরাক্ষের উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দু N. প্রমাণ কর যে, $\frac{PN^2}{AN.A'N}=\frac{b^2}{a^2}$. **[H. S. 1975]**

23. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের পরাক্ষের দৈর্ঘ্য $2a$ এবং S এবং S' নাভিদ্বয়। এই উপবৃত্তের উপর $P(x', y')$ কোন বিন্দু হইলে দেখাও যে, $S'P=a+ex'$ এবং $SP=a-ex'$, যেখানে $a>x'>0$ এবং উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা e.

24. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; $(a>b>0)$, উপবৃত্তের পরাক্ষের প্রান্তদ্বয় A এবং A'; উপাক্ষের প্রান্তদ্বয় B এবং B'; নাভিদ্বয় S এবং S' হইলে, দেখাও যে,

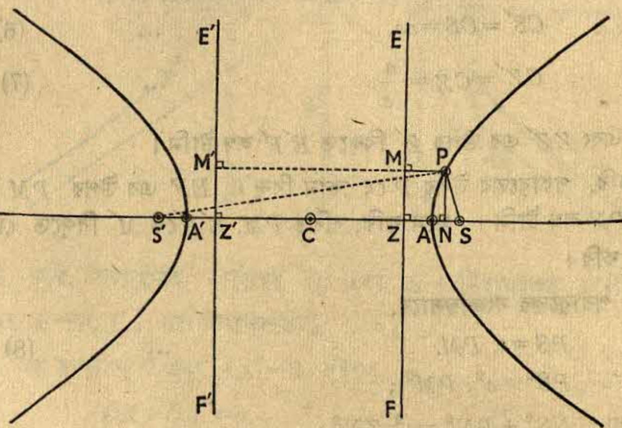
$$SB=SB'=S'B=S'B'=CA,$$

যেখানে $C(0, 0)$ উপবৃত্তের কেন্দ্র।

25. যে উপবৃত্তের পরাক্ষ এবং উপাক্ষ যথাক্রমে y-অক্ষ এবং x-অক্ষ বরাবর, নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $2l$, এবং উৎকেন্দ্রতা e তাহার সমীকরণ বাহির কর।

6-8. পরাবৃত্তের কতিপয় ধর্ম।

কোন সমতলে একটি বিন্দু যদি এমন ভাবে সঞ্চরণ করে যে, ঐ সমতলে অবস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা হইতে ঐ সঞ্চরণশীল বিন্দুর দূরত্বদ্বয়ের অনুপাত উহার যে কোন অবস্থানে সতত একটি ধ্রুবক e, যেখানে $e>1$, তাহা হইলে, উহার সঞ্চারপথকে **পরাবৃত্ত (Hyperbola)** বলা হয়। ঐ নির্দিষ্ট বিন্দুকে পরাবৃত্তের **নাভি** এবং নির্দিষ্ট সরলরেখাকে উহার **নিয়ামক** বলে।



মনে করি, পরাবৃত্তের নাভি S এবং নিয়ামক EF সরলরেখা। EF এর উপর SZ লম্ব টানি। তাহা হইলে যেহেতু, $e>1$, SZ এবং বর্ধিত SZ এর উপর দুইটি বিন্দু A এবং A' পাওয়া যাইবে, যেখানে,

$$AS = e.AZ \quad \ldots \quad (1)$$

এবং $$A'S = e.A'Z. \quad \ldots \quad (2)$$

AA' এর মধ্যবিন্দু C এবং $AA' = 2a$ হইলে,

$$CA = CA' = a. \quad \ldots \quad (3).$$

C কে পরাবৃত্তের **কেন্দ্র** বলা হয়। পরাবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে, A এবং A' বিন্দুদ্বয় পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত এবং উহারা পরাবৃত্তের শীর্ষ।

(1) এবং (2) যোগ করিয়া পাই,

$$AS + A'S = e.(AZ + A'Z);$$

বা, $(CS - CA) + (CS + CA') = e.AA'$;

বা, $2.CS = e.2a$.

$$\therefore \; CS = ae. \quad \ldots \quad (4)$$

(2) হইতে (1) বিয়োগ করিয়া পাই,

$$A'S - AS = e.(A'Z - AZ);$$

বা, $AA' = e.(CA' + CZ) - e.(CA - CZ)$;

বা, $2a = 2e.CZ$.

$$\therefore \quad CZ = \frac{a}{e} \qquad (5)$$

এখন, বর্ধিত SZ এর উপর দুইটি বিন্দু Z' এবং S' লই, যেন,

$$CS' = CS = ae, \quad \ldots \quad (6)$$

$$CZ' = CZ = \frac{a}{e} \quad \ldots \quad (7)$$

হয়; এবং ZZ' এর উপর Z' বিন্দুতে $E'F'$ লম্ব টানি।

মনে করি, পরাবৃত্তের উপর P যে কোন বিন্দু। EF এর উপর PM এবং SS' এর উপর PN লম্ব টানি। মনে করি, বর্ধিত PM, $E'F'$কে M' বিন্দুতে ছেদ করে। $S'P$ যোগ করি।

এখন, পরাবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে,

$$PS = e.\ PM. \quad \ldots \quad (8)$$

$\therefore \quad PS^2 = e^2.\ PM^2$;

বা, $NS^2 + PN^2 = e^2.ZN^2$;

বা, $(CS - CN)^2 + PN^2 = e^2.\ (CN - CZ)^2$;

বা, $(CS' - CN)^2 + PN^2 = e^2.\ (CN - CZ')^2$,

ব', $(CS' + CN)^2 + PN^2 - 4.CS'.CN$
$= e^2(CN + CZ')^2 - 4e^2.CN.CZ'$,

বা, $S'N^2 + PN^2 - 4.CS'.\ CN$
$= e^2.\ Z'N^2 - 4e^2.\ CZ'.CN$,

বা, $S'P^2 - 4\ .\ ae\ .\ CN = e^2\ .\ M'P^2 - 4e^2\ .\ (a/e)\ .\ CN$,

বা, $S'P^2 = e^2\ .\ M'P^2$.

$$\therefore \quad PS' = e\ .\ PM'. \quad \ldots \quad (9)$$

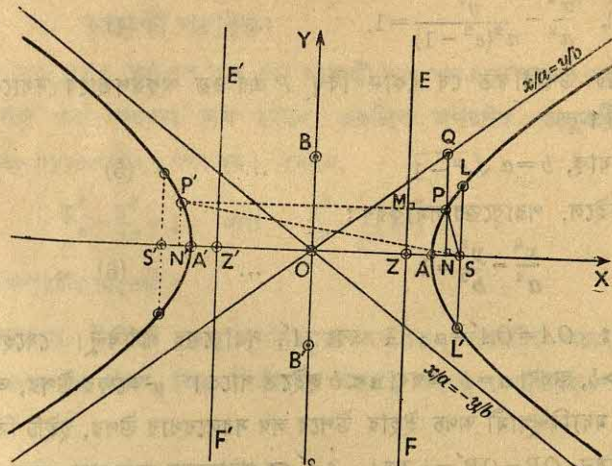
সুতরাং, দেখা যাইতেছে যে, পরাবৃত্তের দ্বিতীয় নাভি S' এবং এই নাভির সাপেক্ষে দ্বিতীয় নিয়ামক $E'F'$ থাকিবে। নাভিদ্বয়গামী সরলরেখা পরাবৃত্তের **অক্ষ**।

এখন, (8) এবং (9) হইতে পাই,

$$S'P - SP = e\ .\ (PM' - PM)$$
$$= e\ .\ MM' = e.ZZ' = 2e\ .\ CZ.$$

$$\therefore \quad S'P - SP = 2a. \quad \ldots \quad (10)$$

6·9. নির্ধারিত আকারে পরাবৃত্তের সমীকরণ।



মনে করি, পরাবৃত্তের নাভিদ্বয় S এবং S'; নিয়ামকদ্বয় EF এবং $E'F'$; শীর্ষবিন্দুদ্বয় A এবং A'; এবং উৎকেন্দ্রতা e, $(e>1)$.

AA' এর মধ্যবিন্দু O এবং $AA'=2a$ হইলে,

$$OA=OA'=a. \quad \ldots \quad (1)$$

তাহা হইলে,

$$OS=OS'=ae, \quad \ldots \quad (2)$$

$$OZ=OZ'=a/e. \quad \ldots \quad (3)$$

O কে মূলবিন্দু, $A'A$ কে x-অক্ষ এবং $A'A$ এর উপরে লম্বভাবে অবস্থিত সরলরেখা OYকে y-অক্ষ ধরা যাক্। তাহা হইলে, S, A, Z এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (ae, o), (a, o), $(a/e, o)$.

মনে করি, পরাবৃত্তের উপর $P(x, y)$ যে কোন বিন্দু। EF এর উপর PM এবং x-অক্ষের উপর PN লম্ব টানি এবং SP যোগ করি। তাহা হইলে, পরাবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে,

$$PS=e \,.\, PM.$$

$$\therefore \quad PS^2=e^2 \,.\, PM^2,$$

বা, $NS^2+PN^2=e^2 \,.\, NZ^2,$

বা, $(OS-ON)^2+PN^2=e^2 \,.\, (ON-OZ)^2,$

$$\therefore \quad (ae-x)^2+y^2=e^2\left(x-\frac{a}{e}\right)^2$$

বা, $x^2(e^2-1)-y^2=a^2(e^2-1)$,

বা, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(e^2-1)}=1.$ ... (4)

পরাবৃত্তের উপরিস্থিত যে কোন বিন্দু P এর জন্য অনুরূপভাবে দেখানো যাইবে যে, (4) সত্য।

ধরা যাক, $b=a\sqrt{e^2-1}$. ... (5)

তাহা হইলে, পরাবৃত্তের সমীকরণ :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \quad \dots \quad (6)$$

মন্তব্য : $OA=OA'=a$; A এবং A', পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু। যেহেতু, $e>1$, সুতরাং, $a>b$, অথবা $a=b$, অথবা $a<b$ হইতে পারে। y-অক্ষের উপর, অর্থাৎ AA' রেখাংশের মধ্যবিন্দুগামী অথচ ইহার উপরে লম্ব সরলরেখার উপর, দুইটি বিন্দু B এবং B' লই, যেন $OB=OB'=b$ হয়। AA' কে পরাবৃত্তের **অনুপ্রস্থ অক্ষ** (**Transverse axis**) এবং BB' কে **অনুবন্ধী অক্ষ** (**Conjugate axis**) বলা হয়। পরাবৃত্তের নাভি সর্বদাই অনুপ্রস্থ অক্ষের উপর থাকিবে।

$x=\pm a$ হইলে, $y=0$; $-a<x<a$ হইলে, সমীকরণ $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ হইতে y এর বাস্তব মান পাওয়া যাইবে না।

অপরপক্ষে, $x>a$ এবং $x<-a$ হইলে, y-এর বাস্তব মান পাওয়া যাইবে ; এবং x এর এইরূপ যে কোন মানের জন্য বিপরীত চিহ্নযুক্ত y এর দুইটি মান পাওয়া যাইবে, কিন্তু তাহাদের আঙ্কিক মান সমান। আবার (6) হইতে,

$$x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{y^2+b^2}.$$

অতএব, পরাবৃত্তটি x-অক্ষ এবং y-অক্ষ উভয়ের সাপেক্ষে **প্রতিসম** (**Symmetrical**).

বিশেষ দ্রষ্টব্য :

মনে করি, S বিন্দুগামী LL' জ্যা পরাবৃত্তের অনুপ্রস্থ অক্ষের উপর লম্ব।

তাহা হইলে, পরাবৃত্তের নাভিলম্ব $=LL'$. S এর স্থানাঙ্ক (ae, o) এবং L বিন্দু পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত।

$$\therefore \frac{a^2e^2}{a^2}-\frac{SL^2}{b^2}=1,$$

বা, $SL^2=b^2(e^2-1)=b^4/a^2$,

বা, $SL=b^2/a$.

$\therefore$ নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=LL'=2\cdot SL=2b^2/a$.

6-10 (*a*) অনুবন্ধী পরাবৃত্ত।

একটি পরাবৃত্তের অনুপ্রস্থ অক্ষ এবং অনুবন্ধী অক্ষ যথাক্রমে অপর একটি পরাবৃত্তের অনুবন্ধী অক্ষ এবং অনুপ্রস্থ অক্ষ হইলে, একটিকে অপরটির **অনুবন্ধী পরাবৃত্ত** (Conjugate hyperbola) বলা হয়। যেমন,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{এবং} \quad \frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

এর একটি অপরটির অনুবন্ধী।

এইরূপক্ষেত্রে, উভয়ের কেন্দ্র মূলবিন্দুতে অবস্থিত; প্রথমটির অনুপ্রস্থ অক্ষ এবং নাভিদ্বয় x-অক্ষের উপর, কিন্তু দ্বিতীয়টির অনুপ্রস্থ অক্ষ এবং নাভিদ্বয় y-অক্ষের উপর অবস্থিত।

(*b*) সমপরাবৃত্ত।

যে পরাবৃত্তের অনুপ্রস্থ অক্ষ এবং অনুবন্ধী অক্ষ সমান তাহাকে **সমপরাবৃত্ত** (Rectangular বা Equilateral hyperbola) বলা হয়। যেমন,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1, \text{ অর্থাৎ, } x^2-y^2=a^2$$

$$\text{এবং } \frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{a^2}=1, \text{ অর্থাৎ, } y^2-x^2=a^2$$

উভয়েই সমপরাবৃত্ত।

উভয়ের ক্ষেত্রে উৎকেন্দ্রতা $e=\sqrt{\dfrac{a^2+a^2}{a^2}}=\sqrt{2}.$

6-11. কতিপয় প্রয়োজনীয় সিদ্ধান্ত।

[1] পরাবৃত্তের সমীকরণ :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

(*i*) অনুপ্রস্থ অক্ষের দৈর্ঘ্য $=2a$; অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য $=2b.$

(*ii*) নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=2b^2/a=2a(e^2-1).$

(*iii*) উৎকেন্দ্রতা e এর জন্য : $b^2=a^2(e^2-1).$

(*iv*) $S(ae, 0)\equiv(\sqrt{a^2+b^2}, 0)$ এবং $S'(-ae, 0)\equiv(-\sqrt{a^2+b^2}, 0),$ নাভিদ্বয়।

(v) নাভিদ্বয়ের দূরত্ব $=SS'=2ae$.

(vi) $A\,(a, 0)$ এবং $A'\,(-a, 0)$ শীর্ষদ্বয়।

(vii) নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ : $x=\pm a/e$,

($viii$) কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক : $(0, 0)$.

[2] পরাবৃত্তের সমীকরণ :

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1.$$

(i) অনুপ্রস্থ অক্ষের দৈর্ঘ্য $=2b$; অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য $=2a$.

(ii) নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=2a^2/b$.

(iii) উৎকেন্দ্রতা e এর জন্য ; $a^2=b^2(e^2-1)$.

(iv) $S\,(0, be)\equiv(0, \sqrt{a^2+b^2})$, এবং $S'(0, -be)\equiv(0, -\sqrt{a^2+b^2})$,
নাভিদ্বয়।

(v) নাভিদ্বয়ের দূরত্ব $=SS'=2be$.

(vi) $B\,(0, b)$ এবং $B'\,(0, -b)$ শীর্ষদ্বয়।

(vii) নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ : $y=\pm b/e$,

($viii$) কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক : $(0, 0)$.

[3] পরাবৃত্তের সমীকরণ :

$$(i)\quad \frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1,$$

$$(ii)\quad \frac{(y-\beta)^2}{b^2}-\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}=1.$$

উভয় ক্ষেত্রে, পরাবৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক : (α, β) ; কেন্দ্রকে মূলবিন্দু ধরিলে, সমান্তরাল অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে উহাদের সমীকরণ হইবে,

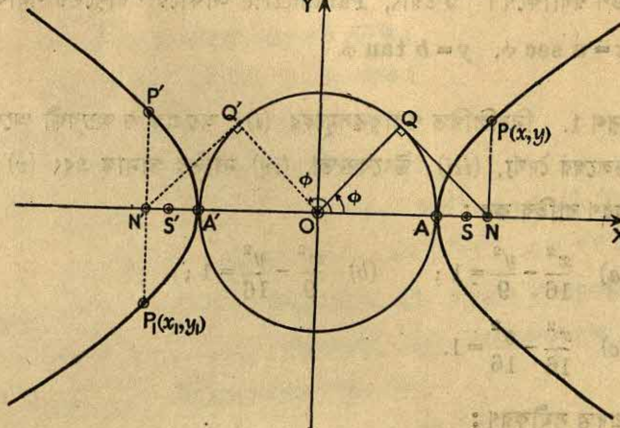
$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1 \quad \text{এবং} \quad \frac{Y^2}{b^2}-\frac{X^2}{a^2}=1,$$

যাহাদের একটি অপরটির অনুবন্ধী।

[1] এবং [2] এর আলোচনার সাহায্যে এই পরাবৃত্তদ্বয়ের সাধারণ ধর্ম অনুরূপভাবে আলোচনা করা যাইতে পারে।

6-12. Parametric আকারে পরাবৃত্তের সমীকরণ।

যে কোন পরাবৃত্তের অনুপ্রস্থ অক্ষকে ব্যাস লইয়া অঙ্কিত বৃত্তকে উহার **সহকারী বৃত্ত** (*Auxiliary Circle*) বলা হয়।



মনে করি, পরাবৃত্তের সমীকরণ :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \cdots \qquad (1)$$

উহার কেন্দ্র মূলবিন্দুতে অবস্থিত, এবং অনুপ্রস্থ অক্ষের দৈর্ঘ্য $=2a$. সুতরাং, উহার সহকারী বৃত্তের সমীকরণ :

$$x^2+y^2=a^2. \qquad \cdots \qquad (2)$$

মনে করি, পরাবৃত্তের উপর $P(x, y)$ যে কোন বিন্দু এবং PN উহার কোটি ; x-অক্ষের যে পার্শ্বে P অবস্থিত, ঠিক সেই পার্শ্বে সহকারী বৃত্তের উপর Q বিন্দু লই, যেন $O\widehat{Q}N=90°$.

ধরা যাক্, $N\widehat{O}Q=\phi$. তাহা হইলে, $ON=a\sec\phi$.

সুতরাং, P বিন্দুর ভুজ $=x=ON=a\sec\phi$.

$$\therefore \quad \frac{a^2\sec^2\phi}{a^2}-\frac{NP^2}{b^2}=1\,;$$

বা, $NP^2=b^2\tan^2\phi$. $\quad\therefore\ NP=b\tan\phi$.

সুতরাং, P বিন্দুর কোটি $=y=NP=b\tan\phi$.

আবার, $QN=a\tan\phi$.

সুতরাং, P-এর স্থানাঙ্ক : $(a \sec \phi, b \tan \phi)$;

এবং $PN : QN = b : a$.

সুতরাং, $\pm 90^\circ$ বাদে, ϕ এর বিভিন্ন মানের জন্য $(a \sec \phi, b \tan \phi)$ সর্বদাই পরাবৃত্তের উপ রথাকিবে। সুতরাং, Parametric আকারে পরাবৃত্তের সমীকরণ :

$$\boldsymbol{x = a \sec \phi, \quad y = b \tan \phi.}$$

উদাহরণ 1. নিম্নলিখিত পরাবৃত্তসমূহের (*i*) অনুপ্রস্থ ও অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য, (*ii*) নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য, (*iii*) উৎকেন্দ্রতা, (*iv*) নাভির স্থানাঙ্ক এবং (*v*) নিয়ামক-দ্বয়ের সমীকরণ বাহির কর :

(*a*) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; (*b*) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$;

(*c*) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{16} = 1$.

(*a*) প্রদত্ত সমীকরণ :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ যেখানে, } a = 4; \ b = 3.$$

(*i*) অনুপ্রস্থ অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2a = 8$ একক ;

অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2b = 6$ একক।

(*ii*) নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= 2b^2/a = 2 \times 9/4 = 9/2$ একক।

(*iii*) $b^2 = a^2(e^2 - 1)$ হইতে পাই,

$9 = 16(e^2 - 1)$; বা, $e = 5/4$.

(*iv*) নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক : $(\pm ae, 0)$; অর্থাৎ, $(\pm 5, 0)$.

(*v*) নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ : $x = \pm a/e$; অর্থাৎ, $x = \pm 16/5$.

(*b*) প্রদত্ত সমীকরণ :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ যেখানে, } a = 3, b = 4.$$

(*i*) অনুপ্রস্থ অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2a = 6$ একক ;

অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2b = 8$ একক।

(*ii*) নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= 2b^2/a = 32/3$ একক।

(*iii*) $b^2 = a^2(e^2 - 1)$ হইতে পাই,

$16 = 9(e^2 - 1)$, $\therefore \ e = 5/3$.

(iv) নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক : $(\pm ae, 0)$; অর্থাৎ, $(\pm 5, 0)$.

(v) নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ : $x = \pm a/e$ অর্থাৎ $x = \pm 9/5$.

(c) প্রদত্ত সমীকরণ :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ যেখানে } a = b = 4.$$

(i) অনুপ্রস্থ অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2a = 8$ একক ;

অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2b = 8$ একক।

(ii) নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= 2b^2/a = 8$ একক।

(iii) $b^2 = a^2(e^2 - 1)$ হইতে পাই, $e = \sqrt{2}$.

(iv) নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক : $(\pm ae, 0)$; অর্থাৎ, $(\pm 4\sqrt{2}, 0)$.

(v) নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ : $x = \pm a/e$; অর্থাৎ, $x = \pm 2\sqrt{2}$.

উদাহরণ 2. নিম্নলিখিত পরাবৃত্তদ্বয়ের (i) অনুপ্রস্থ ও অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য, (ii) নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য, (iii) উৎকেন্দ্রতা, (iv) নাভির স্থানাঙ্ক, (v) নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ, (vi) শীর্ষের স্থানাঙ্ক বাহির কর।

(a) $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{4} = 1$;   (b) $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{9} = 1$,

(a) প্রদত্ত সমীকরণ :

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \quad \text{যেখানে, } a = 2, b = 3,$$

(i) অনুপ্রস্থ অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2b = 6$ একক ;

অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2a = 4$ একক।

(ii) নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= 2a^2/b = 8/3$ একক।

(iii) $a^2 = b^2(e^2 - 1)$ হইতে পাই, $4 = 9(e^2 - 1)$.

$\therefore$ উৎকেন্দ্রতা : $e = (\sqrt{13})/3$.

(iv) নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক : $(0 \pm be)$ অর্থাৎ, $(0, \pm \sqrt{13})$.

(v) নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ : $y = \pm b/e$; অর্থাৎ, $y = \pm 9\sqrt{13}/13$.

vi) শীর্ষদ্বয়ের স্থানাঙ্ক : $(0, \pm b)$; অর্থাৎ, $(0, \pm 3)$.

(b) প্রদত্ত সমীকরণ :

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 ; \quad a = 3 ; \ b = 2 ,$$

(i) অনুপ্রস্থ অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2b = 4$ একক ;

অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2a = 6$ একক।

(*ii*) নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=2a^2/b=9$ একক।

(*iii*) $a^2=b^2(e^2-1)$ হইতে, $9=4(e^2-1)$.

$\therefore$ উৎকেন্দ্রতা : $e=(\sqrt{13})/2$.

(*iv*) নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক : $(0, \pm be)$; অর্থাৎ, $(0, \pm\sqrt{13})$.

(*v*) নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ : $y=\pm b/e$; অর্থাৎ, $y=\pm 4\sqrt{13}/13$.

(*vi*) শীর্ষদ্বয়ের স্থানাঙ্ক : $(0, \pm b)$; অর্থাৎ, $(0, \pm 2)$,

উদাহরণ 3. $16x^2-9y^2+64x+54y-161=0$ পরাবৃত্তের (*i*) কেন্দ্র, শীর্ষ, (*ii*) নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য, (*iii*) উৎকেন্দ্রতা, (*iv*) নিয়ামকের সমীকরণ, এবং (*v*) নাভির স্থানাঙ্ক বাহির কর।

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই,

$$\frac{(x+2)^2}{9}-\frac{(y-3)^2}{16}=1.$$

$O'(-2, 3)$ বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরিয়া সমান্তরাল অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে পরাবৃত্তের সমীকরণ :

$$\frac{X^2}{9}-\frac{Y^2}{16}=1 \; ; \; X=(x+2), \;\; Y=(y-3) \; ;$$

বা, $$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1 \; ; \;\; a=3 \;\; b=4.$$

(*i*) কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক : $X=0$, $Y=0$ অর্থাৎ, $x+2=0, y-3=0$.

$\therefore$ কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক : $(-2, 3)$.

এখন, $X=\pm a$ এবং $Y=0$ হইতে পাই,

$x=-2\pm 3, \;\; y-3=0.$

সুতরাং, শীর্ষদ্বয়ের স্থানাঙ্ক : $A(1, 3)$ এবং $A'(-5, 3)$.

(*ii*) নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=2b^2/a=32/3$ একক।

(*iii*) $b^2=a^2(e^2-1)$ হইতে পাই, $16=9(e^2-1)$; অর্থাৎ, $e=5/3$.

(*iv*) নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ : $X=\pm a/e$; অর্থাৎ $x=-2\pm 9/5$.

(*v*) $X=\pm ae$ এবং $Y=0$ হইতে পাই, $x=-2\pm 5$, $y=3$.

সুতরাং, নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক : $S(3, 3)$ এবং $S'(-7, 3)$.

উদাহরণ 4. পরাবৃত্তের অনুপ্রস্থ অক্ষ ও অনুবন্ধী অক্ষ যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর হইলে উহার সমীকরণ বাহির কর,

(*i*) যদি উহা (2, −3) এবং (1, 1) বিন্দুদ্বয়গামী হয় ;

(*ii*) যদি অনুবন্ধী অক্ষ 6 একক দীর্ঘ এবং নাভিদ্বয়ের দূরত্ব 10 একক হয়।

(*i*) মনে করি পরাবৃত্তের সমীকরণ :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

প্রদত্ত শর্তানুসারে,

$$\frac{4}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1\,; \qquad \frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}=1$$

$\therefore\ a^2=5/8\,;\ b^2=5/3$

$\therefore$ নির্ণেয় পরাবৃত্তের সমীকরণ : $8x^2-3y^2=5.$

(*ii*) মনে করি, পরাবৃত্তের সমীকরণ :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

এখানে, $2b=6. \quad \therefore\ b^2=9.$

আবার, $2ae$ = নাভিদ্বয়ের দূরত্ব $=10. \quad \therefore\ ae=5.$

কিন্তু, $b^2=a^2(e^2-1)$,

বা, $b^2=(ae)^2-a^2.$

$\therefore\ 9=25-a^2. \quad \therefore\ a^2=16.$

$\therefore$ নির্ণেয় পরাবৃত্তের সমীকরণ : $9x^2-16y^2=144.$

উদাহরণ 5. যে পরাবৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দুতে, অনুবন্ধী অক্ষ x-অক্ষ বরাবর, উৎকেন্দ্রতা 3/2 এবং নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য 5 একক তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

মনে করি, পরাবৃত্তের সমীকরণ :

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1.$$

প্রদত্ত শর্তানুসারে, $e=3/2$;

$2a^2/b=5$ বা, $2a^2=5b.$

কিন্তু, $a^2=b^2(e^2-1)$, বা, $2a^2=2b^2(e^2-1)$;

বা, $5b=2b^2\times(\frac{9}{4}-1)=5b^2/2. \quad \therefore\ b^2=4\,;\ a^2=5.$

সুতরাং, নির্ণেয় পরাবৃত্তের সমীকরণ :

$$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1.$$

উদাহরণ 6. কোন পরাবৃত্তের একটি নাভি $S\ (-1, 2)$, উহার নিকটবর্তী নিয়ামকের সমীকরণ : $4x-3y=1$ এবং উৎকেন্দ্রতা $5/2$. উহার সমীকরণ বাহির কর।

মনে করি, $P(x, y)$ পরাবৃত্তের উপর যে কোন বিন্দু; P হইতে নিয়ামকের লম্ব দূরত্ব PM.

তাহা হইলে, পরাবৃত্তের সংজ্ঞা অনুসারে,

$$SP=e.PM\ ;$$

বা, $$SP^2=e^2.PM^2\ ;$$

বা, $$(x+1)^2+(y-2)^2=\frac{25}{4}.\frac{(4x-3y-1)^2}{25}\ ;$$

বা, $$4(x+1)^2+4(y-2)^2=(4x-3y-1)^2,$$

যাহা নির্ণেয় পরাবৃত্তের সমীকরণ।

প্রশ্নমালা 14

1. নিম্নলিখিত পরাবৃত্তসমূহের (*i*) অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য, (*ii*) নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য, (*iii*) উৎকেন্দ্রতা, (*iv*) নাভির স্থানাঙ্ক বাহির কর।

(*a*) $4x^2-9y^2=36$; (*b*) $9x^2-4y^2=36$;

(*c*) $3y^2-4x^2=12$; (*d*) $8y^2-3x^2=5$.

2. $4x^2-9y^2=36$ পরাবৃত্তের অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য, উৎকেন্দ্রতা, নাভির স্থানাঙ্ক, এবং নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য বাহির কর। **[H. S. 1961]**

3. $12x^2-4y^2=3$ পরাবৃত্তের নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য, উৎকেন্দ্রতা এবং নাভির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

4. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তটি $x-3\sqrt{5}y=0$ এবং $\sqrt{5}x-2y=13$ এর ছেদবিন্দুগামী এবং উহার নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $4/3$. উহার নাভির স্থানাঙ্ক বাহির কর। **[Joint Ent. Ex. 1970]**

5. $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ পরাবৃত্তটি $(2, -2)$ এবং $(-5, 4)$ বিন্দুদ্বয়গামী। উহার উৎকেন্দ্রতা ও নিয়ামকের সমীকরণ বাহির কর।

6. $x^2-y^2=a^2$ পরাবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা, নাভির স্থানাঙ্ক এবং অর্ধ-নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য বাহির কর। **[P. U. 1972]**

7. $y^2-x^2=25$ পরাবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা, নাভির স্থানাঙ্ক, নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য, নিয়ামকের সমীকরণ বাহির কর।

8. $9y^2-16x^2-54y-64x-127=0$ পরাবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা ও নাভির স্থানাঙ্ক এবং নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য বাহির কর।

9. যে পরাবৃত্তের কেন্দ্র মূল বিন্দুতে, অনুপ্রস্থ অক্ষ x-অক্ষ বরাবর, অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য 6 একক, উৎকেন্দ্রতা 4/3, তাহার সমীকরণ বাহির কর।

10. কোন পরাবৃত্তের অনুবন্ধী অক্ষ ও অনুপ্রস্থ অক্ষ যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর, উৎকেন্দ্রতা 5/4 এবং নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য 12 একক। উহার সমীকরণ বাহির কর।

11. কোন পরাবৃত্তের নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(5, 0)$ এবং $(-5, 0)$ এবং উহার উৎকেন্দ্রতা 5/3. উহার সমীকরণ বাহির কর। [H. S. 1963]

12. কোন পরাবৃত্তের নাভির স্থানাঙ্ক $(0, 4)$ এবং $(0, -4)$; আর, নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য 12 একক। উহার সমীকরণ বাহির কর।

13. কোন পরাবৃত্তের একটি নাভির স্থানাঙ্ক $(a, 0)$; উহার নিকটবর্তী নিয়ামকের সমীকরণ $2x=a$ এবং উৎকেন্দ্রতা $\sqrt{2}$. উহার সমীকরণ বাহির কর।

14. কোন পরাবৃত্তের অনুপ্রস্থ অক্ষ ও অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 4 এবং 6 একক এবং তাহাদের সমীকরণ: $x+3=0$ ও $y-1=0$. উহার সমীকরণ নির্ণয় কর। [P. U. 1975]

15. কোন পরাবৃত্তের একটি নাভি $(2, 3)$ এবং উহার নিকটবর্তী নিয়ামকের সমীকরণ $x+2y=1$, উৎকেন্দ্রতা $\sqrt{3}$. উহার সমীকরণ বাহির কর।

16. $x^2-y^2=a^2$ পরাবৃত্তের উপর $P(a \sec \theta, a \tan \theta)$ একটি চলমান বিন্দু এবং $A(2a, 0)$ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। দেখাও যে, AP রেখাংশের মধ্যবিন্দুর সঞ্চার পথ একটি সম-পরাবৃত্ত। [H. S. 1970]

17. যদি e কোন পরাবৃত্তের এবং e' উহার অনুবন্ধী পরাবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা হয়, তবে দেখাও যে, $\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e'^2}=1$, [H. S. 1972]

18. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের নাভিদ্বয় S এবং S'; উহার উপর $P(x', y')$ যে কোন বিন্দু হইলে দেখাও যে, $SP=ex'-a$; $S'P=ex'+a$; $x'>a>0$.

[P. U. 1972]

19. কোন সম-পরাবৃত্তের নাভিদ্বয় S এবং S', কেন্দ্র C, এবং P উহার উপর যে কোন বিন্দু হইলে, প্রমাণ কর যে, $SP.S'P=CP^2$.

20. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ এই পরাবৃত্তের অনুপ্রস্থ অক্ষ AA' এবং এই পরাবৃত্তের উপরিস্থিত যে কোন বিন্দু P-এর কোটি PN হইলে প্রমাণ কর যে,

$PN^2 : AN.A'N=b^2 : a^2$,

21. দেখাও যে, $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ পরাবৃত্তের সহকারী বৃত্ত, $x^2+y^2=a^2$, $x^2/a^2-y^2/b^2=0$ সরলরেখাদ্বয়কে পরাবৃত্তের নিয়ামকদ্বয়ের উপরে ছিন্ন করে।

22. দেখাও যে, $x^2/a^2-y^2/b^2=-1$ পরাবৃত্তের সহকারী বৃত্ত, $x^2+y^2=b^2$, $x^2/a^2-y^2/b^2=0$ সরলরেখাদ্বয়কে পরাবৃত্তের নিয়ামকদ্বয়ের উপরে ছিন্ন করে।

23. $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ পরাবৃত্তস্থ P বিন্দুর কোটি NPকে বর্ধিত করাতে উহা $x^2/a^2-y^2/b^2=0$ এর লেখকে P এর নিকটতম Q বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাও যে, $NQ^2-NP^2=b^2$.

24. $x^2/a^2-y^2/b^2=-1$ পরাবৃত্তস্থ p বিন্দুর ভুজ npকে বর্দ্ধিত করাতে উহা $x^2/a^2-y^2/b^2=0$ এর লেখকে p এর নিকটতম q বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাও যে, $nq^2-np^2=a^2$.

25. দেখাও যে, $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ এবং $x^2/a^2-y^2/b^2=-1$, পরাবৃত্তদ্বয়ের নাভিচতুষ্টয়গামী বৃত্ত একটি পরাবৃত্তের নিয়ামকদ্বয়কে অপর পরাবৃত্তের উপরে ছিন্ন করে।

26. e এবং e' যথাক্রমে $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ এবং $x^2/a^2-y^2/b^2=-1$ পরাবৃত্তদ্বয়ের উৎকেন্দ্রতা হইলে, দেখাও যে, $e'=e/\sqrt{(e^2-1)}$.

সপ্তম অধ্যায়

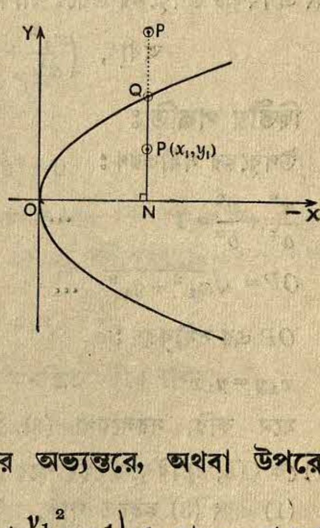
কনিকের জ্যা

(Chords of a Conic)

7-1. কণিকের সাপেক্ষে একটি বিন্দুর অবস্থান।

[a] $P(x_1, y_1)$ বিন্দুটি $y^2 = 4ax$ এর অভ্যন্তরে, উপরে বা বাহিরে থাকিবে, যদি যথাক্রমে $(y_1^2 - 4ax_1)$ এর মান ঋণাত্মক, শূন্য বা ধনাত্মক হয়।

মনে করি, $P(x_1, y_1)$ বিন্দুটি অধিবৃত্তের মধ্যে অবস্থিত। P বিন্দুর কোটি PN;
$\therefore \ PN = y_1$; $ON = x_1$. বর্ধিত NP অধিবৃত্তকে Q বিন্দুতে ছেদ করে, যেখানে, $NQ^2 = 4a \,.\, ON = 4ax_1$.



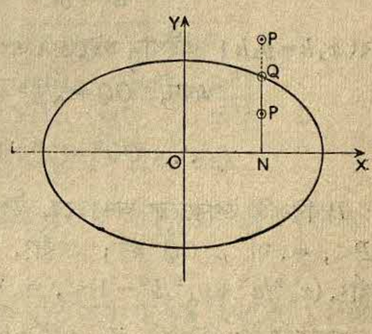
এখন, $NP^2 < NQ^2$; বা, $y_1^2 < NQ^2$.

$\therefore \ y_1^2 < 4ax_1$;

বা, $(y_1^2 - 4ax_1) < 0$.

$P(x_1, y_1)$ বিন্দুটি অধিবৃত্তের বাহিরে থাকিলে, অনুরূপভাবে দেখানো যায়, $(y_1^2 - 4ax_1) > 0$; এবং ঐ বিন্দুটি অধিবৃত্তের উপরে থাকিলে, $(y_1^2 - 4ax_1) = 0$.

[b] $P(x_1, y_1)$ বিন্দুটি $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর অভ্যন্তরে, অথবা উপরে, অথবা বাহিরে থাকিবে, যদি যথাক্রমে $\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1\right) <$, বা $=$, বা > 0 হয়।



মনে করি, $P(x_1, y_1)$ বিন্দুটি উপবৃত্তের মধ্যে অবস্থিত। P বিন্দুর কোটি PN; $PN = y_1$, $ON = x_1$. বর্ধিত NP, উপবৃত্তকে Q বিন্দুতে ছেদ করে, যেখানে,

$$\frac{ON^2}{a^2} + \frac{NQ^2}{b^2} = 1.$$

$$\therefore \ \frac{NQ^2}{b^2} = 1 - \frac{x_1^2}{a^2}.$$

এখন, $NP^2 < NQ^2$;

বা, $\frac{y_1^2}{b^2} < \frac{NQ^2}{b^2}$;

বা, $\frac{y_1^2}{b^2} < 1 - \frac{x_1^2}{a^2}$;

বা, $\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1\right) < 0.$

P বিন্দুটি উপবৃত্তের বাহিরে থাকিলে, অনুরূপ ভাবে দেখানো যায় যে,

$$\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1\right) > 0 ;$$

এবং ঐ বিন্দুটি উপবৃত্তের উপরে থাকিলে, $NP = NQ$;

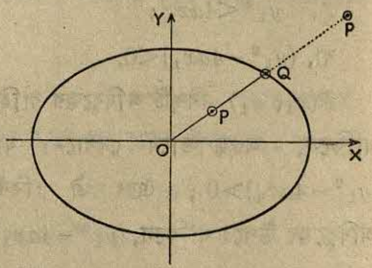
অর্থাৎ, $\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1\right) = 0.$

দ্বিতীয় পদ্ধতি :

উপবৃত্তের সমীকরণ :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \cdots \quad (1)$$

$$OP = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \quad \cdots \quad (2)$$



OP এর সমীকরণ :

$$x_1 y = y_1 x \quad \cdots \quad (3)$$

মনে করি, সরলরেখা (3) উপবৃত্ত (1) কে $Q(h, k)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(1) এবং (3) হইতে পাই,

$$\frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} = 1,$$

এবং $x_1 k = y_1 h$। এইখান হইতে h এবং k পাওয়া যাইবে।

এখন, $OQ = \sqrt{h^2 + k^2}$.

$$\therefore \quad OQ^2 = (h^2 + k^2) = (x_1^2 + y_1^2) \bigg/ \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}\right). \quad \cdots \quad (4)$$

P বিন্দুটি উপবৃত্তের অভ্যন্তরে, উপরে, বা, বাহিরে থাকিবে, যদি যথাক্রমে $OP <, =,$ বা, $> OQ$ হয় ; অর্থাৎ, $x_1^2 + y_1^2 <, =,$ বা, $> h^2 + k^2$ হয় ; অর্থাৎ, $(x_1^2/a^2 + y_1^2/b^2 - 1) <, =,$ বা, > 0 হয়।

মন্তব্য : $x_1^2 > a^2$, বা, $y_1^2 > b^2$ হইলে $P(x_1, y_1)$ বিন্দুটি সর্বদাই উপবৃত্তের বাহিরে থাকিবে।

[c] $P(x_1, y_1)$ বিন্দুটি $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ এর অভ্যন্তরে, উপরে, বা বাহিরে থাকিবে, যদি যথাক্রমে $\left(\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}-1\right)$ এর মান ঋণাত্মক, শূন্য, বা ধনাত্মক হয়।

ইহার প্রমাণ ঠিক আগের মত।

মন্তব্য : পরাবৃত্তের **কেন্দ্র** এবং ইহার **অনুবন্ধী পরাবৃত্ত**, প্রদত্ত পরাবৃত্তের **অভ্যন্তরে** অবস্থিত ; ইহাই ধরিতে হইবে।

7-2. [a] **$y=mx+c$ সরলরেখা হইতে $y^2=4ax$ এর ছেদিত জ্যা-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয়।**

প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় হইতে y অপনয়ন করিয়া পাই,

$$(mx+c)^2=4ax ;$$

$$\text{বা,}\quad m^2x^2+(2mc-4a)x+c^2=0. \quad \cdots \quad (1)$$

সুতরাং, $y=mx+c$ সরলরেখা অধিবৃত্ত $y^2=4ax$ কে যদি $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুতে ছেদ করে, তাহা হইলে, x_1 এবং x_2 সমীকরণ (1) এর বীজ হইবে ;

$$\text{অর্থাৎ,}\quad x_1+x_2=\frac{4a-2mc}{m^2} ; \quad x_1x_2=\frac{c^2}{m^2}.$$

আবার, P এবং Q, $y=mx+c$ এর উপর অবস্থিত হইবে বলিয়া,

$$y_1=mx_1+c ; \quad y_2=mx_2+c$$

$$\therefore \quad y_1-y_2=m(x_1-x_2).$$

$$\therefore \quad PQ=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

$$=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{(x_1-x_2)^2}$$

$$=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$$

$$=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{\left\{\frac{(4a-2mc)^2}{m^4}-\frac{4c^2}{m^2}\right\}}$$

$$=4m^{-2}\cdot\sqrt{a(1+m^2)}\cdot\sqrt{(a-cm)}.$$

মন্তব্য : (i) $c<a/m$ হইলে, সরলরেখাটি অধিবৃত্তকে দুইটি বিভিন্ন বিন্দুতে ছেদ করিবে।

(ii) $c=a/m$ হইলে, উহা অধিবৃত্তকে দুইটি **সমাপতিত বিন্দুতে (Coincident points)** ছেদ করিবে।

(*iii*) $c > a/m$ হইলে, সরলরেখাটি অধিবৃত্তকে আদৌ ছেদ করিবে না।

(*iv*) $x = c$ $(c < 0)$ সরলরেখা $y^2 = 4ax$ $(a > 0)$ কে আদৌ ছেদ করিবে না।

(*v*) $y = c$ সরলরেখাটি $y^2 = 4ax$ কে কেবলমাত্র একটি বিন্দুতে ছেদ করিবে।

[*b*] $y = mx + c$ সরলরেখা হইতে $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর ছেদিত জ্যা-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয়।

সরলরেখাটি উপবৃত্তকে $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুতে ছেদ করিলে, **(*a*)** এর অনুরূপ পদ্ধতির সাহায্যে,

$$PQ = \frac{2ab\sqrt{1+m^2}}{a^2m^2+b^2} \cdot \sqrt{(a^2m^2+b^2-c^2)}.$$

মন্তব্য : (*i*) $c^2 < a^2m^2 + b^2$ হইলে, সরলরেখাটি উপবৃত্তকে দুইটি বিভিন্ন বিন্দুতে ছেদ করিবে।

(*ii*) $c^2 = a^2m^2 + b^2$ হইলে, উহা উপবৃত্তকে দুইটি সমাপতিত বিন্দুতে ছেদ করিবে।

(*iii*) $c^2 > a^2m^2 + b^2$ হইলে, উহা উপবৃত্তকে আদৌ ছেদ করিবে না।

[*c*] $y = mx + c$ সরলরেখা হইতে $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর ছেদিত জ্যা-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয়।

সরলরেখাটি পরাবৃত্তকে $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুতে ছেদ করিলে, (***a***) এর অনুরূপ পদ্ধতির সাহায্যে,

$$PQ = \frac{2ab\sqrt{1+m^2}}{a^2m^2-b^2} \cdot \sqrt{\{c^2-(a^2m^2-b^2)\}}$$

মন্তব্য : (*i*) $c^2 > (a^2m^2 - b^2)$ হইলে, সরলরেখাটি পরাবৃত্তকে দুইটি বিভিন্ন বিন্দুতে ছেদ করিবে।

(*ii*) $c^2 = (a^2m^2 - b^2)$ হইলে, উহা পরাবৃত্তকে দুইটি সমাপতিত বিন্দুতে ছেদ করিবে।

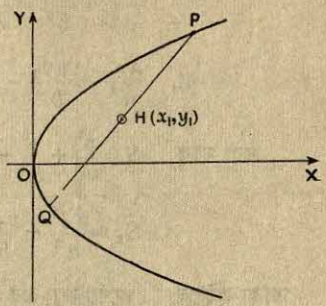
(*iii*) $c^2 < (a^2m^2 - b^2)$ হইলে, উহা পরাবৃত্তকে আদৌ ছেদ করিবে না।

দ্রষ্টব্য : উপরের মন্তব্যের প্রতিটি ক্ষেত্রে $m^2 > b^2/a^2$. $m^2 < b^2/a^2$ হইলে, $PQ = 2ab\sqrt{1+m^2} \cdot \sqrt{c^2+b^2-a^2m^2}/(b^2-a^2m^2)$.

7-3. কনিকের অভ্যন্তরস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয়।

[a] অধিবৃত্তের সমীকরণ : $y^2 = 4ax$.

$H(x_1, y_1)$ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু, যাহা অধিবৃত্তটির PQ জ্যা-এর মধ্যবিন্দু।



মনে করি, PQ জ্যা-এর সমীকরণ :

$$y = mx + c.$$

ইহা $H(x_1, y_1)$ গামী বলিয়া,

$$y_1 = mx_1 + c.$$

$$\therefore \quad y - y_1 = m(x - x_1).$$

এখন, P এবং Q এর x-স্থানাঙ্কদ্বয়,

$$(mx + c)^2 = 4ax\ ;$$

অর্থাৎ, $m^2x^2 + 2(mc - 2a)x + c^2 = 0$ এর বীজদ্বয়।

$$\therefore \quad 2x_1 = (\ P, Q \text{ বিন্দুদ্বয়ের ভুজের যোগফল }) = \frac{2(2a - mc)}{m^2}.$$

বা, $m^2x_1 = 2a - mc.$

$$= 2a - m(y_1 - mx_1)$$

$$= 2a - my_1 + m^2x_1$$

বা, $my_1 = 2a.$ $\quad\quad \therefore \quad m = \dfrac{2a}{y_1}.$

সুতরাং, PQ জ্যা-এর সমীকরণ :

$$y - y_1 = \frac{2a}{y_1}(x - x_1)\ ;$$

বা, $yy_1 - 2ax = y_1^2 - 2ax_1$;

বা, $\boldsymbol{yy_1 - 2a(x + x_1) = y_1^2 - 4ax_1}$.

ধরা যাক্, $S \equiv y^2 - 4ax$;

$S_1 \equiv y_1^2 - 4ax_1$; $\quad\quad T \equiv yy_1 - 2a(x + x_1)$.

তাহা হইলে, নির্ণেয় জ্যা-এর সমীকরণ : $\boldsymbol{T = S_1}$.

[b] **উপবৃত্তের সমীকরণ :** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

$H(x_1, y_1)$ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু যেখানে, $x_1{}^2/a^2+y_1{}^2/b^2<1.$

[a] এর অনুরূপ পদ্ধতির সাহায্যে দেখানো যায়, H বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত জ্যা-এর সমীকরণ :

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=\frac{x_1{}^2}{a^2}+\frac{y_1{}^2}{b^2};$$

বা, $$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}-1=\frac{x_1{}^2}{a^2}+\frac{y_1{}^2}{b^2}-1.$$

ধরা যাক, $S\equiv\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1;$

$$S_1\equiv\frac{x_1{}^2}{a^2}+\frac{y_1{}^2}{b^2}-1; \qquad T\equiv\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}-1.$$

তাহা হইলে, নির্ণেয় জ্যা-এর সমীকরণ : $T=S_1.$

[c] **পরাবৃত্তের সমীকরণ :** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$

$H(x_1, y_1)$ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। [a] এর অনুরূপ পদ্ধতির সাহায্যে দেখান যায়, H বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত জ্যা-এর সমীকরণ :

$$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=\frac{x_1{}^2}{a^2}-\frac{y_1{}^2}{b^2};$$

বা, $$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^1}-1=\frac{x_1{}^2}{a^2}-\frac{y_1{}^2}{b^2}-1.$$

ধরা যাক, $S\equiv\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1;$

$$S_1\equiv\frac{x_1{}^2}{a^2}-\frac{y_1{}^2}{b^2}-1; \qquad T\equiv\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}-1.$$

তাহা হইলে, নির্ণেয় জ্যা-এর সমীকরণ : $T=S_1.$

7-4. নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল অধিবৃত্ত, বা উপবৃত্ত, বা পরাবৃত্ত এর জ্যাসমূহের মধ্যবিন্দুর সঞ্চার পথের সমীকরণ নির্ণয়।

[a] অধিবৃত্তের সমীকরণ : $y^2=4ax.$

মনে করি, $y=mx$ একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা (যাহার নতিমাত্রা m প্রদত্ত); এবং ইহার সমান্তরাল P_1P_2 সরলরেখা এই অধিবৃত্তের যে কোন জ্যা, যাহার সমীকরণ : $y=mx+c.$

P_1P_2 এর মধ্যবিন্দু $H(h, k)$ হইলে,

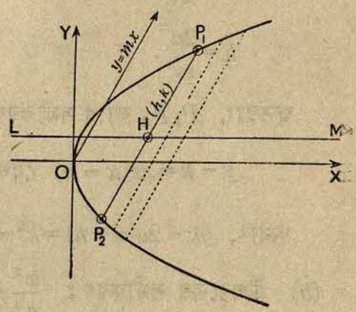
$$k = mh + c \qquad \dots \qquad (1)$$

এখন, $y^2 = 4ax$ এবং $y = mx + c$ হইতে y কে অপনয়ন করিলে পাই,

$$(mx + c)^2 = 4ax ;$$

অর্থাৎ, $m^2x^2 + 2(mc - 2a)x + c^2 = 0.$

তখন, P_1 এবং P_2 এর x-স্থানাঙ্ক যথাক্রমে x_1 এবং x_2 হইলে,



$$h = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2a - mc}{m^2} \qquad \dots \qquad (2)$$

(1) এবং (2) হইতে পাই,

$$k = mh + c ; \quad \text{অর্থাৎ}, \ k = \frac{2a}{m}.$$

সুতরাং, নির্ণেয় সঞ্চার পথের সমীকরণ : $y = \frac{2a}{m}$.

দ্বিতীয় পদ্ধতি :

অধিবৃত্তের সমীকরণ : $y^2 = 4ax.$

মনে করি, $y = mx$ একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা (m পূর্বে প্রদত্ত)। c এর বিভিন্ন মানের জন্য $y = mx + c$ সরলরেখা ঐ নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল। মনে করি, উহাদের যে কোন একটি P_1P_2 জ্যা যাহার মধ্যবিন্দু $H(h, k)$.

এখন P_1P_2 জ্যার সমীকরণ :

$$yk - 2a(x + h) = k^2 - 4ah$$

$$\text{বা}, \quad y = \frac{2a}{k}x + \left(k - \frac{2ah}{k}\right) \text{ যাহার নতিমাত্রা : } 2a/k.$$

সুতরাং, প্রদত্ত শর্তানুসারে, $m = 2a/k$; অর্থাৎ, $k = 2a/m.$

সুতরাং, $y = mx$ এর সমান্তরাল জ্যাগুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চার পথের সমীকরণ :

$$y = \frac{2a}{m}.$$

মন্তব্য : যে কোন অধিবৃত্তের সমান্তরাল জ্যাসমূহের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথকে ঐ অধিবৃত্তটির একটি **ব্যাস** (**Diameter**) বলে। প্রতিটি ব্যাস এক একটি সরলরেখা যাহারা অধিবৃত্তের অক্ষের সমান্তরাল।

দ্রষ্টব্য : $H(h, k)$ বিন্দুটি $y^2=4ax$ এর অভ্যন্তরে অবস্থিত। মনে করি, $H(h, k)$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত P_1P_2 জ্যার সমীকরণ : $y=mx+c$. যেহেতু ইহা $H(h, k)$ বিন্দুগামী, সুতরাং, P_1P_2 এর সমীকরণ : $y-k=m(x-h)$.

কিন্তু, P_1P_2 এর সমান্তরাল জ্যা-সমূহের মধ্যবিন্দুর সঞ্চার পথের সমীকরণ :

$y=\frac{2a}{m}$, **(প্রথম পদ্ধতিতে)।**

$$\therefore\ k=\frac{2a}{m}.$$

সুতরাং, P_1P_2 জ্যার সমীকরণ

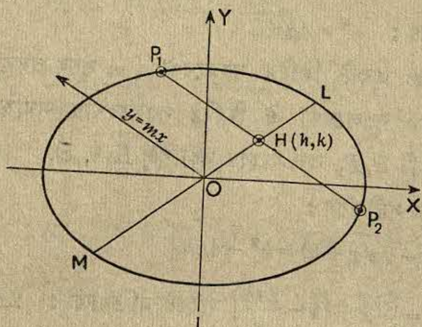
$\boldsymbol{y-k=m(x-h)}$ যেখানে, $\boldsymbol{m=\frac{2a}{k}}$;

অর্থাৎ, $yk-2a(x+h)=k^2-4ah$; বা, $\boldsymbol{T=S_1}$.

(b) উপবৃত্তের সমীকরণ : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

মনে করি, $y=mx$ একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা, (m পূর্বে প্রদত্ত), এবং ইহার সমান্তরাল P_1P_2 সরলরেখা ঐ উপবৃত্তের যে কোন জ্যা, যাহার সমীকরণ :

$$y=mx+c.$$



P_1P_2 রেখাংশের মধ্যবিন্দু $H(h, k)$ হইলে,

$$k=mh+c \quad \cdots \quad (1)$$

এখন, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ এবং $y=mx+c$ হইতে y-কে অপনয়ন করিয়া পাই,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+c)^2}{b^2}=1\ ;$$

অর্থাৎ, $(a^2m^2+b^2)x^2+2a^2cmx+a^2(c^2-b^2)=0.$

তখন, P_1 এবং P_2 এর x-স্থানাঙ্ক যথাক্রমে x_1 এবং x_2 হইলে,

$$h=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{a^2cm}{a^2m^2+b^2}. \quad \cdots \quad (2)$$

এখন, (1) এবং (2) হইতে পাই,

$$k=-\frac{a^2cm^2}{a^2m^2+b^2}+c=\frac{b^2c}{a^2m^2+b^2}.$$

$$\therefore \quad \frac{k}{h}=-\frac{b^2}{a^2m}, \quad \text{অর্থাৎ}, \ k=-\frac{b^2}{a^2m}h.$$

সুতরাং, নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ :

$$y=-\frac{b^2}{a^2m}x.$$

দ্বিতীয় পদ্ধতি :

উপবৃত্তের সমীকরণ : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

মনে করি, $y=mx$, (m প্রদত্ত) একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা। c এর বিভিন্ন মানের জন্য $y=mx+c$ সরলরেখা ঐ নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল। মনে করি, উহাদের যে কোন একটি P_1P_2 জ্যা যাহার মধ্যবিন্দু $H(h, k)$. এখন P_1P_2 জ্যা, $H(h, k)$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত বলিয়া, উহার সমীকরণ :

$$\frac{xh}{a^2}+\frac{yk}{b^2}-1=\frac{h^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}-1,$$

যাহার নতিমাত্রা $=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{h}{k}.$

সুতরাং, প্রদত্ত শর্তানুসারে, $m=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{h}{k}$; অর্থাৎ, $k=-\frac{b^2}{a^2m}h.$

সুতরাং, নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ :

$$y=-\frac{b^2}{a^2m}x.$$

মন্তব্য : যে কোন উপবৃত্তের সমান্তরাল জ্যা-সমূহের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথকে ঐ উপবৃত্তের একটি **ব্যাস** (**Diameter**) বলে। প্রতিটি ব্যাস এক একটি সরলরেখা, যাহা উপবৃত্তের কেন্দ্রগামী।

বিশেষ দ্রষ্টব্য :

[1] একটি উপবৃত্তের দুইটি ব্যাসের প্রত্যেকটি অপরটির সমান্তরাল জ্যা-সমূহকে যদি সমদ্বিখণ্ডিত করে, তবে তাহাদিগকে **অনুবন্ধী ব্যাস** (**Conjugate diameters**) বলা হয়।

মনে করি, $y=mx$ এবং $y=m'x$ দুইটি অনুবন্ধী ব্যাস। কিন্তু, আমরা জানি : $y=mx$ এর সমান্তরাল জ্যাসমূহের সমদ্বিখণ্ডক ব্যাসের সমীকরণ :

$$y=-\frac{b^2}{a^2m}x.$$

$$\therefore\quad m'=\frac{-b^2}{a^2m};$$

অর্থাৎ, $mm'=\dfrac{-b^2}{a^2}$.

সুতরাং, $y=mx$ এবং $y=m'x$, পরস্পর অনুবন্ধী ব্যাস হইবার শর্ত :

$$\boldsymbol{mm'=-\frac{b^2}{a^2}}.$$

[2] মনে করি, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের অভ্যন্তরে $R(\alpha, \beta)$ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। মনে করি, PQ জ্যা $R(\alpha, \beta)$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত এবং উহার নতিমাত্রা $=m$. তাহা হইলে, PQ এর সমান্তরাল ব্যাসের নতিমাত্রা $=m$; এবং এই ব্যাসের অনুবন্ধী ব্যাস $O(0, 0)$ এবং $R(\alpha, \beta)$ বিন্দুদ্বয়গামী বলিয়া উহার নতিমাত্রা m' হইলে, $m'=\beta/\alpha$.

কিন্তু, $mm'=\dfrac{-b^2}{a^2}$

$$\therefore\quad m\times\frac{\beta}{\alpha}=\frac{-b^2}{a^2}$$

বা, $m=-\dfrac{b^2\alpha}{a^2\beta}$.

তাহা হইলে, PQ জ্যার সমীকরণ :

$$y-\beta=m(x-\alpha);$$

অর্থাৎ, $y-\beta=-\dfrac{b^2\alpha}{a^2\beta}(x-\alpha)$;

বা, $\dfrac{\alpha}{a^2}(x-\alpha)+\dfrac{\beta}{b^2}(y-\beta)=0$;

বা, $\mathbf{T=S_1}$.

[c] **পরাবৃত্তের সমীকরণ :** $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1.$

$y=mx$, (m প্রদত্ত), এর সমান্তরাল জ্যাসমূহের সমদ্বিখণ্ডক ব্যাসের সমীকরণ :

$$y=\frac{b^2}{a^2m}x.$$

$y=mx$ এবং $y=m'x$ সরলরেখাদ্বয় এই পরাবৃত্তের পরস্পর অনুবন্ধী ব্যাস হইবার শর্ত :

$$mm'=b^2/a^2.$$

মন্তব্য : পরাবৃত্তের ব্যাস এবং অনুবন্ধী ব্যাসের সংজ্ঞা ঠিক উপবৃত্তের ক্ষেত্রে যেমনটি।

উদাহরণ 1. $3y-x-2=0$ সরলরেখাটি $y^2=x$ অধিবৃত্তকে যে যে বিন্দুতে ছেদ করে তাহার স্থানাঙ্ক বাহির কর, এবং ঐ দুই বিন্দু সংযোজক জ্যা-এর দৈর্ঘ্য বাহির কর।

প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় হইতে x অপনয়ন করিয়া পাই,

$$y^2=3y-2\ ;\ \text{বা,}\ (y-1)(y-2)=0.$$

$$\therefore\quad y=1, 2.$$

তাহা হইলে, $3y-x-2=0$ হইতে পাই,

$x=1$, যখন $y=1$,

$x=4$, যখন $y=2$.

$\therefore$ নির্ণেয় ছেদবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক :

(1, 1) এবং (4, 2).

$\therefore$ নির্ণেয় জ্যা-এর দৈর্ঘ্য

$=\sqrt{(4-1)^2+(2-1)^2}$ একক $=\sqrt{10}$ একক।

উদাহরণ 2. দেখাও যে, $P(2,-3)$ বিন্দুটি $y^2=8x$ অধিবৃত্তের অভ্যন্তরে অবস্থিত ; P বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত জ্যা-এর সমীকরণ বাহির কর।

যেহেতু, $(-3)^2-8\times 2=-7<0$; অতএব, P বিন্দুটি অধিবৃত্তের অভ্যন্তরে অবস্থিত।

$P(2,-3)$ বিন্দুগামী যে কোন জ্যা-এর সমীকরণ :

$$y+3=m(x-2), \quad \cdots \quad (1)$$

এই সরলরেখা অধিবৃত্তকে যে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে তাহাদের y-স্থানাঙ্কদ্বয়

$$y^2=8\times\left\{\frac{y+3+2m}{m}\right\}$$

অর্থাৎ, $y^2 - \frac{8}{m}y - \frac{8(3+2m)}{m} = 0$ এর বীজদ্বয়। ইহার বীজদ্বয় y_1 এবং y_2 হইলে,

$$y_1 + y_2 = \frac{8}{m}.$$

$$\text{কিন্তু,}\quad -3 = \frac{y_1 + y_2}{2}. \quad \therefore \quad -3 = \frac{4}{m};$$

অর্থাৎ, $m = -4/3$.

(1) হইতে নির্ণেয় জ্যা-এর সমীকরণ :

$$y + 3 = -\tfrac{4}{3}(x-2);$$

অর্থাৎ, $3y + 4x + 1 = 0$.

উদাহরণ 3. $x^2 + 4y^2 = 36$ উপবৃত্ত দ্বারা $x + 2y = 6$ সরলরেখার ছেদিত জ্যা-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

মনে করি, সরলরেখাটি উপবৃত্তকে $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহা হইলে, $x_1 + 2y_1 = 6$ এবং $x_2 + 2y_2 = 6$.

$$\therefore \quad (x_2 - x_1) = -2(y_2 - y_1);$$

$$\text{এবং } PQ = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$
$$= \sqrt{4(y_2-y_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$
$$= \sqrt{5} \times \sqrt{(y_2-y_1)^2}$$

এখন, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় হইতে x অপনয়ন করিয়া পাই,

$$(6-2y)^2 + 4y^2 = 36;$$

$$\text{বা,}\quad y^2 - 3y = 0. \quad \therefore \quad y_1 + y_2 = 3;\ y_1 y_2 = 0$$

$$\therefore \quad PQ = \sqrt{5} \times \sqrt{(y_2+y_1)^2 - 4y_1y_2}$$
$$= \sqrt{5} \times \sqrt{9} = 3\sqrt{5} \text{ একক।}$$

উদাহরণ 4. $P(2, 1)$ বিন্দুতে $4x^2 + 9y^2 = 36$ উপবৃত্তের যে জ্যাটি সমদ্বিখণ্ডিত তাহার সমীকরণ বাহির কর।

মনে করি, নির্ণেয় জ্যা টির সমীকরণ ; $y = mx + c$. কিন্তু ইহা $P(2, 1)$ বিন্দুগামী। সুতরাং, $1 = 2m + c$.

তাহা হইলে, নির্ণেয় জ্যা-এর সমীকরণ,

$$y - 1 = m(x-2) \quad \cdots \quad (1)$$

এখন, এই জ্যাটির সমান্তরাল ব্যাসের নতিমাত্রা $= m$ এবং এই ব্যাসের অনুবন্ধী ব্যাস (0, 0) এবং (2, 1) বিন্দুদ্বয় সংযোগকারী সরলরেখা ; ইহার নতিমাত্রা m' হইলে, $m' = \frac{1}{2}$.

কিন্তু, $mm' = -\dfrac{b^2}{a^2}$

$$= -\tfrac{4}{9}, \; (\because \; a=3 \; ; b=2).$$

$$\therefore \quad m = -8/9.$$

সুতরাং, (1) হইতে নির্ণেয় জ্যা-এর সমীকরণ

$$9y + 8x = 25.$$

উদাহরণ 5. (2, −3) বিন্দুতে $4x^2 - 5y^2 = 20$ পরাবৃত্তের যে জ্যাটি সমদ্বিখণ্ডিত তাহার সমীকরণ বাহির কর।

প্রদত্ত পরাবৃত্তের সমীকরণ হইতে পাই,

$$S \equiv \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} - 1 = 0$$

এখানে, $H(x_1, y_1) \equiv H(2, -3)$; $a^2 = 5$; $b^2 = 4$.

$$\therefore \quad S_1 = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - 1$$

$$= \tfrac{4}{5} - \tfrac{9}{4} - 1 = -\tfrac{49}{20} \; ;$$

$$T = \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} - 1 = \frac{2x}{5} + \frac{3y}{4} - 1$$

$$= \frac{8x + 15y - 20}{20}.$$

$\therefore$ নির্ণেয় জ্যা-এর সমীকরণ :

$$T = S_1 \; ;$$

অর্থাৎ, $8x + 15y - 20 = -49$;

বা, $8x + 15y + 29 = 0.$

দ্বিতীয় পদ্ধতি :

পরাবৃত্তের সমীকরণ :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ যেখানে, } a^2 = 5, \; b^2 = 4.$$

$P(2, -3)$ বিন্দুগামী যে কোন সরলরেখার সমীকরণ :

$$y + 3 = m(x - 2).$$

যাহার নতিমাত্রা $=m$. তাহা হইলে, এই সরলরেখার সমান্তরাল ব্যাসের নতিমাত্রা $=m$, এবং এই ব্যাসের অনুবন্ধী ব্যাস $(0, 0)$ এবং $(2, -3)$ বিন্দুদ্বয়গামী। এই অনুবন্ধী ব্যাসের নতিমাত্রা m' হইলে, $m' = -3/2$.

কিন্তু, $mm' = \frac{b^2}{a^2} = \frac{4}{5}$.

সুতরাং, $m \times (-3/2) = 4/5$.

$\therefore \quad m = -8/15$.

সুতরাং, নির্ণেয় জ্যা-এর সমীকরণ :

$$8x + 15y + 29 = 0.$$

উদাহরণ 6. $3x^2 + 4y^2 = 12$ উপবৃত্তের যে ব্যাস $x - 2y = 6$ সরলরেখার সমান্তরাল জ্যাসমূহকে সমদ্বিখণ্ডিত করে তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর :

প্রদত্ত উপবৃত্তের সমীকরণ :

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, যেখানে, $a^2 = 4, b^2 = 3$.

$x - 2y = 6$ সরলরেখার নতিমাত্রা m হইলে, $m = 1/2$.

মূলবিন্দুগামী যে সরলরেখার নতিমাত্রা m তাহার সমীকরণ :

$y = mx$, যেখানে $m = 1/2$.

ইহার সমান্তরাল জ্যা-সমূহের সমদ্বিখণ্ডক ব্যাসের সমীকরণ :

$y = m'x$ হইলে,

$$mm' = -\frac{b^2}{a^2} = -\frac{3}{4};$$

বা, $m' \times (\frac{1}{2}) = -3/4$.

$\therefore \quad m' = -3/2$.

সুতরাং, নির্ণেয় ব্যাসের সমীকরণ :

$$y = -\frac{3x}{2}; \text{ অর্থাৎ, } 3x + 2y = 0.$$

উদাহরণ 7. দেখাও যে, $y + 2x = 0$ এবং $2y + 3x = 0$ সরলরেখাদ্বয় $3x^2 - y^2 = 3$ পরাবৃত্তের অনুবন্ধী ব্যাস।

পরাবৃত্তের সমীকরণ,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{যেখানে,} \quad a^2 = 1, b^2 = 3.$$

$y + 2x = 0$ এর অনুবন্ধী ব্যাসের সমীকরণ

$y = m'x$ হইলে,

$m' \times (-2) = b^2/a^2 = 3/1$;

অর্থাৎ, $m' = -3/2$.

সুতরাং, $y + 2x = 0$ এর অনুবন্ধী ব্যাসের সমীকরণ : $y = -\frac{3}{2}x$;

অর্থাৎ, $3x + 2y = 0$.

প্রশ্নমালা 15

1. দেখাও যে, $P(3, -2)$ বিন্দুটি $y^2 = 3x$ অধিবৃত্তের অভ্যন্তরে অবস্থিত।

2. $(-2, -4)$ বিন্দুটি $3x^2 + 5y^2 = 15$ উপবৃত্তের বাহিরে কি অভ্যন্তরে অবস্থিত তাহা নির্ণয় কর।

3. দেখাও যে, $(5, 2)$ বিন্দুটি $2x^2 + 7y^2 = 14$ এই উপবৃত্তের বাহিরে অবস্থিত। **[Joint. Ent. Ex. 1974]**

4. $(3, -5)$ বিন্দুটি $3x^2 - 4y^2 = 1$ এই পরাবৃত্তের বাহিরে কি অভ্যন্তরে অবস্থিত তাহা নির্ণয় কর।

5. $y + x = 2$ সরলরেখা $y^2 = x$ অধিবৃত্তকে যে যে বিন্দুতে ছেদ করে তাহাদের স্থানাঙ্ক বাহির কর।

6. $x - 5y + 6 = 0$ সরলরেখা $y^2 = x$ অধিবৃত্তকে যে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে তাহাদের স্থানাঙ্ক বাহির কর।

7. $x + 2y = 6$ সরলরেখা $x^2 + 4y^2 = 36$ উপবৃত্তকে যে যে বিন্দুতে ছেদ করে তাহাদের স্থানাঙ্ক বাহির কর।

8. $x^2 + y^2 + 8x + 6y - 75 = 0$ বৃত্ত দ্বারা $x + y = 7$ সরলরেখায় ছেদিত জ্যা-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

9. $y^2 = 4x$ অধিবৃত্ত দ্বারা $y = x - 3$ সরলরেখায় ছেদিত জ্যা-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

10. $4x^2 + 9y^2 = 36$ উপবৃত্ত দ্বারা $2x + 3y = 6$ সরলরেখায় ছেদিত জ্যা-এর দৈর্ঘ্য বাহির কর।

11. $2x^2 - y^2 = 14$ পরাবৃত্ত দ্বারা $x + 2y = 7$ সরলরেখায় ছেদিত জ্যা-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

12. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ কর্তৃক $y = mx$ সরলরেখায় ছেদিত জ্যা-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। **[H. S. Comp. 1961]**

13. $H(h, k)$ বিন্দুতে $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের যে জ্যা-টি সমদ্বিখণ্ডিত তাহার সমীকরণ বাহির কর। [P. U. 1971]

14. $(2, -3)$ বিন্দুতে $y^2 = 8x$ অধিবৃত্তের যে জ্যা সমদ্বিখণ্ডিত তাহার সমীকরণ বাহির কর।

15. $y^2 + 6x = 0$ অধিবৃত্তের যে জ্যা-টি $(-2, 1)$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

16. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের যে জ্যা $M(h, k)$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত তাহার সমীকরণ বাহির কর। [P. U. 1965]

17. $3x^2 + 4y^2 = 48$ উপবৃত্তের যে জ্যা $(-3, 2)$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত তাহার সমীকরণ বাহির কর।

18. $4x^2 - 9y^2 = 36$ পরাবৃত্তের যে জ্যা $(6, 3)$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

19. $x^2 - 3y^2 = 1$ পরাবৃত্তের যে জ্যা $(3, 2)$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত তাহার সমীকরণ বাহির কর। [Joint. Ent. Ex. 1969]

20. দেখাও যে, যে কোন উপবৃত্তের সমান্তরাল জ্যা-সমূহের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ একটি সরলরেখা। [Joint. Ent. Ex. 1965]

21. $2y^2 = 3x$ অধিবৃত্তের যে সমস্ত জ্যা $(3, -1)$ বিন্দুগামী তাহাদের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ বাহির কর।

22. দেখাও যে, $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের শীর্ষ বিন্দুগামী জ্যা-সমূহের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ একটি অধিবৃত্ত। [Joint. Ent. Ex. 1970]

23. $y^2 = 12x$ অধিবৃত্তের যে সমস্ত জ্যা $(-2, 3)$ বিন্দুগামী তাহাদের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ বাহির কর।

24. $5x^2 + 8y^2 = 40$ উপবৃত্তের যে সমস্ত জ্যা $(2, -1)$ বিন্দুগামী তাহাদের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

25. $9x^2 - 16y^2 = 144$ পরাবৃত্তের যে সমস্ত জ্যা $(5, -2)$ বিন্দুগামী তাহাদের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ বাহির কর।

26. $y^2 = 3x$ অধিবৃত্তের যে সমস্ত জ্যা $y + 3x = 0$ এর সমান্তরাল তাহাদের সমদ্বিখণ্ডক ব্যাসের সমীকরণ বাহির কর।

27. দেখাও যে, $y + 3x = 0$ এবং $4y - x = 0$ সরলরেখাদ্বয় $3x^2 + 4y^2 = 5$ উপবৃত্তের অনুবন্ধী ব্যাসদ্বয়।

28. $2x^2 - 3y^2 = 6$ পরাবৃত্তের যে ব্যাসটি $3y = x$-এর অনুবন্ধী তাহার সমীকরণ বাহির কর।

অষ্টম অধ্যায়

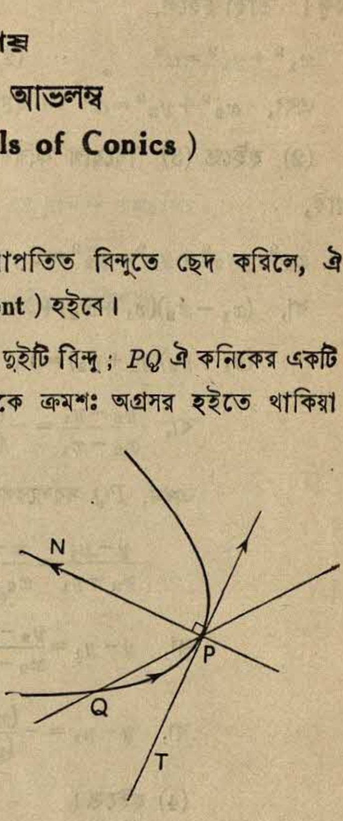
কনিকের স্পর্শক ও অভিলম্ব

(Tangents and Normals of Conics)

8-1. (*a*) **স্পর্শক।**

একটি সরলরেখা কোন কনিক্‌কে দুইটি সমাপতিত বিন্দুতে ছেদ করিলে, ঐ সরলরেখাটি কনিকের ঐ বিন্দুতে **স্পর্শক** (**Tangent**) হইবে।

মনে করি, কোন কনিকের উপর P এবং Q দুইটি বিন্দু ; PQ ঐ কনিকের একটি জ্যা। Q বিন্দুটি কনিকের উপর বরাবর P এর দিকে ক্রমশঃ অগ্রসর হইতে থাকিয়া যখন P বিন্দুতে সমাপতিত হইবে, তখন PQ এর **সীমাস্থ অবস্থান** (**Limiting position**) PT সরলরেখাই কনিকের P বিন্দুতে স্পর্শক হইবে, এবং P কে PT এর **স্পর্শ বিন্দু** (**Point of contact**) বলা হইবে। **অন্তরকলনে** (**Differential Calculus**) কোন বক্ররেখার উপর একটি বিন্দুতে স্পর্শকের সংজ্ঞা যে ভাবে দেওয়া আছে, এখানে তাহাই দেওয়া হইল।



(*b*) কনিকের উপরিস্থিত কোন বিন্দুতে স্পর্শকের উপর স্পর্শ বিন্দুতে লম্বভাবে অবস্থিত সরলরেখাকে ঐ বিন্দুতে ঐ কনিকের **অভিলম্ব** (**Normal**) বলা হয়।

উপরের চিত্রে, কনিকের P বিন্দুতে PT স্পর্শক ; PN সরলরেখা PT এর উপর লম্ব। সুতরাং, কনিকের P বিন্দুতে PN সরলরেখাই অভিলম্ব।

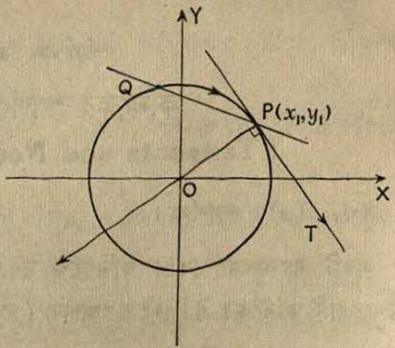
8-2. কনিকের উপরিস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয়।

[1] **বৃত্তের স্পর্শক।**

(*i*) $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শক নির্ণয়।

বৃত্তটি : $x^2+y^2=a^2$. ... (1)

মনে করি, $Q(x_2, y_2)$, বৃত্তের উপর অবস্থিত P এর নিকটবর্তী যে কোন একটি বিন্দু। তাহা হইলে,



$x_1^2 + y_1^2 = a^2$ ... (2)

এবং, $x_2^2 + y_2^2 = a^2$ ... (3)

(2) হইতে (3) বিয়োগ করিয়া পাই,

$x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 = 0$;

বা, $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + (y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 0$;

$$\text{বা, } \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{(x_1 + x_2)}{(y_1 + y_2)} \quad \cdots \quad (4)$$

এখন, PQ সরলরেখার সমীকরণ :

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} ;$$

$$\text{বা, } y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) ;$$

$$\text{বা, } y - y_1 = -\frac{(x_1 + x_2)}{(y_1 + y_2)}(x - x_1) \quad \cdots \quad (5),$$

(4) হইতে।

এখন, Q বিন্দুটি বৃত্তের উপর বরাবর P এর দিকে ক্রমশঃ অগ্রসর হইতে থাকিয়া যখন P বিন্দুতে সমাপতিত হইবে, তখন উহার সীমাস্থ অবস্থান PT সরলরেখা P বিন্দুতে বৃত্তটির স্পর্শক হইবে ; এবং তখন, $x_2 = x_1$ এবং $y_2 = y_1$ হইবে। তাহা হইলে, PT স্পর্শকের সমীকরণ হইবে :

$$y - y_1 = -\frac{2x_1}{2y_1}(x - x_1) ;$$

বা, $xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2$.

কিন্তু, $x_1^2 + y_1^2 = a^2$.

সুতরাং, বৃত্তের $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ :

$$xx_1 + yy_1 = a^2.$$

দ্বিতীয় পদ্ধতি ঃ

(i) $x^2+y^2=a^2$ হইতে পাই,

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0,$$

বা, $$\frac{dy}{dx}=-x/y.$$

সুতরাং, বৃত্তের $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে dy/dx এর মান $=-x_1/y_1$;

অর্থাৎ, স্পর্শকের নতিমাত্রা $=-x_1/y_1$.

তাহা হইলে, বৃত্তটির $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ ঃ

$$y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)\ ;$$

বা, $xx_1+yy_1=x_1^2+y_1^2$;

অর্থাৎ, $\boldsymbol{xx_1+yy_1=a^2}$.

(ii) বৃত্তের সমীকরণ ঃ

$$\boldsymbol{x^2+y^2+2gx+2fy+c=0}. \quad \cdots \quad (1)$$

এই সমীকরণ হইতে পাই,

$$2x+2y\frac{dy}{dx}+2g+2f\frac{dy}{dx}=0\ ;$$

বা, $$\frac{dy}{dx}=-\frac{(x+g)}{(y+f)}.$$

সুতরাং, বৃত্তটির $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}$ এর মান $=-\frac{(x_1+g)}{(y_1+f)}$.

তাহা হইলে, বৃত্তটির $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ ঃ

$$y-y_1=-\frac{(x_1+g)}{(y_1+f)}(x-x_1)\ ;$$

বা, $xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c$

$=x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c\equiv 0,$

$\because$ $P(x_1, y_1)$ বিন্দুটি (1) নং বৃত্তটির উপরে আছে।

সুতরাং, বৃত্তটির $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ ঃ

$$\boldsymbol{xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0}.$$

[2] $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয়।

$y^2=4ax$ ... (1) হইতে পাই,

$$2y\frac{dy}{dx}=4a\ ;$$

বা, $\dfrac{dy}{dx}=2a/y.$

স্থতরাং, অধিবৃত্তের $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে $\dfrac{dy}{dx}$ এর মান $=2a/y_1$;

অর্থাৎ, স্পর্শকের নতিমাত্রা $=2a/y_1$.

তাহা হইলে, অধিবৃত্তের $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ :

$$y-y_1=\frac{2a}{y_1}(x-x_1)$$

বা, $yy_1-y_1^2=2a(x-x_1)$;

বা, $yy_1-4ax_1=2a(x-x_1)$, $\because\ y_1^2=4ax_1$,

P বিন্দুটি (1) নং অধিবৃত্তের উপরিস্থ বলিয়া।

$\therefore$ সমীকরণটি : $yy_1=2a(x+x_1)$.

মন্তব্য : $y^2=4ax$ এর $P(at^2, 2at)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ :

$$yt=x+at^2.$$

দ্রষ্টব্য : অন্য পদ্ধতিতেও পূর্বের ন্যায় স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করা যাইতে পারে।

[3] $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয়।

প্রথম প্রণালী :

উপবৃত্তটি : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1.$ ... (1)

মনে করি, $Q(x_2, y_2)$ উপবৃত্তের উপর অবস্থিত P এর নিকটবর্তী যে কোন একটি বিন্দু। তাহা হইলে,

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1 \qquad (2)$$

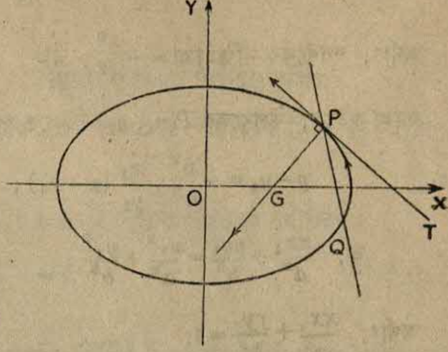
এবং, $$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1. \qquad ... \qquad (3)$$

(2) হইতে (3) বিয়োগ করিয়া পাই,

$$\frac{1}{a^2}(x_1^2 - x_2^2) + \frac{1}{b^2}(y_1^2 - y_2^2) = 0;$$

বা, $b^2(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + a^2(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 0;$

বা, $$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{(x_1 + x_2)}{(y_1 + y_2)}. \quad \cdots \quad (4)$$



এখন, PQ সরলরেখার সমীকরণ :

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1);$$

বা, $$y - y_1 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{(x_1 + x_2)}{(y_1 + y_2)}(x - x_1) \quad \cdots \quad (5),$$

উপরের (4) এর সাহায্যে।

এখন, Q বিন্দুটি উপবৃত্তের উপর বরাবর P এর দিকে ক্রমশঃ অগ্রসর হইতে থাকিয়া যখন P বিন্দুতে সমাপতিত হইবে, তখন উহার সীমাস্থ অবস্থান PT সরলরেখাই P বিন্দুতে উপবৃত্তের স্পর্শক হইবে; এবং তখন $x_2 = x_1$ এবং $y_2 = y_1$ হইবে। তাহা হইলে, (5) হইতে, PT এর সমীকরণ হইবে :

$$y - y_1 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{2x_1}{2y_1} \cdot (x - x_1)$$

বা, $$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}.$$

কিন্তু, $$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1. \quad \cdots \quad (2)$$

সুতরাং, উপবৃত্তের $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ :

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

দ্বিতীয় পদ্ধতি :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \cdots \quad (1)$$

হইতে পাই,

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0; \quad \text{বা,} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}.$$

সুতরাং, উপবৃত্তের $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}$ এর মান $= -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1}{y_1}$;

অর্থাৎ, স্পর্শকের নতিমাত্রা $= -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1}{y_1}$.

তাহা হইলে, উপবৃত্তের $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ :

$$y - y_1 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1}{y_1}(x - x_1) ;$$

বা, $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}$;

অর্থাৎ, $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$,

$\because$ $x_1^2/a^2 + y_1^2/b^2 = 1$, P বিন্দুটি (1) এর উপরিস্থিত বলিয়া।

দ্রষ্টব্য : উপবৃত্তটির $(a \cos \phi, b \sin \phi)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ :

$$\frac{xa \cos \phi}{a^2} + \frac{y\, b \sin \phi}{b^2} = 1 ;$$

অর্থাৎ, $\frac{x}{a} \cos \phi + \frac{y}{b} \sin \phi = 1$.

[4] $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তের $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয়।

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \cdots \quad (1)$$ হইতে পাই,

$\frac{2x}{a^2} - \frac{2y}{b^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$; বা, $\frac{dy}{dx} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}$.

সুতরাং, পরাবৃত্তের $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}$ এর মান $= \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1}{y_1}$;

অর্থাৎ, স্পর্শকের নতিমাত্রা $= \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1}{y_1}$.

তাহা হইলে, পরাবৃত্তের $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ :

$$y - y_1 = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1}{y_1}(x - x_1) ;$$

বা, $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}$;

অর্থাৎ, $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$,

$\because$ $x_1{}^2/a^2 - y_1{}^2/b^2 = 1$, P বিন্দুটি (1) এর উপরিস্থ বলিয়া।

মন্তব্য ঃ অন্য পদ্ধতিতেও পূর্বের ন্যায় স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করা যাইতে পারে।

দ্রষ্টব্য ঃ পরাবৃত্তের $P(a \sec \phi, b \tan \phi)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ ঃ

$$\frac{x}{a} \sec \phi - \frac{y}{b} \tan \phi = 1.$$

8-3. কনিকের উপরিস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয়।

[1] **বৃত্তের সমীকরণ ঃ** $x^2 + y^2 = a^2$. ... (1)

বৃত্তের উপর $P(x_1, y_1)$ একটি বিন্দু।

মনে করি, $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ ঃ

$$y = mx + c. \quad \dots \quad (2)$$

ইহার উপর $P(x_1, y_1)$ অবস্থিত বলিয়া,

$$y_1 = mx_1 + c.$$

সুতরাং, অভিলম্বের সমীকরণ ঃ

$$y - y_1 = m(x - x_1). \quad \dots \quad (3)$$

এখন, বৃত্তের $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ ঃ

$$xx_1 + yy_1 = a^2,$$

যাহার নতিমাত্রা $= -x_1/y_1$.

এখন, যেহেতু, বৃত্তের $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শক এবং অভিলম্ব পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত,

$$\therefore \quad m \times \left(\frac{-x_1}{y_1}\right) = -1;$$

বা, $m = y_1/x_1$. ... (4).

সুতরাং, P বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ ঃ

$$y - y_1 = \frac{y_1}{x_1}(x - x_1);$$

বা, $y_1 x - x_1 y = 0$. ... (5)

দ্রষ্টব্য ঃ বৃত্তের উপরিস্থিত যে কোন বিন্দুতে অভিলম্ব উহার কেন্দ্রগামী।

সুতরাং, $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তের উপরিস্থিত $P(h, k)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ : $\frac{y+f}{x+g}=\frac{k+f}{h+g}$.

[2] **অধিবৃত্তের সমীকরণ :**

$$y^2=4ax \; ; \qquad \cdots \qquad (1)$$

এবং উহার উপর $P(x_1, y_1)$ একটি বিন্দু। $P(x_1, y_1)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ :

$$y-y_1=m(x-x_1). \qquad \cdots \qquad (2)$$

অধিবৃত্তের $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ :

$$yy_1=2a(x+x_1), \qquad \cdots \qquad (3)$$

যাহার নতিমাত্রা $=2a/y_1$.

এখন, সমীকরণ (2), অধিবৃত্ত (1) এর অভিলম্ব হইবে, যদি $m\times\left(\frac{2a}{y_1}\right)=-1$ হয় ;

অর্থাৎ, $m=-\frac{y_1}{2a}$. $\qquad \cdots \qquad (4)$

সুতরাং, অধিবৃত্ত (1) এর $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ :

$$y-y_1=-\frac{y_1}{2a}(x-x_1). \qquad \cdots \qquad (5)$$

মন্তব্য :

ধরা যাক, $\frac{-y_1}{2a}=m$. $\qquad \therefore \; y_1=-2am.$

এখন, (1) হইতে পাই,

$$y_1^2=4ax_1 \; ; \qquad \text{বা,} \quad 4a^2m^2=4ax_1.$$

$$\therefore \; x_1=am^2.$$

তখন, (5) হইতে পাই,

$$y+2am=m(x-am^2) \; ;$$

বা, $y=mx-2am-am^3$,

যাহা, $P(am^2, -2am)$ বিন্দুতে $y^2=4ax$ এর অভিলম্ব।

[3] **উপবৃত্তের সমীকরণ :**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad \cdots \qquad (1)$$

$P(x_1, y_1)$ উপবৃত্তের উপরিস্থ একটি বিন্দু। $P(x_1, y_1)$ বিন্দুগামী যে কোন সরলরেখার সমীকরণ :

$$y - y_1 = m(x - x_1). \quad \cdots \quad (2)$$

$P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে উপবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ :

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1, \quad \cdots \quad (3)$$

$$\text{যাহার নতিমাত্রা} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1}{y_1}.$$

সমীকরণ (2), উপবৃত্ত (1) এর অভিলম্ব হইবে, যদি

$$m \times \left(\frac{-b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1}{y_1}\right) = -1 \text{ হয় ;}$$

অর্থাৎ, $m = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y_1}{x_1}$. $\quad \cdots \quad (4)$

সুতরাং, (2) হইতে, উপবৃত্ত (1) এর $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ :

$$y - y_1 = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y_1}{x_1}(x - x_1) ;$$

অর্থাৎ, $\dfrac{x - x_1}{\left(\dfrac{x_1}{a^2}\right)} = \dfrac{y - y_1}{\left(\dfrac{y_1}{b^2}\right)}$. $\quad \cdots \quad (5)$

দ্রষ্টব্য : উপবৃত্ত (1) এর $P(a \cos \phi, b \sin \phi)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ :

$$ax \sec \phi - by \operatorname{cosec} \phi = a^2 - b^2. \quad \cdots \quad (6)$$

[4] পরাবৃত্তের সমীকরণ :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad \cdots \quad (1)$$

পূর্ব পদ্ধতির অনুসরণে পরাবৃত্তের উপর $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ :

$$\frac{x - x_1}{\left(\dfrac{x_1}{a^2}\right)} = \frac{y - y_1}{\left(\dfrac{y_1}{-b^2}\right)} \quad \cdots \quad (2)$$

দ্রষ্টব্য : পরাবৃত্ত (1) এর $P(a \sec \phi, b \tan \phi)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ :

$$ax \sin \phi + by = (a^2 + b^2) \tan \phi. \quad \cdots \quad (3)$$

সাধারণ মন্তব্য : বৃত্ত, অধিবৃত্ত, উপবৃত্ত এবং পরাবৃত্তের উপরিস্থ যে কোন বিন্দুতে স্পর্শক এবং অভিলম্ব পরস্পর লম্ব।

8-4. $y=mx+c$ সরলরেখা একটি কনিকের স্পর্শক হইবার শর্ত নির্ণয়।

[1] (*i*) **বৃত্তের সমীকরণ :**

$$x^2+y^2=a^2. \qquad \cdots \qquad (1)$$

সরলরেখাটি : $y=mx+c. \qquad \cdots \qquad (2)$

প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় হইতে y অপনয়ন করিয়া পাই,

$$x^2+(mx+c)^2=a^2\ ;$$

বা, $(1+m^2)x^2+2mcx+(c^2-a^2)=0. \qquad \cdots \qquad (3)$

$y=mx+c$ সরলরেখাটি বৃত্তের স্পর্শক হইলে, উহা বৃত্তকে দুইটি সমাপতিত বিন্দুতে ছেদ করিবে ; অর্থাৎ, তখন (3) সমীকরণের বীজদ্বয় (x এর মান দুইটি) সমান হইবে। সুতরাং, সরলরেখাটি বৃত্তের স্পর্শক হইবার শর্ত :

$$(2mc)^2=4(1+m^2)(c^2-a^2)\ ;$$

বা, $c^2=a^2(1+m^2)$;

বা, $\boldsymbol{c=\pm a\sqrt{1+m^2}}$

সুতরাং, m এর সকল মানের জন্য, $\boldsymbol{y=mx\pm a\sqrt{1+m^2}}$ সর্বদাই $x^2+y^2=a^2$ এর স্পর্শক।

(*ii*) বৃত্তটি : $x^2+y^2=a^2$; $\qquad \cdots \qquad (1)$

সরলরেখাটি : $lx+my+n=0. \qquad \cdots \qquad (2)$

মনে করি, সমীকরণ (2), বৃত্তের $P(x_1,\ y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শক। কিন্তু, বৃত্তের $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ :

$$xx_1+yy_1-a^2=0. \qquad \cdots \qquad (3)$$

তাহা হইলে, (2) এবং (3) একই সরলরেখার সমীকরণ।

সুতরাং, $\dfrac{x_1}{l}=\dfrac{y_1}{m}=\dfrac{-a^2}{n}$

$\therefore\ x_1=-a^2l/n\ ;\ \ y_1=-a^2m/n.$

কিন্তু, (x_1, y_1) বিন্দুটি বৃত্তের উপর অবস্থিত।

$\therefore\ a^4l^2/n^2+a^4m^2/n^2=a^2$;

বা, $\boldsymbol{a^2l^2+a^2m^2=n^2}. \qquad \cdots \qquad (4)$

দ্রষ্টব্য : (x_1, y_1) স্পর্শ বিন্দুটি $lx+my+n=0$ এর উপরও অবস্থিত।

আবার, স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক : $(-a^2l/n,\ -a^2m/n)$, এখানে হইতেও (4) নং শর্তটি পাওয়া যাইবে।

[2] **অধিবৃত্তের সমীকরণ :**

$$y^2=4ax\ ; \quad \cdots \quad (1)$$

সরলরেখার সমীকরণ :

$$y=mx+c. \quad \cdots \quad (2)$$

পূর্ব পদ্ধতি অনুসরণে, $y=mx+c$ সরলরেখা অধিবৃত্ত (1) এর স্পর্শক হইবে, যদি—

$$c=a/m. \quad \cdots \quad (3)$$

সুতরাং, $m\ (\neq 0)$ এর যে কোন মানের জন্য,

$$y=mx+\frac{a}{m} \quad \cdots \quad (4)$$

সর্বদাই $y^2=4ax$ এর স্পর্শক।

দ্রষ্টব্য :

$lx+my+n=0$ সরলরেখাটি অধিবৃত্ত (1) এর স্পর্শক হইবে, যদি $n=am^2/l$.

[3] **উপবৃত্তের সমীকরণ :**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ ; \quad \cdots \quad (1)$$

সরলরেখার সমীকরণ :

$$y=mx+c. \quad \cdots \quad (2)$$

মনে করি, $y=mx+c$ সরলরেখাটি উপবৃত্ত (1) এর $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শক। কিন্তু, $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ :

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1\ ;$$

বা, $b^2x_1x+a^2y_1y=a^2b^2. \quad \cdots \quad (3)$

তাহা হইলে, (2) এবং (3) একই সরলরেখার সমীকরণ।

$$\therefore \quad \frac{b^2x_1}{m}=\frac{a^2y_1}{-1}=\frac{-a^2b^2}{c}.$$

$$\therefore \quad x_1=-a^2m/c\ ; \quad y_1=b^2/c.$$

এখন, যেহেতু, $P(x_1, y_1)$ বিন্দুটি উপবৃত্ত (1) এবং সরলরেখা (2) উভয়ের উপর অবস্থিত, ইহা উভয়কে সিদ্ধ করিবে। সুতরাং,

$$y_1=mx_1+c\ ;$$

বা, $b^2/c=-a^2m^2/c+c\ ;$

বা, $c^2 = a^2m^2 + b^2$.

$\therefore \; \boldsymbol{c = \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}}$.

সুতরাং, m এর যে কোন মানের জন্য,

$$\boldsymbol{y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}}$$

সরলরেখাদ্বয় সর্বদাই উপবৃত্ত (1) এর স্পর্শক।

দ্রষ্টব্য :

(i) $lx + my + n = 0$ সরলরেখাটি উপবৃত্ত (1) এর স্পর্শক হইবে, যদি

$$a^2l^2 + b^2m^2 = n^2.$$

(ii) $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ সরলরেখাটি উপবৃত্ত (1) এর স্পর্শক হইবে, যদি

$$p^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha.$$

[4] **পরাবৃত্তের সমীকরণ :**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \; ; \qquad \cdots \qquad (1)$$

সরলরেখার সমীকরণ :

$$y = mx + c. \qquad \cdots \qquad (2)$$

পূর্ব পদ্ধতি অনুসরণ করিলে, দেখা যাইবে, $y = mx + c$ সরলরেখা পরাবৃত্তের স্পর্শক হইবে, যদি

$$c = \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}.$$

সুতরাং, m এর সকল মানের জন্য

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$$

সর্বদাই পরাবৃত্তের স্পর্শক হইবে।

দ্রষ্টব্য :

(i) $lx + my + n = 0$ সরলরেখা পরাবৃত্ত (1) এর স্পর্শক হইলে,

$$n^2 = a^2l^2 - b^2m^2.$$

(ii) $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ সরলরেখা পরাবৃত্ত (1) এর স্পর্শক হইবে, যদি

$$p^2 = a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha.$$

8-5. একটি নির্দিষ্ট বহিঃস্থ বিন্দু হইতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয়।

[a] মনে করি, অধিবৃত্তের সমীকরণ :

$$y^2 = 4ax \; ;$$

এবং $P(h, k)$ উহার বহিঃস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

আমরা জানি, m এর যে কোন মানের জন্য ($m \neq 0$), $y = mx + \frac{a}{m}$ সর্বদাই অধিবৃত্তটির স্পর্শক।

এই স্পর্শকটি $P(h, k)$ বিন্দুগামী হইলে,

$$k = mh + \frac{a}{m} ;$$

$$\text{অর্থাৎ, } hm^2 - km + a = 0.$$

এই সমীকরণের m এর বীজদ্বয় m_1 এবং m_2 হইলে, $P(h, k)$ বিন্দুগামী স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ হইবে :

$$y = m_1 x + \frac{a}{m_1},$$

$$\text{এবং, } y = m_2 x + \frac{a}{m_2}.$$

[b] মনে করি, একটি উপবৃত্তের সমীকরণ :

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ এবং উহার বহিঃস্থ $P(h, k)$ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। m এর যে কোন মানের জন্য, $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ সরলরেখাদ্বয় সর্বদাই উপবৃত্তের স্পর্শক। উহারা $P(h, k)$ বিন্দুগামী হইলে,

$$k = mh \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2} ;$$

$$\text{অর্থাৎ, } (k - mh)^2 = a^2m^2 + b^2.$$

এই সমীকরণের m এর বীজদ্বয় m_1 এবং m_2 হইলে, স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ হইবে :

$$y = m_1 x \pm \sqrt{a^2 m_1^2 + b^2},$$

$$\text{এবং, } y = m_2 x \pm \sqrt{a^2 m_2^2 + b^2}.$$

এই চারিটি সরলরেখার যে দুইটি $P(h, k)$ বিন্দুগামী হইবে, তাহারাই মাত্র নির্ণেয় স্পর্শক হইবে।

মন্তব্য :

[b] এর অনুরূপ পদ্ধতিতে, (*i*) $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের এবং (*ii*) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু $P(h, k)$ হইতে স্পর্শকদ্বয় পাওয়া যাইবে।

8-5. (A). $S \equiv ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ **একটি কনিকের সমীকরণ ধরিয়া লইয়া ইহার উপরিস্থিত $P(\alpha, \beta)$ বিন্দুতে স্পর্শক এবং অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয়।**

এখানে কনিকটি : $S \equiv ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0.$ ... (1)

$P(\alpha, \beta)$ বিন্দুটি (1) নং কনিকের উপরিস্থ হইবার, শর্তটি :

$$S_1 \equiv a\alpha^2+2h\alpha\beta+b\beta^2+2g\alpha+2f\beta+c=0. \quad \cdots \quad (2)$$

এখন, (1) হইতে x এর সাপেক্ষে '**অন্তরকলন**' করিয়া পাই,

$$(ax+hy+g)+2(hx+by+f)\frac{dy}{dx}=0.$$

$\therefore$ $P(\alpha, \beta)$ বিন্দুতে, $\dfrac{dy}{dx}$ এর মান $= -\left(\dfrac{a\alpha+h\beta+g}{h\alpha+b\beta+f}\right).$ ... (3)

$\therefore$ P বিন্দুতে, **স্পর্শক** PT এর সমীকরণ :

$$\frac{y-\beta}{x-\alpha} = -\left(\frac{a\alpha+h\beta+g}{h\alpha+b\beta+f}\right);$$

বা, $(a\alpha+h\beta+g)(x-\alpha)+(h\alpha+b\beta+f)(y-\beta)=0$;

বা, $(a\alpha+h\beta+g)x+(h\alpha+b\beta+f)y+(g\alpha+f\beta+c)$

$$=(a\alpha+h\beta+g)\alpha+(h\alpha+b\beta+f)\beta+(g\alpha+f\beta+c) \equiv S_1=0. \quad \cdots \quad (4)$$

অথবা, $T \equiv a\alpha x+h(x\beta+y\alpha)+b\beta y+g(x+\alpha)+f(y+\beta)+c=0.$ ... (5)

আবার, অভিলম্ব PG, P বিন্দুগামী এবং স্পর্শক PT এর উপর লম্ব।

$\therefore$ P বিন্দুতে, **অভিলম্ব** PG এর সমীকরণ :

$$\frac{x-\alpha}{a\alpha+h\beta+g} = \frac{y-\beta}{h\alpha+b\beta+f}. \quad \cdots \quad (6)$$

উদাহরণ 1. $x^2+y^2-6x+4y-7=0$ বৃত্তের $P(5, 2)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ বাহির কর।

$P(5, 2)$ বিন্দুর স্থানাঙ্কের জন্য,

প্রদত্ত সমীকরণের বামপক্ষ $=5^2+2^2-6\times5+4\times2-7=0.$

$\therefore$ P বিন্দুটি প্রদত্ত বৃত্তের উপরিস্থ।

প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ : $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$, আকারের,

যেখানে, $g=-3$; $f=2$; $c=-7$.

$P(x_1, y_1) \equiv P(5, 2)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ :

$$xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0;$$

অর্থাৎ, $5x+2y-3(x+5)+2(y+2)-7=0$; অর্থাৎ, $x+2y-9=0$.

উদাহরণ 2. $x^2+y^2=5$ বৃত্তের যে স্পর্শকটি $x+2y+3=0$ এর সমান্তরাল তাহার সমীকরণ বাহির কর।

c-এর যে কোন মানের জন্য, $y=-\frac{1}{2}x+c$ সরলরেখাটি সর্বদাই $x+2y+3=0$-এর সমান্তরাল। এই সরলরেখাটি প্রদত্ত বৃত্তের স্পর্শক হইবে,

যদি $c=\pm(\sqrt{5})\times\sqrt{1+(-\frac{1}{2})^2}$

$=\pm 5/2.$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ : $y=-\frac{1}{2}x\pm\frac{5}{2}$;

অর্থাৎ, $x+2y-5=0$ এবং $x+2y+5=0.$

উদাহরণ 3. $y^2=12x$ অধিবৃত্তের যে স্পর্শক x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত 45° কোণে নত তাহার সমীকরণ এবং স্পর্শবিন্দু নির্ণয় কর। [**H. S. 1963**]

আমরা জানি, $y^2=4ax$ অধিবৃত্তে (m-এর যে কোন মানের জন্য, $m\neq 0$), $y=mx+\dfrac{a}{m}$ সর্বদাই স্পর্শক।

প্রদত্ত শর্তানুসারে,

$$a=3\ ;\ m=\tan 45^\circ=1.$$

সুতরাং, $y^2=12x$ অধিবৃত্তের যে স্পর্শকটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত 45° কোণে নত, তাহার সমীকরণ :

$$y=1.x+3/1\ ;\ \text{অর্থাৎ,}\ y-x-3=0.$$

মনে করি, উহার স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(h,\ k)$;

তাহা হইলে, $yk=2\times 3(x+h)$

অর্থাৎ, $ky-6x-6h=0,$

এবং, $y-x-3=0$ উভয়ে একই।

$\therefore\ \dfrac{k}{1}=\dfrac{6}{1}=\dfrac{6h}{3}.$

$\therefore\ h=3\ ;\ k=6.$

সুতরাং, নির্ণেয় স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক : $(3,\ 6).$

উদাহরণ 4. $x^2+3y^2=4$ উপবৃত্তের যে স্পর্শকটি $3x+y-2=0$ এর উপর লম্ব তাহার সমীকরণ বাহির কর।

$3x+y-2=0$ এর উপরে লম্ব যে কোন সরলরেখার সমীকরণ :

$$y=\tfrac{1}{3}x+c, \qquad \cdots \qquad (1)$$

যাহার নতিমাত্রা : $m=1/3.$

উপবৃত্তের সমীকরণ :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \ldots \quad (2)$$

যেখানে, $a^2=4$; $b^2=4/3$.

তাহা হইলে, (1) সরলরেখাটি (2) এর স্পর্শক হইবে, যদি

$$c=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$$
$$=\pm\sqrt{4\times\tfrac{1}{9}+\tfrac{4}{3}}=\pm\tfrac{4}{3}.$$

সুতরাং, নির্ণেয় সমীকরণ : $y=\frac{1}{3}x\pm\frac{4}{3}$;

অর্থাৎ, $x-3y+4=0$; $x-3y-4=0$.

উদাহরণ 5. দেখাও যে, $x+y=1$ সরলরেখাটি $2x^2-3y^2=6$ পরাবৃত্তের স্পর্শক। উহার স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক বাহির কর।

প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় হইতে y অপনয়ন করিয়া পাই,

$$2x^2-3(1-x)^2=6$$

বা, $(x-3)(x-3)=0$. $\therefore\ x=3$; 3.

তাহা হইলে, $x+y=1$ হইতে, $y=-2$, যখন $x=3$; সুতরাং, প্রদত্ত সরলরেখাটি প্রদত্ত পরাবৃত্তকে সমাপতিত বিন্দুতে ছেদ করে ; অর্থাৎ, সরলরেখাটি পরাবৃত্তের একটি স্পর্শক, এবং উহার স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক : $(3,-2)$.

দ্বিতীয় পদ্ধতি :

মনে করি, $x+y=1$ সরলরেখাটি $2x^2-3y^2=6$ পরাবৃত্তের $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শক। কিন্তু, $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে পরাবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ :

$$2x_1.x-3y_1.y=6.$$

$$\therefore\ \frac{2x_1}{1}=-\frac{3y_1}{1}=\frac{6}{1}.$$

অর্থাৎ, $x_1=3$; $y_1=-2$.

আবার, $P(3,\ -2)$ বিন্দুটি পরাবৃত্তের উপরিস্থ ; কারণ, $2(3)^2-3(-2)^2=6$.

সুতরাং, প্রদত্ত সরলরেখাটি পরাবৃত্তের $(3,\ -2)$ বিন্দুতে স্পর্শক।

উদাহরণ 6. $x^2+3y=0$ অধিবৃত্তের $(-3,\ -3)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ বাহির কর।

এখানে, $(-3,\ -3)$ বিন্দুটি $x^2+3y=0$ ... (1)

এর উপরে অবস্থিত ; কারণ, $(-3)^2+3(-3)=0$.

আবার, (1) হইতে পাই,

$$2x + 3\frac{dy}{dx} = 0\ ;$$

অর্থাৎ, $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}x$ . ... (2)

সুতরাং, $(-3, -3)$ বিন্দুতে,

$$\frac{dy}{dx} \text{ এর মান} = -\frac{2}{3} \times (-3) = 2.$$

তাহা হইলে, $(-3, -3)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ :

$y = mx + c$, যেখানে $m = 2$;

অর্থাৎ, $y = 2x + c$. ... ... (3)

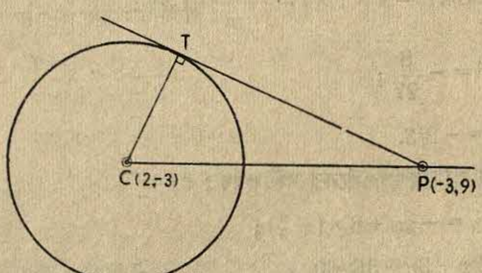
কিন্তু, ইহা $(-3, -3)$ বিন্দুগামী।

$\therefore \quad -3 = -6 + c. \quad \therefore \quad c = 3.$

সুতরাং, নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ :

$y = 2x + 3$. ... ... (4)

উদাহরণ 7. $P(-3, 9)$ বিন্দু হইতে $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ বৃত্তের স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।



প্রদত্ত বৃত্তটির সমীকরণ : $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 5^2$,

যাহার কেন্দ্র $C(2, -3)$ বিন্দু, এবং ব্যাসার্ধ 5 একক।

PT সরলরেখাটি বৃত্তের T বিন্দুতে স্পর্শক হইলে,

$$PT^2 = PC^2 - CT^2\ ;\quad (\because\ \widehat{CTP} = 90^\circ).$$

কিন্তু, $PC = \sqrt{(2+3)^2 + (-3-9)^2}$ একক $= 13$ একক ;

এবং $CT = 5$ একক।

$\therefore \quad PT^2 = (13^2 - 5^2)$ বর্গ একক $= 12^2$ বর্গ একক।

$\therefore \quad PT = 12$ একক।

সুতরাং, নির্ণেয় স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $= 12$ একক।

উদাহরণ 8. $y^2=32x$ এবং $x^2=108y$ অধিবৃত্তদ্বয়ের সাধারণ স্পর্শকের সমীকরণ বাহির কর।

এখানে, অধিবৃত্ত দুইটি :

$$y^2=32x, \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

$$\text{এবং, } x^2=108y. \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

m-এর যে কোন মানের জন্য ($m\neq 0$),

$$y=mx+\frac{8}{m} \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

সর্বদাই অধিবৃত্ত (1) এর স্পর্শক।

এখন, (3) সরলরেখাটি অধিবৃত্ত (2) এর স্পর্শক হইবে, যদি

$$x^2=108\left(mx+\frac{8}{m}\right),$$

$$\text{অর্থাৎ, } x^2-108mx-\frac{108\times 8}{m}=0$$

সমীকরণের x-এর বীজদ্বয় সমান হয়, অর্থাৎ, যদি

$$(108m)^2=4\times 1\times\left(-\frac{108\times 8}{m}\right) \text{ হয়};$$

$$\text{অর্থাৎ, } m^3=-\frac{8}{27};$$

$$\text{অর্থাৎ, } m=-2/3.$$

$\therefore$ নির্ণেয় সাধারণ স্পর্শকের সমীকরণ :

$$y=-\tfrac{2}{3}x+8\times(-\tfrac{3}{2});$$

$$\text{অর্থাৎ, } 2x+3y+36=0.$$

উদাহরণ 9. $x^2+y^2=2a^2$ বৃত্ত এবং $y^2=8ax$ অধিবৃত্তের সাধারণ স্পর্শকের সমীকরণ বাহির কর।

এখানে, বৃত্তটি : $x^2+y^2=2a^2$; $\cdots$ (1)

এবং, অধিবৃত্তটি : $y^2=8ax$. $\cdots$ (2)

মনে করি, $y=mx+c$ $\cdots$ $\cdots$ (3)

রেখাটি, (1) এবং (2) এর সাধারণ স্পর্শক।

তাহা হইলে,

$$c=\pm\sqrt{2}.a.\sqrt{1+m^2}; \text{ এবং } c=\frac{2a}{m}.$$

অর্থাৎ, $\pm\sqrt{2a}\sqrt{1+m^2}=\dfrac{2a}{m}$;

বা, $m^4+m^2-2=0$; বা, $(m^2+2)(m^2-1)=0$;

বা, $m^2=-2$ এবং $m^2=1$.

$\therefore$ m-এর মান বাস্তব রাশি হইবে বলিয়া, কেবলমাত্র $m=\pm 1$.

এখন, $m=1$ হইলে, $c=\dfrac{2a}{m}=2a$;

এবং, $m=-1$ হইলে, $c=\dfrac{2a}{m}=-2a$.

$\therefore$ নির্ণেয় সাধারণ স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ : $y=x+2a$; $y=-x-2a$.

উদাহরণ 10. $x^2+y^2-4x-6y+3=0$ বৃত্তের (1, 6) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ বাহির কর।

প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ : $(x-2)^2+(y-3)^2=10$, ... (1)

যাহার কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক : (2, 3).

আবার, (1, 6) বিন্দুটি (1) নং বৃত্তটির উপরিস্থ ; কারণ, $(1-2)^2+(6-3)^2\equiv 10$.

এখন, বৃত্তের উপর যে কোন বিন্দুতে অভিলম্ব ঐ বৃত্তের কেন্দ্রগামী।

সুতরাং, নির্ণেয় অভিলম্বের সমীকরণ :

$$\frac{y-3}{x-2}=\frac{6-3}{1-2};$$

অর্থাৎ, $3x+y-9=0$.

উদাহরণ 11. $4x^2+3y^2=16$ উপবৃত্তের (1, 2) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ বাহির কর।

এখানে, (1, 2) বিন্দুটি প্রদত্ত উপবৃত্তের উপরিস্থ ; কারণ, $4(1)^2+3(2)^2\equiv 16$.

এখানে, উপবৃত্তটির (1, 2) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ :

$$4x\times 1+3y\times 2=16$$

অর্থাৎ, $2x+3y=8$.

এখন, যেহেতু, উপবৃত্তের উপরিস্থিত যে কোন বিন্দুতে অভিলম্ব এবং স্পর্শক পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত, সুতরাং (1, 2) বিন্দুতে উপবৃত্তের অভিলম্বের সমীকরণ হইবে :

$$3x-2y=c.$$

আবার, যেহেতু, উহা (1, 2) বিন্দুগামী,

$\therefore$ $3\times 1-2\times 2=c$; অর্থাৎ, $c=-1$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ : $3x-2y+1=0$.

উদাহরণ 12. $3x^2-4y^2=12$ পরাবৃত্তের (4, 3) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ বাহির কর।

প্রদত্ত সমীকরণ :

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1. \qquad \dots \qquad (1)$$

এখন, (4, 3) বিন্দুটি (1) এর উপরিস্থ, কারণ, $\frac{4^2}{4}-\frac{3^2}{3}=1$.

সুতরাং, নির্ণেয় সমীকরণ :

$$\frac{x-4}{4/4}=\frac{y-3}{-3/3};$$

অর্থাৎ, $x+y=7$.

দ্বিতীয় পদ্ধতি : [পূর্বের ন্যায়, (4, 3) বিন্দুটি পরাবৃত্তের উপরিস্থ।]

এখন, (4, 3) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ :

$$\frac{4x}{4}-\frac{3y}{3}=1$$

অর্থাৎ, $x-y=1$, যাহার নতিমাত্রা $=1$.

তাহা হইলে, (4, 3) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ :

$$y-3=(-1)\times(x-4)$$

অর্থাৎ, $x+y=7$.

উদাহরণ 13. $2x+3y=6$ সরলরেখার সহিত লম্বভাবে অবস্থিত যে সরলরেখা $4x^2+9y^2=72$ উপবৃত্তের অভিলম্ব তাহার সমীকরণ এবং যে বিন্দুতে উহা অভিলম্ব তাহার স্থানাঙ্ক বাহির কর।

প্রদত্ত উপবৃত্তের সমীকরণ :

$$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1 \qquad \dots \qquad (1)$$

$2x+3y=6$ এর সহিত লম্বভাবে অবস্থিত যে কোন সরলরেখার সমীকরণ :

$$3x-2y=c \qquad \dots \qquad (2)$$

মনে করি, উপবৃত্ত (1) এর উপরিস্থ (x_1, y_1) বিন্দুতে সরলরেখা (2) অভিলম্ব। কিন্তু, ঐ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ :

$$\frac{x-x_1}{x_1/18}=\frac{y-y_1}{y_1/8}$$

বা, $$\frac{18}{x_1}\cdot x-\frac{8}{y_1}\cdot y=10 \qquad \dots \qquad (3)$$

তাহা হইলে, (2) এবং (3) একই সরলরেখার সমীকরণ।

$$\therefore \quad \frac{3}{18/x_1} = \frac{-2}{-8/y_1} = \frac{c}{10};$$

$$\text{বা,} \quad x_1 = 3c/5 \; ; \; y_1 = 2c/5.$$

কিন্তু, (x_1, y_1) উপবৃত্তের উপরে অবস্থিত বলিয়া,

$$4x_1^2 + 9y_1^2 = 72.$$

$$\therefore \quad 4 \times \frac{9c^2}{25} + 9 \times \frac{4c^2}{25} = 72,$$

$$\text{বা,} \quad c^2 = 25. \quad \therefore \quad c = \pm 5.$$

এখন, $c = 5$ হইলে, $x_1 = 3$; $y_1 = 2$;

কিন্তু, $c = -5$ হইলে, $x_1 = -3$; $y_1 = -2$.

সুতরাং, নির্ণেয় অভিলম্বের সমীকরণঃ $3x - 2y - 5 = 0$; এবং $3x - 2y + 5 = 0$; এবং উহারা যথাক্রমে $(3, 2)$ এবং $(-3, -2)$ বিন্দুতে অভিলম্ব।

উদাহরণ 14. $lx + my = n$ সরলরেখাটি $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ এই উপবৃত্তের স্পর্শক হইলে, দেখাও যে, $a^2l^2 + b^2m^2 = n^2$.

এখানে, সরলরেখাটিঃ $lx + my = n$; ... (1)

এবং, উপবৃত্তটিঃ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$ ... (2)

মনে করি, (1) সরলরেখাটি, উপবৃত্ত (2) এর $P(h, k)$ বিন্দুতে স্পর্শক। কিন্তু উপবৃত্তের উপরিস্থিত $P(h, k)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণঃ

$$\frac{hx}{a^2} + \frac{ky}{b^2} = 1 \; ; \quad \cdots \quad (3)$$

এবং, $P(h, k)$ বিন্দুটি (1) নং রেখার উপরিস্থ বলিয়া,

$$lh + mk = n. \quad \cdots \quad (4)$$

তাহা হইলে, (1) এবং (3) একই সমীকরণ।

$$\therefore \quad \frac{h}{a^2l} = \frac{k}{b^2m} = \frac{1}{n};$$

$$\text{অর্থাৎ,} \; h = \frac{a^2l}{n} \; ; \quad k = \frac{b^2m}{n}. \quad \cdots \quad (5)$$

সুতরাং, (4) এবং (5) হইতে পাই :

$$a^2l^2 + b^2m^2 = n^2. \quad \cdots \quad (6)$$

উদাহরণ 15. $lx+my=n$ সরলরেখা $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের অভিলম্ব হইবার শর্ত নির্ণয় কর।

মনে করি, $lx+my=n$ সরলরেখাটি প্রদত্ত উপবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্ব। কিন্তু, (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ :

$$\frac{x-x_1}{x_1/a^2}=\frac{y-y_1}{y_1/b^2}$$

বা, $$\frac{a^2}{x_1}.x-\frac{b^2}{y_1}.y=a^2-b^2.$$

তাহা হইলে,

$$\frac{a^2}{x_1 l}=\frac{b^2}{-y_1 m}=\frac{a^2-b^2}{n}$$

$$\therefore \quad \frac{x_1}{a}=\frac{an}{l(a^2-b^2)};$$

$$\frac{y_1}{b}=-\frac{bn}{m(a^2-b^2)}.$$

$$\therefore \quad \frac{a^2n^2}{l^2(a^2-b^2)^2}+\frac{b^2n^2}{m^2(a^2-b^2)^2}=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত : $$\frac{a^2}{l^2}+\frac{b^2}{m^2}=\frac{(a^2-b^2)^2}{n^2}.$$

প্রশ্নমালা 16

1. প্রদত্ত কনিকের নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ বাহির কর :

(i) $x^2+y^2=25$ বৃত্তের $(3, 4)$ বিন্দুতে ;

(ii) $x^2+y^2=13$ বৃত্তের $(-2, 3)$ বিন্দুতে ;

(iii) $x^2+y^2-2x+4y-20=0$ বৃত্তের $(4, 2)$ বিন্দুতে ;

(iv) $y^2=4x$ অধিবৃত্তের $(1, 2)$ বিন্দুতে ;

(v) $2y^2=3x$ অধিবৃত্তের $(6, -3)$ বিন্দুতে ;

(vi) $x^2=8y$ অধিবৃত্তের $(-4, 2)$ বিন্দুতে ;

(vii) $y^2+3x=0$ অধিবৃত্তের $(-3, -3)$ বিন্দুতে ;

(viii) $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{10}=1$ উপবৃত্তের $(3, 2)$ বিন্দুতে ;

(ix) $4x^2+3y^2=16$ উপবৃত্তের $(-1, 2)$ বিন্দুতে ;

(x) $\frac{x^2}{18}-\frac{y^2}{16}=1$ পরাবৃত্তের $(6, 4)$ বিন্দুতে ;

(xi) $2x^2-3y^2=6$ পরাবৃত্তের $(3, -2)$ বিন্দুতে ;

(xii) $x^2-y^2=4$ পরাবৃত্তের $(2\sqrt{2}, -2)$ বিন্দুতে ;

($xiii$) $xy=c^2$ পরাবৃত্তের $(ct, c/t)$ বিন্দুতে।

2. প্রদত্ত কনিকের নির্দিষ্ট বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ বাহির কর :

(i) $x^2+y^2=13$ বৃত্তের $(2, -3)$ বিন্দুতে ;

(ii) $x^2+y^2-2x-4y=0$ বৃত্তের $(3, 1)$ বিন্দুতে ;

(iii) $y^2=8x$ অধিবৃত্তের $(2, -4)$ বিন্দুতে ;

(iv) $x^2+8y=0$ অধিবৃত্তের $(4, -2)$ বিন্দুতে ;

(v) $x^2+3y^2=12$ উপবৃত্তের $(3, -1)$ বিন্দুতে ;

(vi) $3x^2-4y^2=23$ পরাবৃত্তের $(-3, 1)$ বিন্দুতে ;

(vii) $xy=c^2$ পরাবৃত্তের $(ct, c/t)$ বিন্দুতে।

3. $x^2+y^2=5$ বৃত্তের যে স্পর্শকটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত $45°$ কোণে নত তাহার সমীকরণ বাহির কর।

4. $y^2=8x$ অধিবৃত্তের যে স্পর্শকটি $y+3x=0$-এর সমান্তরাল তাহার সমীকরণ এবং স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [P. U. 1976 ; H. S. 1970]

5. দেখাও যে, $4x-2y+3=0$ সরলরেখাটি $y^2=12x$ অধিবৃত্তের একটি স্পর্শক। উহার স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক বাহির কর।

6. $3x+4y=12$ সরলরেখাটির সহিত লম্বভাবে অবস্থিত যে সরলরেখা $x^2+y^2+4x-6y-87=0$ বৃত্তের স্পর্শক তাহার সমীকরণ বাহির কর।

[Joint Ent. Ex. 1968]

7. k-এর মান কত হইলে, $4x+3y+k=0$ সরলরেখাটি $x^2+y^2+6x-2y-15=0$ বৃত্তের একটি স্পর্শক হইবে? উহার স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক বাহির কর।

8. দেখাও যে, $4x+3y-26=0$ সরলরেখাটি $x^2+y^2+4x-6y-12=0$ বৃত্তের একটি স্পর্শক। উহার স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক বাহির কর।

9. দেখাও যে, $x-y=5$ সরলরেখাটি $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ উপবৃত্তের একটি স্পর্শক। উহার স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক বাহির কর।

10. $5x+24y=0$ এর সমান্তরাল যে সরলরেখাটি $x^2+4y^2=1$ উপবৃত্তের স্পর্শক তাহার সমীকরণ বাহির কর। [Joint Ent. Ex. 1971 ; P. U. 1975]

11. $3x+y=2$ সরলরেখার সহিত লম্বভাবে অবস্থিত যে সরলরেখা $x^2+3y^2=4$ উপবৃত্তের স্পর্শক তাহার সমীকরণ বাহির কর।

12. $2x^2-3y^2=5$ পরাবৃত্তের যে স্পর্শকটি $8x-9y=0$ সরলরেখার সমান্তরাল তাহার সমীকরণ এবং স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক বাহির কর। [H. S. 1972]

13. $4x^2-9y^2=144$ পরাবৃত্তের যে স্পর্শকটি $6x+5y=21$ সরলরেখার উপর লম্ব তাহার সমীকরণ বাহির কর। [H. S. Comp. 1975]

14. $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের নাভিলম্বের প্রান্তবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ বাহির কর। দেখাও যে, স্পর্শক দুইটি পরস্পরের উপর লম্ব এবং উভয়েই অক্ষ ও নিয়ামকের ছেদবিন্দুগামী।

15. $3x^2-4y^2=12$ পরাবৃত্তের $(-4, -3)$ বিন্দুতে স্পর্শক এবং অভিলম্বের সমীকরণ বাহির কর। [P. U. 1976]

16. $x^2+y^2-4x-6y+3=0$ বৃত্তের যে অভিলম্ব $3y-x+9=0$ এর উপর লম্ব তাহার সমীকরণ বাহির কর।

17. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{18}=1$ উপবৃত্তের যে কোন নাভিলম্বের একটি প্রান্ত বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ বাহির কর।

18. $x+y+3=0$ সরলরেখাটি $3x^2-2y^2=10$ পরাবৃত্তকে যে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে সেই বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ বাহির কর। [H. S. 1975]

19. যে সরলরেখাটি $x^2+y^2=2$ বৃত্তের এবং $y^2=8x$ অধিবৃত্তের সাধারণ স্পর্শক তাহার সমীকরণ বাহির কর। [Joint Ent. Ex. 1976]

20. $y^2=4ax$ এবং $x^2=4by$ অধিবৃত্তদ্বয়ের সাধারণ স্পর্শকের সমীকরণ বাহির কর। [H. S. 1972]

21. প্রমাণ কর যে, $lx+my+n=0$ সরলরেখাটি $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শক হইবে, যদি $ln=am^2$.

22. দেখাও যে, $y=mx+am+\frac{a}{m}$ সরলরেখাটি $y^2=4a(x+a)$ অধিবৃত্তের স্পর্শক। [P. U. 1965]

23. যদি $y=mx+c$ সরলরেখা $y^2=4a(x+a)$ অধিবৃত্তের একটি স্পর্শক হয় তবে দেখাও যে, $c=ma+\frac{a}{m}$.

24. $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ সরলরেখাটি $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের একটি স্পর্শক হইলে, দেখাও যে, $p^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\sin \alpha$; উহার স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক বাহির কর। [P. U. 1972]

25. $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের $(am^2, 2am)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ বাহির কর। [P. U. 1970]

26. দেখাও যে, $y = mx - 2am - am^3$ সরলরেখাটি m এর যে কোন মানের জন্য $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের অভিলম্ব। ইহার পাদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক বাহির কর।

27. দেখাও যে, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তের ($a \sec \theta, b \tan \theta$) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ :

$$ax \tan \theta + by \sec \theta = (a^2 + b^2) \sec \theta \tan \theta.$$

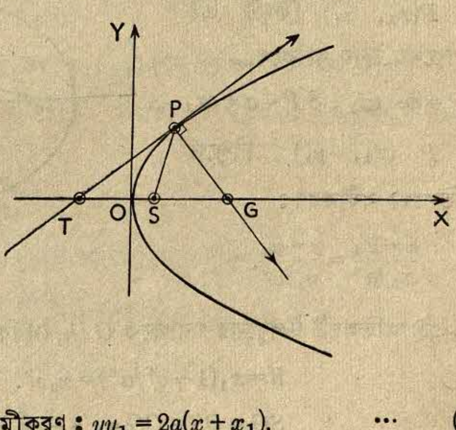
28. $lx + my = n$ সরলরেখাটি $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তের অভিলম্ব হইলে, দেখাও যে

$$\frac{a^2}{l^2} - \frac{b^2}{m^2} = \left(\frac{a^2 + b^2}{n}\right)^2.$$

8-6. কনিকের স্পর্শক এবং অভিলম্ব সম্বন্ধীয় জটিল প্রশ্ন :

[a] অধিবৃত্তের উপরিস্থিত P বিন্দুতে PT স্পর্শক, এবং PG অভিলম্ব, উহার অক্ষকে যথাক্রমে T এবং G বিন্দুতে ছেদ করিলে, এবং S বিন্দুটি উহার নাভি হইলে, দেখাও যে,

$ST = SG = PS.$



মনে করি, অধিবৃত্তের সমীকরণ :

$y^2 = 4ax.$ ... (1)

তাহা হইলে, S এর স্থানাঙ্ক : $S(a, 0)$.

$P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ : $yy_1 = 2a(x + x_1)$. ... (2)

T এর স্থানাঙ্ক $(\alpha, 0)$ হইলে, (2) হইতে, $0 = 2a(\alpha + x_1)$

অর্থাৎ, $\alpha = -x_1$.

$\therefore \quad ST^2 = (a - \alpha)^2 = (a + x_1)^2$;

বা, $ST = (a + x_1)$.

$P(x_1, y_1)$

$=2$ সরলরেখার সহিত লম্বভাবে অব

র্ক ... করণ বাহির কর। ... (3)

G বিন্দুর ... $(h, 0)$ হইলে যে স্পর্শক

$$0 - y_1 = \frac{-\ ...}{2a}(... - x_1)\ ;\quad \text{বা,}\quad h = 2a + x_1.$$

সুতরাং, $SG^2 = (2a + x_1 - a)^2 = (a + x_1)^2$;

বা, $SG = (a + x_1)$.

আবার, $SP^2 = (x_1 - a)^2 + y_1{}^2 = (x_1 - a)^2 + 4ax_1 = (a + x_1)^2$.

$$\therefore\ SP = (a + x_1).$$

তাহা হইলে, $ST = SG = SP$.

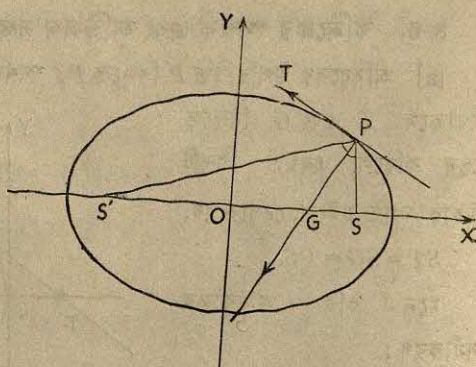
[b] উপবৃত্তের যে কোন বিন্দু P তে PG অভিলম্ব হইলে এবং S এবং S' উহার নাভিদ্বয় হইলে, দেখাও যে, PG সরলরেখাটি $\angle SPS'$ এর সমদ্বিখণ্ডক।

মনে করি, উপবৃত্তের সমীকরণ :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ ;\ (a > b > 0).$$

$P(x_1,\ y_1)$ বিন্দুটি এই উপবৃত্তের উপর থাকিলে,

$SP = a - ex_1$; $S'P = a + ex_1$.



$P\ (x_1,\ y_1)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ :

$$\frac{x - x_1}{x_1/a^2} = \frac{y - y_1}{y_1/b^2}.$$

এই অভিলম্বটি উপবৃত্তের পরাক্ষকে $G\ (h, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করিলে,

$$h = x_1(1 - b^2/a^2) = x_1e^2.\quad \therefore\ OG = x_1e^2.$$

$$\therefore\ SG = OS - OG = e(a - ex_1).$$

আবার, $S'G = OS' + OG = e(a + ex_1)$.

$$\therefore\ \frac{SG}{S'G} = \frac{a - ex_1}{a + ex_1} = \frac{SP}{S'P}.$$

সুতরাং, PG সরলরেখাটি $\angle S'PS$ এর সমদ্বিখণ্ডক।

উদাহরণ 1. দেখাও যে, $y^2=4ax$ এই অধিবৃত্তের যে দুইটি স্পর্শক $(-a, \beta)$ বিন্দুগামী তাহা এক সমকোণে অবস্থিত।

অধিবৃত্তের সমীকরণ ঃ

$$y^2=4ax. \qquad \cdots \qquad (1)$$

এখন, $$y=mx+\frac{a}{m} \qquad \cdots \qquad (2)$$

সরলরেখাটি, $m\,(\neq 0)$ এর যে কোন মানের জন্য, অধিবৃত্ত (1) এর সর্বদাই স্পর্শক। সরলরেখা (2) যদি $(-a, \beta)$ বিন্দুগামী হয়, তাহা হইলে,

$$\beta=-am+\frac{a}{m};$$

অর্থাৎ, $$am^2+\beta m-a=0. \qquad \cdots \qquad (3)$$

এই সমীকরণের m এর বীজদ্বয় m_1 এবং m_2 হইলে,

$$y=m_1x+\frac{a}{m_1} \text{ এবং } y=m_2x+\frac{a}{m_2} \qquad \cdots \qquad (4)$$

সরলরেখাদ্বয় (1) এর স্পর্শক হইবে এবং উহারা $(-a, \beta)$ বিন্দু-গামী হইবে ; যেখানে, (3) হইতে, $m_1m_2=-1$. সুতরাং, স্পর্শকদ্বয় লম্বভাবে অবস্থিত।

উদাহরণ 2. $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের $P(at_1{}^2, 2at_1)$ বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্ব পুনরায় অধিবৃত্তকে $Q(at_2{}^2, 2at_2)$ বিন্দুতে ছেদ করিলে, দেখাও যে,

$$t_1{}^2+t_1t_2+2=0.$$

আমরা জানি, $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ ঃ

$yy_1=2a(x+x_1)$, যাহার নতিমাত্রা $2a/y_1$; সুতরাং, (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ ঃ

$$y-y_1=-\frac{y_1}{2a}(x-x_1).$$

তাহা হইলে, $P(at_1{}^2, 2at_1)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ :

$$y-2at_1=-\frac{2at_1}{2a}(x-at_1{}^2);$$

$$\text{অর্থাৎ, } y=-t_1x+2at_1+at_1{}^3.$$

ইহা $Q(at_2{}^2, 2at_2)$ বিন্দুগামী হইলে,

$$2at_2=-at_1t_2{}^2+2at_1+at_1{}^3;$$
$$\text{বা, } 2(t_2-t_1)=t_1(t_1{}^2-t_2{}^2);$$
$$\text{বা, } (t_1-t_2)(t_1{}^2+t_1t_2+2)=0.$$

যেহেতু, $t_1=t_2$ হইতে পারে না,

$\therefore\ t_1\neq t_2.$ তাহা হইলে, $t_1{}^2+t_1t_2+2=0.$

উদাহরণ 3. যে বৃত্তের কেন্দ্র (3, 4) এবং $5x+12y+2=0$ সরলরেখাটি যাহার স্পর্শক সেই বৃত্তের সমীকরণ বাহির কর।

বৃত্তটির ব্যাসার্ধ a একক হইলে, কেন্দ্র হইতে, অর্থাৎ (3, 4) বিন্দু হইতে, $5x+12y+2=0$ সরলরেখাটির লম্ব-দূরত্ব a একক হইবে, অর্থাৎ,

$$a=\frac{5\times3+12\times4+2}{\sqrt{5^2+12^2}}=5.$$

সুতরাং, বৃত্তটির নির্ণেয় সমীকরণ : $(x-3)^2+(y-4)^2=5^2$;

অর্থাৎ, $x^2+y^2-6x-8y=0.$

উদাহরণ 4. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের যে স্পর্শকদ্বয় পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত তাহাদের ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ বাহির কর।

এখানে, উপবৃত্তটি : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$ ... (1)

এখন, m এর যে কোন মানের জন্য

$$y=mx+\sqrt{a^2m^2+b^2} \quad \cdots \quad (2)$$

সরলরেখাটি সর্বদাই উপবৃত্ত (1) এর স্পর্শক।

সেইরূপ, $(m\neq0)$,

$$y=-\frac{1}{m}x+\sqrt{a^2\left(-\frac{1}{m}\right)^2+b^2} \quad \cdots \quad (3)$$

সর্বদাই (1) এর স্পর্শক।

অধিকন্তু, (2) এবং (3) পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত। উহাদের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $P(h, k)$ হইলে,

$$k-mh=\sqrt{a^2m^2+b^2} \quad (2')$$

এবং, $mk+h=\sqrt{a^2+b^2m^2}$ ... $(3')$

$(2')$ এবং $(3')$ এর উভয়কে বর্গ করিয়া এবং পরে যোগ করিয়া পাই,

$$(k-mh)^2+(mk+h)^2=(a^2m^2+b^2)+(a^2+b^2m^2) ;$$

বা, $(h^2+k^2)(1+m^2)=(a^2+b^2)(1+m^2)$; $\quad 1+m^2\neq0.$

$\therefore\ h^2+k^2=a^2+b^2.$

সুতরাং, নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ :

$$x^2+y^2=a^2+b^2,$$

যাহা একটি বৃত্তের সমীকরণ। এই বৃত্তটিকে উপবৃত্তের **নিয়ামক বৃত্ত** (**Director Circle**) বলা হয়।

উদাহরণ 5. $P(5, 2)$ বিন্দু হইতে $2x^2+7y^2=14$ উপবৃত্তের দুইটি স্পর্শকের সমীকরণ বাহির কর এবং তাহাদের মধ্যবর্তী কোণের পরিমাপ নির্ণয় কর।

প্রদত্ত উপবৃত্তের সমীকরণ :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad \cdots \qquad (1)$$

যেখানে, $a^2=7$; $b^2=2$.

এখন, m এর যে কোন মানের জন্য,

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2},$$

অর্থাৎ, $y=mx\pm\sqrt{7m^2+2} \qquad \cdots \qquad (2)$

সর্বদাই উপবৃত্ত (1) এর স্পর্শক। আবার, (5, 2) বিন্দুটি (2) এর উপর থাকিলে,

$$2=5m\pm\sqrt{7m^2+2};$$

বা, $(2-5m)^2=7m^2+2$;

বা, $9m^2-10m+1=0$;

বা, $(9m-1)(m-1)=0$. $\qquad \therefore \quad m=1;\ \frac{1}{9}$.

$m=1$ হইলে, (2) হইতে পাই,

$$y=x+3 \text{ এবং } y=x-3.$$

কিন্তু, ইহাদের মধ্যে কেবলমাত্র $y=x-3$ সরলরেখাটি $P(5, 2)$ বিন্দুগামী।

$m=\frac{1}{9}$ হইলে, (2) হইতে পাই :

$$9y=x+13 \text{ এবং } 9y=x-13.$$

ইহাদের মধ্যে কেবলমাত্র $9y=x+13$ সরলরেখাটি $P(5, 2)$ বিন্দুগামী।

সুতরাং, নির্ণেয় স্পর্শকদ্বয় :

$$y=x-3 \text{ এবং } y=\tfrac{1}{9}x+\tfrac{13}{9}.$$

ইহাদের মধ্যবর্তী কোণের পরিমাপ α হইলে,

$$\tan\alpha=\frac{1-\frac{1}{9}}{1+\frac{1}{9}}=\frac{4}{5}.$$

$\therefore$ নির্ণেয় কোণের পরিমাপ : $\tan^{-1}(\frac{4}{5})$.

প্রশ্নমালা 17

1. $x^2+y^2=1$ এবং $x^2+y^2+2x+4y+1=0$ বৃত্তদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী যে বৃত্ত $x+2y+5=0$ সরলরেখাকে স্পর্শ করে তাহার সমীকরণ বাহির কর।
[Joint Ent. Ex. 1976]

2. দেখাও যে, $y^2=4x$ অধিবৃত্তে (1, 2), এবং (4, 4) বিন্দুতে অভিলম্বদ্বয় অধিবৃত্তের উপর একই বিন্দুতে মিলিত হইবে। [H. S. Comp. 1973]

3. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ $y=mx+\sqrt{a^2m^2-b^2}$ এই আকারে স্থাপন কর। এখান হইতে দেখাও যে, এই পরাবৃত্তের দুইটি পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত স্পর্শকের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্কের সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত। [P. U. 1971]

4. $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের দুইটি স্পর্শকের মধ্যবর্তী কোণের পরিমাপ 45° হইলে প্রমাণ কর যে, তাহাদের ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ : $y^2=x^2+6ax+a^2$.
[P. U. 1969]

5. (3, −2) বিন্দু হইতে $x^2+y^2=4$ বৃত্তের স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ বাহির কর এবং তাহাদের মধ্যবর্তী কোণের পরিমাপ নির্ণয় কর। [P. U. 1974]

6. মূল বিন্দু হইতে $x^2+y^2-6x-2y+9=0$ বৃত্তের দুইটি স্পর্শকের সমীকরণ বাহির কর। [P. U. 1976]

7. দেখাও যে, $x^2+y^2-4y+3=0$ এবং $x^2+y^2-10y+21=0$ বৃত্তদ্বয় বহিঃস্থভাবে পরস্পরকে স্পর্শ করে। উহাদের স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক এবং সাধারণ স্পর্শকের সমীকরণ বাহির কর। [H. S. Comp. 1974]

8. $y^2=12x$ অধিবৃত্তের যে স্পর্শকটি x-অক্ষ এবং y-অক্ষ উভয়ের সহিত 45° কোণ উৎপন্ন করে তাহার সমীকরণ বাহির কর।

9. $x^2+y^2-4x-6y-5=0$ এর সমকেন্দ্রীয় যে বৃত্ত $4x+3y-2=0$ সরলরেখাকে স্পর্শ করে তাহার সমীকরণ বাহির কর। [P. U. 1972]

10. একটি বৃত্ত মূলবিন্দুগামী এবং (5, 2) বিন্দুতে $3x-2y-11=0$ সরলরেখাকে স্পর্শ করে। ঐ বৃত্তের সমীকরণ বাহির কর। [H. S. 1973]

11. $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ উপবৃত্তের যে যে বিন্দুতে স্পর্শকগুলি x-অক্ষ এবং y-অক্ষ এর সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করে সেই সেই বিন্দুর স্থানাঙ্ক বাহির কর।
[H. S. 1972]

12. যে পরাবৃত্তের নাভিদ্বয় x-অক্ষের উপর মূলবিন্দু হইতে সমান দূরে অবস্থিত, যাহা $15x+16y-36=0$ সরলরেখাটিকে স্পর্শ করে এবং যাহার শীর্ষবিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব 8 একক, তাহার সমীকরণ বাহির কর। [Joint Ent. Ex. 1967]

13. $9x^2+16y^2=144$ উপবৃত্তের যে স্পর্শকটি দ্বারা x-অক্ষের এবং y-অক্ষের ধনাত্মক দিক হইতে ছেদিত অংশদ্বয় সমান, তাহার সমীকরণ বাহির কর।

14. যে বৃত্ত মূলবিন্দু হইতে $+12$ একক দূরে x-অক্ষকে স্পর্শ করে এবং y-অক্ষ হইতে 24 একক দীর্ঘ একটি জ্যা ছিন্ন করে, তাহার সমীকরণ বাহির কর।

[Joint. Ent. Ex. 1974]

15. দেখাও যে, উপবৃত্তের যে কোন বিন্দুতে স্পর্শক এবং উহার সহকারী বৃত্তের অনুরূপ বিন্দুতে স্পর্শক উপবৃত্তের পরাক্ষের উপর একই বিন্দুতে মিলিত হইবে।

[Joint Ent. Ex. 1973]

16. দেখাও যে, (5, 2) বিন্দুটি $2x^2+7y^2=14$ উপবৃত্তের বাহিরে অবস্থিত। (5, 2) বিন্দু হইতে এই উপবৃত্তের স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ বাহির কর এবং তাহাদের মধ্যবর্তী কোণের পরিমাপ নির্ণয় কর। [Joint Ent. Ex. 1972]

17. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তটি $5x-3y+9=0$ সরলরেখাকে স্পর্শ করে এবং এই পরাবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা 5/3. ইহার নাভিদ্বয়ের দূরত্ব এবং স্পর্শকের স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক বাহির কর। [Joint Ent. Ex. 1973]

18. যে বৃত্ত $x^2+y^2+2y-3=0$ বৃত্তের পরিধিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে, এবং $x-y=0$ সরলরেখাকে মূল বিন্দুতে স্পর্শ করে তাহার সমীকরণ বাহির কর।

[Joint Ent. Ex. 1975]

19. $y^2=8x$ এর একটি স্পর্শক $y=3x+5$ সরলরেখার সহিত 45° কোণ উৎপন্ন করে। এই স্পর্শকটির সমীকরণ বাহির কর।

20. উপবৃত্তের নাভিদ্বয় হইতে উহার একটি স্পর্শকের লম্ব দূরত্ব যথাক্রমে p এবং p' হইলে দেখাও যে, pp' একটি ধ্রুবক। [H. S. 1969]

21. প্রমাণ কর যে, $y^2=ax$ অধিবৃত্তের $(a/2, a/\sqrt{2})$ বিন্দুতে অভিলম্ব জ্যা-টি উহার শীর্ষ বিন্দুতে এক সমকোণ উৎপন্ন করে। [Joint Ent. Ex. 1974]

22. প্রমাণ কর যে, $x^2=12y$ এই অধিবৃত্তের একটি স্পর্শকের সমীকরণ $y=3(x-9)$; ইহার স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, স্পর্শবিন্দু ও অধিবৃত্তের নিয়ামক দ্বারা স্পর্শকটির ছেদিত অংশ অধিবৃত্তের নাভিতে এক সমকোণ উৎপন্ন করে। [H. S. 1975]

23. $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ উপবৃত্তের 'θ' বিন্দুতে স্পর্শক উহার সহকারী বৃত্তকে যে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে তাহাদের সংযোজক রেখাংশ উহার কেন্দ্রে এক সমকোণ উৎপন্ন করিলে, দেখাও যে, $\dfrac{1}{e^2}=1+\sin^2\theta.$ [Joint Ent. Ex. 1975]

24. $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের যে স্পর্শকদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের পরিমাপ 45°, তাহাদের ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ বাহির কর। [Joint Ent. Ex. 1966

25. বহিঃস্থ বিন্দু P হইতে $y^2=4ax$ এর স্পর্শকদ্বয় এক সমকোণে থাকিলে P বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ বাহির কর।

26. P বিন্দু হইতে $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের পরিমাপ 120° হইলে, দেখাও যে, P বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ : $x^2+y^2=4a^2/3$.

[P. U. 1964]

27. দেখাও যে, $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের $y=mx+a/m$ এবং $y=m'x+a/m'$ স্পর্শকদ্বয়ের ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ একটি সরলরেখা হইবে যদি mm' একটি ধ্রুবক হয়।

[P. U. 1965]

28. $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের P এবং Q বিন্দুতে স্পর্শকদ্বয় পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত। PQ এর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ বাহির কর।

29. $y^2=8x$ অধিবৃত্তের উপরিস্থিত যে কোন বিন্দু P-তে অঙ্কিত অভিলম্ব অধিবৃত্তের অক্ষকে G বিন্দুতে ছেদ করে। PG এর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ বাহির কর।

30. $P(x_1, y_1)$ বিন্দুটি $y^2=4ax$ এর উপর অবস্থিত। P বিন্দুতে অধিবৃত্তের স্পর্শক x-অক্ষকে T বিন্দুতে ছেদ করে। P বিন্দুর কোটি PN হইলে, দেখাও যে, TN, অধিবৃত্তের শীর্ষে সমদ্বিখণ্ডিত।

[H. S. 1974]

31. $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের নাভিগামী জ্যা-এর একটি প্রান্তবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(at^2, 2at)$ হইলে, দেখাও যে, উহার অপর প্রান্তবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(a/t^2, -2a/t)$. এখান হইতে দেখাও যে, নাভিগামী জ্যা-এর প্রান্তবিন্দুতে স্পর্শকদ্বয় নিয়ামকের উপর এক সমকোণে ছেদ করে।

[H. S. 1975]

32. $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের যে কোন বিন্দু $P(x', y')$-এতে অঙ্কিত অভিলম্ব এই অধিবৃত্তের অক্ষকে G বিন্দুতে ছেদ করে এবং P বিন্দুর কোটি PN হইলে, দেখাও যে, NG এর দৈর্ঘ্য একটি ধ্রুবক—যাহা অধিবৃত্তের নাভিলম্বের দৈর্ঘ্যের অর্ধেক।

[H. S. Comp. 1975]

33. দেখাও যে, $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের $P(at^2, 2at)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ $tx+y=at^3+2at$.

যদি এই অভিলম্বটি অধিবৃত্তের অক্ষকে G বিন্দুতে ছেদ করে এবং বর্ধিত GP হইতে $GP=PQ$ লওয়া হইয়া থাকে, তবে দেখাও যে, P বিন্দুর সঞ্চারপথ $y^2=16a(x+2a)$

[H. S. 1972]

34. $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের $(at_1{}^2, 2at_1)$ এবং $(at_2{}^2, 2at_2)$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক বাহির কর।

যদি এই অধিবৃত্তের লম্বভাবে অবস্থিত দুইটি স্পর্শক T বিন্দুতে ছেদ করে এবং অনুরূপ বিন্দুতে অভিলম্বদ্বয় N বিন্দুতে ছেদ করে, দেখাও যে, TN সরলরেখা অধিবৃত্তের অক্ষের সমান্তরাল।

[H. S. 1973]

পরিশিষ্ট—1

রূপান্তর

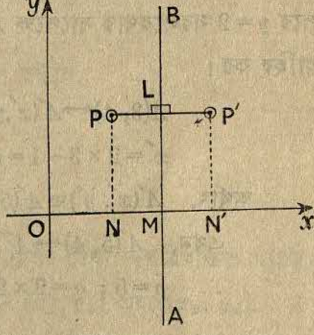
P-1 (a). প্রতিফলন :

(*i*) x-অক্ষের সাপেক্ষে $P(x, y)$ বিন্দুর প্রতিবিম্ব $P'(x', y')$ হইলে $x' = x$; $y' = -y$.

(*ii*) y-অক্ষের সাপেক্ষে $P(x, y)$ বিন্দুর প্রতিবিম্ব $P'(x', y')$ হইলে, $x' = -x$; $y' = y$.

(*iii*) $x = a$ সরলরেখার সাপেক্ষে $P(x, y)$ এর প্রতিবিম্ব $P'(x', y')$ হইলে,

$x' = 2a - x$; $y' = y$



চিত্রে, AB এর সমীকরণ ; $x = a$;

$ON = x$; $ON' = x'$;

$PN = y$; $P'N' = y'$.

এখন, যেহেতু, $P'N' = PN$;

স্থতরাং, $y' = y$.

আবার, $P'L = PL = OM - ON = a - x$; $(x < a)$.

এখন, $x' = ON' = OM + LP' = a + a - x = 2a - x$.

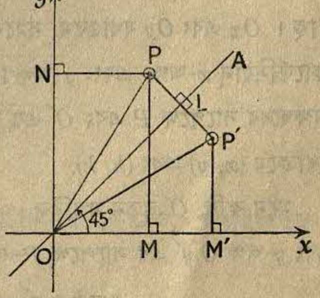
$x' = 2a - x$; $y' = y$.

(*iv*) $y = b$ সরলরেখার সাপেক্ষে $P(x, y)$ এর প্রতিবিম্ব $P'(x', y')$ হইলে,

$x' = x$; $y' = 2b - y$.

(*v*) $y = x$ সরলরেখার সাপেক্ষে $P(x, y)$ এর প্রতিবিম্ব $P'(x', y')$ হইলে,

$x' = y$; $y' = x$.



OA সরলরেখার সমীকরণ : $y = x$.

$OM = x$; $PM = y$;

$OM' = x'$; $P'M' = y'$.

$\triangle OPL$ এবং $\triangle OP'L$ সর্বসম বলিয়া,

$OP = OP'$; $\angle LOP = \angle LOP'$.

স্থতরাং, $\triangle ONP$ এবং $\triangle OM'P'$ সর্বসম।

$\therefore\ ON = OM'$ অর্থাৎ, $y = x'$;

এবং $PN = P'M'$ অর্থাৎ, $x = y'$.

সুতরাং, $x' = y$ এবং $y' = x$.

(*vi*) $y = -x$ সরলরেখার সাপেক্ষে $P(x, y)$ বিন্দুর প্রতিবিম্ব $P'(x', y')$ হইলে, $x' = -y$; $y' = -x$.

মন্তব্য : AB সরলরেখার সাপেক্ষে $P(x, y)$ বিন্দুর প্রতিবিম্ব $P'(x', y')$ হইলে, ঐ একই সরলরেখায় সাপেক্ষে P' এর প্রতিবিম্ব P হইবে। এইরূপক্ষেত্রে, সংক্ষেপে $P \leftrightarrow P'$ লেখা হয়। P বিন্দুর অবস্থানের এইরূপ পরিবর্তনই একরকম **রূপান্তর**।

উদাহরণস্বরূপ, $x = 3$ সরলরেখার সাপেক্ষে $A(1, 4)$ এর প্রতিবিম্ব A', এবং পরে $y = 2$ সরলরেখার সাপেক্ষে A' এর প্রতিবিম্ব $A''(p, q)$ হইলে, p এবং q এর মান বাহির কর।

$A(3, 4) \leftrightarrow A'(x', y')$ হইলে,

$x' = 2 \times 3 - 1 = 5$; $y' = 4$;

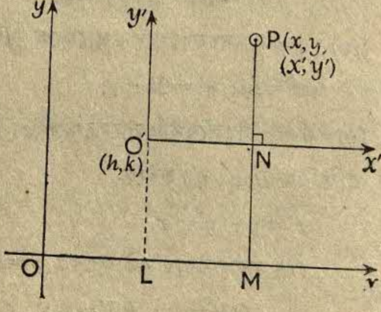
অর্থাৎ, $A'(x', y') \equiv A'(5, 4)$.

এখন, $A'(5, 4) \leftrightarrow A''(p, q)$.

$\therefore\ p = 5$; $q = 2 \times 2 - 4 = 0$;

P-1 (*b*). ঋজুসরণ :

আমরা জানি, কোন রূপান্তরের ফলে $P(x, y)$ এর রূপান্তর $P'(x', y')$ হইলে, যেখানে, $x' = x - h$; $y' = y - k$; এইরূপ রূপান্তরকে ঋজুসরণ বলা হয়।



এখন, মূলবিন্দু স্থানান্তরের মাধ্যমে এইরূপ রূপান্তরটিই আলোচনা করা যাক্। Ox এবং Oy যথাক্রমে, সমকৌণিক কার্তেসিয়ান্ x-অক্ষ এবং y-অক্ষ। এই অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে P এবং O' এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x, y) এবং (h, k).

মনে করি, O' নূতন মূলবিন্দু ; $O'x' \parallel Ox$; $O'y' \parallel Oy$. এই নূতন x-অক্ষ $O'x'$ এবং y-অক্ষ $O'y'$ এর সাপেক্ষে P-এর স্থানাঙ্ক (x', y') হইলে,

$x = h + x'$; $y = k + y'$.

অর্থাৎ, $x' = x - h$; $y' = y - k$.

সুতরাং, দেখা যাইতেছে, মূলবিন্দু O যদি O' বিন্দুতে স্থানান্তরিত হয়, তাহা হইলে, মূল স্থানাঙ্ক $P(x, y)$ এর পরিবর্তে $P(x', y')$ হইবে, যেখানে $x'=x-h$; $y'=y-k$.

এখন বলা যাইতে পারে, যেন মূলবিন্দু O স্থির আছে ; কিন্তু xOy সমতলে P বিন্দুটি P' বিন্দুতে স্থানান্তরিত হওয়ার পরে, নূতন অবস্থানে স্থানাঙ্ক $P'(x', y')$ হইয়াছে, যেখানে, $x'=x-h$; $y'=y-k$.

মন্তব্য ঃ ঋজুসরণের ফলে, $P(x, y)$ বিন্দুর অবস্থান $P'(x', y')$ হইলে, যেখানে $x'=x+a$; $y'=y+b$, এইরূপ রূপান্তরকে $P \to P'$ লেখা হয় ; এবং $x'=x+a$ ও $y'=y+b$ কে এই রূপান্তরের সমীকরণ বলা হয়।

উদাহরণ 1. ঋজুসরণের ফলে, $P(3, 4)$ বিন্দুর রূপান্তর $P'(4, -1)$ হইলে, ঋজুসরণের সমীকরণ নির্ণয় কর।

$x'=x+a$ এবং $y'=y+b$ নির্ণেয় সমীকরণ হইলে,

$$4=3+a\,; \qquad -1=4+b.$$

অর্থাৎ, $a=1$; $\qquad b=-5$.

$\therefore$ নির্ণেয় উত্তর ঃ $x'=x+1$; $y'=y-5$.

উদাহরণ 2. দেখাও যে, ঋজুসরণের ফলে, রেখাংশের দৈর্ঘ্য অপরিবর্তিত থাকে।

মনে করি, P_1 এবং P_2 বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2).

$$\therefore \quad P_1P_2=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

ধরি, ঋজুসরণের সমীকরণ ঃ

$$x'=x+c_1\,; \qquad y'=y+c_2.$$

এই রূপান্তরের ফলে, P_1 এবং P_2 এর প্রতিবিম্ব যথাক্রমে $P_1'(x_1', y_1')$ এবং $P_2'(x_2', y_2')$ হইলে,

$$x_1'=x_1+c_1\,; \qquad y_1'=y_1+c_2\,;$$

$$x_2'=x_2+c_1\,; \qquad y_2'=y_2+c_2.$$

$$\therefore \quad P_1'P_2'=\sqrt{(x_1'-x_2')^2+(y_1'-y_2')^2}$$

$$=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

$$=P_1P_2.$$

উদাহরণ 3. দেখাও যে, ঋজুসরণের ফলে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল অপরিবর্তিত থাকে।

মনে করি, ABC ত্রিভুজের A, B, C এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে, (x_1, y_1) ; (x_2, y_2) ; (x_3, y_3).

$\therefore \quad \triangle ABC$ (ক্ষেত্রফল)

$= \frac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}$

ধরি, ঋজুসরণের সমীকরণ :

$x' = x + c_1$ এবং $y' = y + c_2$.

এই রূপান্তরের ফলে, A, B, C এর অবস্থান যথাক্রমে, $A'(x_1', y_1')$; $B'(x_2', y_2')$; $C'(x_3', y_3')$ হইলে,

$x_1' = x_1 + c_1$; $\qquad y_1' = y_1 + c_2$;

$x_2' = x_2 + c_1$; $\qquad y_2' = y_2 + c_2$;

$x_3' = x_3 + c_1$; $\qquad y_3' = y_3 + c_2$.

$\therefore \quad \triangle A'B'C'$ (ক্ষেত্রফল)

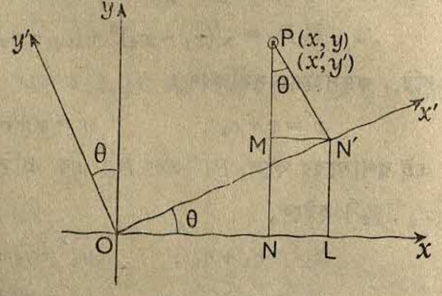
$= \frac{1}{2}\{x_1'(y_2' - y_3') + x_2'(y_3' - y_1') + x_3'(y_1' - y_2')\}$

$= \frac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}$

$= \triangle ABC$ (ক্ষেত্রফল)।

P-1 (*c*). ঘূর্ণন :

ঘূর্ণন সম্বন্ধে প্রাথমিক ধারণা পূর্বেই দেওয়া হইয়াছে। ঘূর্ণনের ফলে বিন্দুর অবস্থান পরিবর্তনকে উহার রূপান্তর বলা হয়। এখন মূল বিন্দুকে স্থির রাখিয়া অক্ষদ্বয়ের আবর্তনের মাধ্যমে ঘূর্ণন আলোচনা করা যাক্।



মনে করি, Ox এবং Oy যথাক্রমে সমকৌণিক কার্তেসিয়ান্ x-অক্ষ এবং y-অক্ষ এবং উহাদের সাপেক্ষে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y).

ধরা যাক্, Ox' এবং Oy' যথাক্রমে সমকৌণিক কার্তেসিয়ান্ x'-অক্ষ, এবং y'-অক্ষ, যেখানে $x\hat{O}x' = \theta$; $y\hat{O}y' = \theta$ এবং Ox, Oy, Ox', Oy' একই সমতলে অবস্থিত। Ox', Oy' এর সাপেক্ষে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x', y'). $PN \perp Ox$; $PN' \perp Ox'$; $N'L \perp Ox$, $N'M \perp PN$.

তাহা হইলে, $N'\widehat{P}M = \theta$; $ON = x$; $PN = y$; $ON' = x'$; $PN' = y'$.

এখন, $x = ON = OL - NL = OL - MN' = x' \cos\theta - y' \sin\theta$;

$$y = PN = MN + PM = NL + PM$$
$$= x' \sin\theta + y' \cos\theta.$$

$$\therefore \quad x = x' \cos\theta - y' \sin\theta \quad \cdots \quad (1)$$
$$y = x' \sin\theta + y' \cos\theta \quad \cdots \quad (2)$$

(1) এবং (2) হইতে পাই,

$$x \cos\theta + y \sin\theta$$
$$= (x' \cos\theta - y' \sin\theta) \cos\theta + (x' \sin\theta + y' \cos\theta) \sin\theta$$
$$= x'(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = x' ;$$
$$x \sin\theta - y \cos\theta$$
$$= (x' \cos\theta - y' \sin\theta) \sin\theta - (x' \sin\theta + y' \cos\theta) \cos\theta$$
$$= -y'(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = -y'.$$

$$\therefore \quad \left.\begin{array}{l} x' = x \cos\theta + y \sin\theta \\ y' = -x \sin\theta + y \cos\theta \end{array}\right\} \quad \cdots \quad (3)$$

যেখানে $\sin\theta \neq 0$; $\cos\theta \neq 1$.

তাহা হইলে,

$$\left.\begin{array}{l} x' = ax + by \\ y' = -bx + ay \end{array}\right\} ; \quad \cdots \quad (4)$$

যেখানে $b = \sin\theta \neq 0$; $a = \cos\theta \neq 1$ এবং $a^2 + b^2 = 1$.

এখান হইতে বলা যাইতে পারে, ঘূর্ণনের ফলে $P(x, y)$ এর স্থানাঙ্ক $P'(x', y')$ হইলে, সাধারণভাবে, $x' = ax + by$, $y' = -bx + ay$, $a = \cos\theta$, $b = \sin\theta$; $\angle POP' = \theta$,

যেখানে $a \neq 1$, $b \neq 0$; কিন্তু $a^2 + b^2 = 1$.

ঘূর্ণনের ফলে, $P(x, y)$ বিন্দু $P'(x', y')$ বিন্দুতে স্থানান্তরিত হইলে, ইহাকে সংক্ষেপে $P \rightarrow P'$ লেখা হয়।

$x' = ax + by$ এবং $y' = -bx + ay$ কে ঘূর্ণনের সমীকরণ বলা হয়।

সাধারণভাবে, ঘূর্ণনের সমীকরণ :

$$\left.\begin{array}{l} x' = ax + by + c_1 \\ y' = -bx + ay + c_2 \end{array}\right\}, \ a \neq 1, b \neq 0, a^2 + b^2 = 1.$$

মন্তব্য : (*i*) মনে করা যাক, ঘূর্ণনের সমীকরণ :

$$\left.\begin{array}{l} x' = ax + by, \\ y' = -bx + ay \end{array}\right\}, \ a^2 + b^2 = 1, a \neq 1, b \neq 0.$$

এই ঘূর্ণনের ফলে, $P(x, y)$ বিন্দুটি স্থির থাকিলে,

$$x = ax + by \; ; \qquad y = -bx + ay.$$

$$\therefore \quad (a-1)x + by = 0 \; ;$$

এবং $\quad -bx + (a-1)y = 0.$

$$\therefore \quad \{(a-1)^2 + b^2\}x = 0.$$

কিন্তু, $b \neq 0$; $\qquad a \neq 1. \qquad \therefore \quad x = 0.$

তাহা হইলে, $y = 0.$

সুতরাং, ঘূর্ণনের ফলে, (0, 0) বিন্দুটি অর্থাৎ মূল বিন্দু স্থির ; এখানে মূলবিন্দু ঘূর্ণনের কেন্দ্র।

(*ii*) মনে করা যাক্‌, ঘূর্ণনের সমীকরণ :

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax + by + c_1 \\ y' &= -bx + ay + c_2 \end{aligned}\right\}, \; a^2 + b^2 = 1, \; a \neq 1, \; b \neq 0$$

এবং $P(x, y)$ বিন্দুটি স্থির।

তাহা হইলে,

$$x = ax + by + c_1 \; ;$$

$$y = -bx + ay + c_2.$$

অর্থাৎ, $\quad (a-1)x + by + c_1 = 0 \; ;$

$$-bx + (a-1)y + c_2 = 0.$$

$$\therefore \quad \frac{x}{bc_2 - (a-1)c_1} = \frac{y}{-bc_1 - (a-1)c_2} = \frac{1}{(a-1)^2 + b^2}$$

$$\therefore \quad x = \frac{bc_2 - (a-1)c_1}{(a-1)^2 + b^2} \; ; \quad y = \frac{-bc_1 - (a-1)c_2}{(a-1)^2 + b^2}.$$

এইরূপ ক্ষেত্রে, ঘূর্ণনকেন্দ্র (h, k), যেখানে,

$$h = \frac{bc_2 - (a-1)c_1}{(a-1)^2 + b^2} \; ; \quad k = \frac{-bc_1 - (a-1)c_2}{(a-1)^2 + b^2}.$$

উদাহরণ 1. ঘূর্ণনের ফলে $P(x, y)$ বিন্দুর অবস্থান $P'(x', y')$ হইলে, যেখানে ঘূর্ণনের সমীকরণ :

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= -bx + ay \end{aligned}\right\} \; a^2 + b^2 = 1, \; a \neq 1, \; b \neq 0 \; ;$$

ঘূর্ণন কোণের পরিমাপ বাহির কর।

আমরা জানি, ঘূর্ণনের সমীকরণ :

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= -bx + ay \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} a^2 + b^2 = 1,\ a \neq 1,\ b \neq 0 \\ \text{হইলে, ঘূর্ণনকেন্দ্র মূল বিন্দুই।} \end{array}$$

তাহা হইলে, $\overrightarrow{OP}$ এর নতিমাত্রা : y/x, এবং $\overrightarrow{OP'}$ এর নতিমাত্রা : y'/x'

অর্থাৎ, $\dfrac{-bx+ay}{ax+by}$.

এখন, $\widehat{POP'} = \theta$ হইলে,

$$\tan\theta = \frac{y'/x' - y/x}{1 + y'/x' \cdot y/x}$$

$$= \frac{\dfrac{-bx+ay}{ax+by} - \dfrac{y}{x}}{1 + \dfrac{-bx+ay}{ax+by} \cdot \dfrac{y}{x}}$$

$$= \frac{-bx^2 + axy - axy - by^2}{ax^2 + bxy - bxy + ay^2}$$

$$= \frac{-b(x^2+y^2)}{a(x^2+y^2)} = -b/a.$$

$\therefore$ ঘূর্ণন কোণের পরিমাপ $= \theta = \tan^{-1}(-b/a)$.

মন্তব্য : ঘূর্ণনের সমীকরণ :

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax + by + c_1 \\ y' &= -bx + ay + c_2 \end{aligned}\right\} a^2 + b^2 = 1,\ a \neq 1, b \neq 0$$

হইলে, অনুরূপ পদ্ধতিতে ঘূর্ণন কোণের পরিমাপ নির্ণয় করা যাইবে।

উদাহরণ 2. দেখাও যে, ঘূর্ণনের ফলে যে কোন দুইটি বিন্দুর দূরত্ব অপরিবর্তিত থাকে।

মনে করি, $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ দুইটি বিন্দু। তাহা হইলে,

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

ধরা যাক, ঘূর্ণনের সমীকরণ :

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= -bx + ay \end{aligned}\right\} a^2 + b^2 = 1,\ a \neq 1,\ b \neq 0.$$

এবং এই ঘূর্ণনের ফলে, P এবং Q এর নূতন অবস্থান যথাক্রমে $P'(x'_1, y'_1)$ এবং $Q'(x'_2, y'_2)$. তাহা হইলে,

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= ax_1 + by_1 \\ y_1' &= -bx_1 + ay_1 \end{aligned}\right\}; \quad \left.\begin{aligned} x_2' &= ax_2 + by_2 \\ y_2' &= -bx_2 + ay_2 . \end{aligned}\right\}$$

$$\therefore \quad P'Q' = \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2}$$
$$= \sqrt{\{ax_2 + by_2) - (ax_1 + by_1)\}^2 + \{(ay_2 - bx_2) - (ay_1 - bx_1)\}^2}$$
$$= \sqrt{(a^2 + b^2)(x_2 - x_1)^2 + (a^2 + b^2)(y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = PQ.$$

উদাহরণ 3. দেখাও যে, ঘূর্ণনের ফলে দুইটি সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণের পরিমাপ অপরিবর্তিত থাকে।

মনে করি, AB এবং LM সরলরেখাদ্বয়ের সমীকরণ যথাক্রমে, $lx + my + n = 0$ এবং $l_1 y + m_1 x + n_1 = 0$. ইহাদের মধ্যবর্তী কোণের পরিমাপ θ হইলে,

$$\tan\theta = \frac{lm_1 - l_1 m}{ll_1 + mm_1}.$$

মনে করা যাক, ঘূর্ণনের সমীকরণ :

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= -bx + ay \end{aligned}\right\} \quad a^2 + b^2 = 1, \ a \neq 1, \ b \neq 0.$$

এবং এই ঘূর্ণনের ফলে, AB এবং LM এর নূতন অবস্থান যথাক্রমে $A'B'$ এবং $L'M'$ এবং ইহাদের সমীকরণ যথাক্রমে, $lx' + my' + n = 0$ এবং, $l_1 x' + m_1 y' + n_1 = 0$

অর্থাৎ, $l(ax + by) + m(-bx + ay) + n = 0$

এবং, $l_1(ax + by) + m_1(-bx + ay) + n_1 = 0$

বা, $(al - bm)x + (bl + am)y + n = 0$

এবং, $(al_1 - bm_1)x + (bl_1 + am_1)y + n_1 = 0$

এখন, $A'B'$ এবং $L'M'$ এর অন্তর্গত কোণের পরিমাপ ϕ হইলে,

$$\tan\phi = \frac{(al - bm)(bl_1 + am_1) - (al_1 - bm_1)(bl + am)}{(al - bm)(al_1 - bm_1) + (bl + am)(bl_1 + am_1)}$$
$$= \frac{(a^2 + b^2)lm_1 - (a^2 + b^2)l_1 m}{(a^2 + b^2)ll_1 + (a^2 + b^2)mm_1}$$
$$= \frac{lm_1 - l_1 m}{ll_1 + mm_1} = \tan\theta. \qquad \therefore \quad \phi = \theta.$$

সুতরাং, ঘূর্ণনের ফলে দুইটি সরলরেখার অন্তর্গত কোণের পরিমাপ অপরিবর্তিত থাকে।

সাধারণ মন্তব্য :

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax + by + c_1 \\ y' &= -bx + ay + c_2 \end{aligned}\right\} \qquad \cdots \qquad (1)$$

সমীকরণে, $a = 1$, $b = 0$ হইলে ইহারা ঋজুসরণের সমীকরণ হইবে।

কিন্তু $a \neq 1, b \neq 0$ হইলে, ইহারা ঘূর্ণনের সমীকরণ হইবে।

প্রশ্নমালা 18

1. প্রথমে $y=4$ এর সাপেক্ষে এবং পরে $x=3$ এর সাপেক্ষে পরপর দুইবার প্রতিফলনে $P(5, 7)$ এর প্রতিবিম্ব নির্ণয় কর।

2. $y=x$ সরলরেখার সাপেক্ষে $P(3, 4)$ এবং $Q(-3, 4)$ এর প্রতিবিম্ব বাহির কর।

3. (a) কোন সরলরেখার সাপেক্ষে $P(3, 5)$ বিন্দুর প্রতিবিম্ব $P'(3, 10)$ হইলে, প্রতিফলন অক্ষের সমীকরণ বাহির কর।

(b) $P(3, 5)$ এর প্রতিবিম্ব $P'(-7, -5)$ হইলে, প্রতিফলন অক্ষ কি হইবে?

4. দেখাও যে, ঋজুসরণের ফলে তিনটি বিন্দুর একরৈখিকতা অপরিবর্তিত থাকে।

5. ঋজুসরণের ফলে AB রেখাংশের নূতন অবস্থান $A'B'$ হইলে দেখাও যে, AB এবং $A'B'$ সমান্তরাল থাকিবে।

6. দেখাও যে, ঘূর্ণনের ফলে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল অপরিবর্তিত থাকে।

7. প্রমাণ কর, ঘূর্ণনের ফলে, দুইটি বিন্দুর দূরত্ব অপরিবর্তিত থাকে।

8. দেখাও যে, ঋজুসরণের ফলে দুইটি সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণের পরিমাপ অপরিবর্তিত থাকে।

9. দেখাও যে, প্রথমে $x=0$ এর সাপেক্ষে প্রতিফলন এবং পরে $y=0$ এর সাপেক্ষে প্রতিফলন মূলবিন্দুর সাপেক্ষে অর্ধ-ঘূর্ণনের সমতুল্য।

10. প্রথমে $y=k$ অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিফলন এবং পরে $x=h$ অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিফলন (h, k) বিন্দুর সাপেক্ষে অর্ধঘূর্ণনের সমতুল্য, তাহা দেখাও।

11. x-অক্ষের সাপেক্ষে $A(5, 4)$ এর প্রতিবিম্ব A' এবং পরে y-অক্ষের সাপেক্ষে A' এর প্রতিবিম্ব A'' হইলে A'' এর স্থানাঙ্ক বাহির কর; মূলবিন্দুর সাপেক্ষে অর্ধ ঘূর্ণনের ফলে A এর নূতন অবস্থান A_1 হইলে দেখাও যে, $A_1 \equiv A''$.

12. মূলবিন্দুর সাপেক্ষে ঘূর্ণনের ফলে A এবং B এর নূতন অবস্থান যথাক্রমে A' এবং B' হইলে, এবং $AP : PB = m : n$ হইলে, দেখাও যে, $A'P' : P'B' = m : n$ যেখানে একই ঘূর্ণনে P এর নূতন অবস্থান P'.

পরিশিষ্ট—2
কনিক্

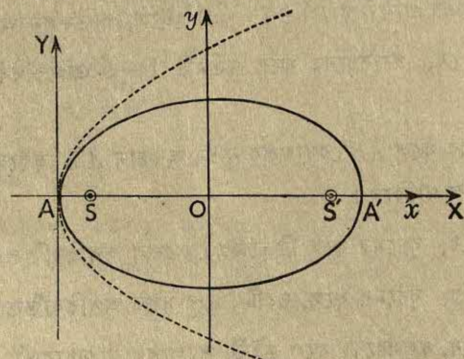
P-2. (a) উপবৃত্তের সমীকরণ হইতে বৃত্তের সমীকরণ ঃ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad (a>b>0) \; ; \quad \cdots \quad (1)$$

যেখানে, $b^2=a^2(1-e^2)$; নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক ঃ $(\pm ae, 0)$.

মনে করা যাক্, a সর্বদা ধ্রুবক থাকে কিন্তু e ক্রমশঃ 0 (শূন্য) এর দিকে অগ্রসর হইতে থাকিয়া শেষ অবস্থায় প্রায় 0 (শূন্য) হইলে, $b=a$ হইবে, এবং তখন (1) এর সমীকরণ $x^2+y^2=a^2$ হইবে, যাহা বৃত্তের সমীকরণ।

P-2. (b) উপবৃত্তের সমীকরণ হইতে অধিবৃত্তের সমীকরণ ঃ



উপবৃত্তের সমীকরণ ঃ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad (a>b>0) \; ; \quad \cdots \quad (1)$$

$$b^2=a^2(1-e^2) \; ; \; (e^2<1) \quad \cdots \quad (2)$$

$A(-a, 0)$ কে নূতন মূলবিন্দু, AS কে নূতন X-অক্ষ এবং AY কে নূতন Y-অক্ষ ধরিলে উপবৃত্তের সমীকরণ ঃ

$$\frac{(X-a)^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1 \; ; \quad \text{বা,} \quad \frac{X^2}{a}-2X+\frac{Y^2}{a(1-e^2)}=0. \quad \cdots \quad (3)$$

ধরা যাক্, $a(1-e)=k$; তাহা হইলে, $AS=k$ এবং $a=\dfrac{k}{1-e}$.

এখন, (3) হইতে পাই, $$\frac{Y^2}{k(1+e)}-2X+\frac{(1-e)}{k}X^2=0 \quad \cdots \quad (4)$$

মনে করা যাক্, e ক্রমশঃ 1 এর নিকটবর্তী হইতে থাকিল, অথচ k এর মান সর্বদা একই ধ্রুবক রাশি থাকিলে। তাহা হইলে a ক্রমশঃ অসীমের দিকে অগ্রসর হইতে থাকিবে ; সুতরাং, পরিশেষে (ultimately) e যখন প্রায় 1 এর খুব নিকটবর্তী হইবে, তখন (4) হইতে পাই ;

$$Y^2=4kX, \quad \cdots \quad (5)$$

যাহা একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ।

CO-ORDINATE GEOMETRY

উত্তরমালা

প্রশ্নমালা 1. (পৃষ্ঠা—8)

2. $AB = CD = 5$ একক ; $BC = DA = 7$ একক ; $AC = BD = 8{\cdot}6$ একক ;

4. $PQ = 5\sqrt{2}$ একক ; $\angle QOP = 90°$.

5. (i) $(4, -\pi/4)$; (ii) $(2, 5\pi/6)$, (iii) $(5, -5\pi/6)$.

6. (i) $(3\sqrt{2}/2, 3\sqrt{2}/2)$; (ii) $(-2, -2\sqrt{3})$; (iii) $(-3\sqrt{3}, 3)$.

7. (i) $r = 2a \cos\theta$; (ii) $r^2 \cos 2\theta = 4$; (iii) $r^2 \sin 2\theta = 2c^2$.

8. (i) $x^2 + y^2 = ax$; (ii) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$;
   (iii) $(2x^2 + 2y^2 + ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$.

10. $A(X, Y) \equiv (3, 4)$; $P(X, Y) \equiv (-5, 3)$

11. $P(X, Y) \equiv (-5, -3)$; $Q(X, Y) \equiv (-1, -1)$,
    $R(X, Y) \equiv (3, 8)$.

12. (i) $3X + 4Y + 11 = 0$; (ii) $X^2 + Y^2 = 9$;
    (iii) $Y^2 = 4X$; (iv) $X^2 - 3Y^2 = 1$.

প্রশ্নমালা 2 (পৃষ্ঠা—23)

1. (i) 5 একক ; (ii) 5 একক ; (iii) $2\sqrt{34}$ একক ;
   (iv) $\sqrt{34}$ একক ; (v) $2a \sin \frac{1}{2}(\alpha \sim \beta)$ একক ;

3. 7 বা 1. 4. (4, 5), 5. $\sqrt{3}$ বর্গ একক।

6. $a^2.\sqrt{3}$ বর্গ একক ; 7. $(\frac{1}{3}, 2)$. 8. 10 একক ;

10. (a) $BC = a\sqrt{(5 - 2\sqrt{3})}$ একক ; $CA = a\sqrt{5}$ একক ;
    $AB = a\sqrt{3}$ একক ;
    (b) $BC = a$ একক ; $CA = 2a$ একক, $AB = a\sqrt{3}$ একক.

12. $(2 + \sqrt{3}, 5)$ 13. পরিকেন্দ্র : (11, 2) ; পরিব্যাসার্ধ = 10 একক.

19. (1, 1) ; 20. $(5\sqrt{3}/2, \pi/2)$

21. $AD = \sqrt{10}$ একক ; $BE = 10$ একক ; $CF = \sqrt{130}$ একক.

22. (i) (2, 2) ; (ii) (3, 6), (iii) (3, 0).

23. (a) (i) অন্তর্বিভাজন : $K(33/5, -7/5)$,
(ii) বহির্বিভাজন : $K(9, -23)$;
(b) (i) অন্তর্বিভাজন : $K(9, -2)$
(ii) বহির্বিভাজন : $K(21, -26)$

24. (i) অন্তর্বিভাজন : $K(-1, 0)$;
(ii) বহির্বিভাজন : $K=(-31, -15)$.

25. $K(1, -1)$; $L(4, -2)$. 26. $(3, -1)$,

27. $C(-4, 5)$; 28. 4 : 3 ; 29. 3 : 2 ;

30. (i) 28 বর্গ একক ; (ii) 46 বর্গ একক ;
(iii) $\frac{1}{2} a^2 \sin (\alpha \sim \beta)$.

31. 4 বর্গ একক ; 32. $\triangle ABC = 37\cdot5$ বর্গ একক ; $AN = 5$ একক ;

33. (i) 206 বর্গ একক ; (ii) 20·5 বর্গ একক ।

34. $9\sqrt{3}/4$ বর্গ একক ; 35. $\frac{1}{2}(21-6\sqrt{3})$ বর্গ একক ;

36. (ii) সমরেখ নহে । 38. (ii) $K=3$;

40. 2 : 3 ; 41. 11 : 47 ;

প্রশ্নমালা 3 (পৃষ্ঠা—31)

1. y-অক্ষ ; 2. $P(4, 0)$, $Q(6, -4)$, $R(9, -2)$.

3. $A'(-2, 4)$; $B'(-7, 4)$, $C'(-7, 9)$, $D'(-2, 9)$;

4. $P(2, 2)$, $Q(8, 2)$, $R(10, 5)$, $S(4, 5)$.

5. $A'(0, -5)$; 6. $P'(3, 5)$

7. $A'(4, 0)$; $B'(-4, 9)$; $A'B$;

8. $A(-3, 7)$; $B(2, -3)$; $C(-5, -2)$.

প্রশ্নমালা 4 (পৃষ্ঠা—34)

1. $A'(0, 3)$; $B'(7, 6)$; 2. $A(-4, 1)$; $B(3, 5)$

3. $B'(9, 3)$; $C'(9, 8)$; $D'(4, 8)$.

4. $A'(0, 2)$; $B'(3, 5)$; $C'(0, 8)$; $D'(7, 5)$. 5. 9 একক.

প্রশ্নমালা 5 (পৃষ্ঠা—38)

1. $P(-3, -5)$; 2. $A'(-2\sqrt{3}, -2)$; $B'(-1, -\sqrt{3})$;
$C'(-5/2, -5\sqrt{3}/2)$ 3. $A'(0, 5)$; $B'(-2, 2\sqrt{3})$.

4. $A'(-3, 4)$; $B'(-3, 7)$; $C'(-6, 7)$; $D'(-6, 4)$.

5. $Q(7/2, (6+3\sqrt{3})/2)$; 6. $A(8, 2)$; 7. $\theta=\pi/6$;

8. $90°$; 9. $h=(6+\sqrt{3})/3$; $k=5$; $\theta=120°$.

প্রশ্নমালা 6 (পৃষ্ঠা—41)

1. $3x+5y=4$; 2. $x^2+y^2-5x+4=0$ 3. $x^2+y^2=c^2-a^2$;

4. $5x^2+9y^2-36x-54y+117=0$;

5. $5(x^2+y^2)-60x-56y+128=0$;

6. $x+y=9$, বা, $x+y+3=0$.

7. $3(x^2+y^2)-8x-20y+37=0$; 8. $3x=5y+13$,

9. $x+y=5$, 10. $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=2$, 11. $x+6y=23$,

বা, $x+6y+1=0$, 12. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

প্রশ্নমালা 7 (পৃষ্ঠা—60)

1. (i) $3x-2y=1$; (ii) $x+2y=10$;

(iii) $3x+5y+15=0$; (iv) $(a-2b)x-by=a^2-2ab-b^2$;

(v) $x\sin\theta=y\cos\theta$; (vi) $(t_1+t_2)y=2(x+at_1t_2)$

(vii) $x\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+y\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=a\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$.

(viii) $x+yt_1t_2=c(t_1+t_2)$.

2. নতিমাত্রা $=-1$; স্থানাঙ্ক : $(-1, 0)$.

3. $y=x\sqrt{3}+(4+3\sqrt{3})$; 4. $x+2y=7$; $7\sqrt{5}/2$ একক ;

5. $3x+4y+25=0$; 5 একক ; 6. $x+y+4=0$; $2\sqrt{2}$ একক ;

7. $5x+3y=15$; 8. $x+y=1$.

9. $x-y+1=0$; 10. $4x-5y+20=0$; নতিমাত্রা $=4/5$.

11. (i) $9x-40y+192=0$; $4\frac{28}{41}$ একক.

বা, (ii) $5x-8y+64=0$; $\frac{64}{89}\sqrt{89}$ একক.

12. $5x+3y=30$; $\frac{15}{17}\sqrt{34}$ একক, 13. $x+y=3$,

14. $2x+3y=0$; $-2/3$, 15. $x-y=0$,

16. $3x+y-5=0$, 17. $y=x$,

18. $23x+23y=11$ বা, $23x-23y+5=0$.

19. $85\sqrt{2}/2$ একক ; 20. $xy+c^2=0$,

21. $x+2y=2a$; $5a^2/2$ বর্গ একক, 22. $x+y=5$,

23. $9x-2y+1=0$, 24. সমরেখ নহে,

25. $OL=3$, $OM=-3/2$, $LM=3\sqrt{5}/2$ একক,

26. $a=2$, 29. $(2, 2)$,

30. পরিকেন্দ্র : $(5, 7)$; পরিব্যাসার্ধ : 5 একক ;

31. $p\cos(\theta-\beta)=q\cos(\theta-\alpha)$. 33. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

প্রশ্নমালা 8 (পৃষ্ঠা—71)

1. (i) 45°, (ii) 45°, (iii) 90°, (iv) $\tan^{-1}(7/2)$ (v) $\tan^{-1}(23/10)$; (vi) 30°, (vii) 30°, (viii) 60°, (ix) 45°.

2. (i) 90°, (ii) 90°, (iii) 45°, (iv) 30°, (v) $\tan^{-1}(3/4)$, (vi) 60°.

3. 90°, 45°, 45° ; 4. 60°, 60°, 60°.

5. 75°, 75°, 30° ; 6. $3x-7y+47=0$;

7. $5x+2y=31$; 8. $x+2y=4$, $15/16$ বর্গ একক।

9. $5x-4y=3$, $3/\sqrt{41}$ একক ; 10. $4y=x+2$;

11. $x+2y=10$, $2\sqrt{5}$ একক ; 12. $3x+4y=4$;

13. $119x+34y-27=0$; 14. $x-y+6=0$;

15. RN : $10x+3y+11=0$, RT : $3x-10y+145=0$.

16. $a=17/4$, $b=17/3$, 17. 5 একক ; 18. $(3, 5)$;

19. $h=6$, $k=-1$; 20. $3y-x+6=0$; $3x+y=8$;

21. $y+2=0$; $y=x\sqrt{3}-(2+3\sqrt{3})$; 22. $8\sqrt{\frac{2}{13}}$ একক ;

23. 60° ; 25. $(3, -2)$,

26. $x-7y+12=0$, $7x+y-16=0$; 27. $y-x=0$, $y+x=40/9$;

29. $3x+2y=\pm 28$; 30. $3x+y=8$;

31. $4x+11y+6=0$; $2x-3y=14$;

32. $(h, k)\equiv(8, 3)$; $\tan^{-1}(\frac{4}{3})$; $\pi-\tan^{-1}(\frac{4}{3})$,

33. $B(5, 2)$, $D(5, 12)$; 35. $\tan^{-1}(\frac{32}{63})$; $9x-7y=1$; $7x+9y=73$;

36. $2ab$ বর্গ একক ; 37. কেন্দ্র : $(5, -3\sqrt{3})$, ব্যাসার্ধ : $2\sqrt{13}$ একক, ক্ষেত্রফল : $7\sqrt{3}$ বর্গ একক।

প্রশ্নমালা 9 (পৃষ্ঠা—84)

1. (i) ধনাত্মক পার্শ্বে ; 2. (i) 4 একক ; (ii) 4 একক ; (iii) 55/13 একক ;

3. 27/5 একক , 4. $(c_1 \sim c_2)/\sqrt{1+m^2}$;

5. $2x+3y+6=0$; 6. 6/5 একক ; 7. $a\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$,

10. $A\left\{a+\frac{a}{b}\sqrt{a^2+b^2}, 0\right\}$; $B\left\{a-\frac{a}{b}\sqrt{a^2+b^2}, 0\right\}$.

11. $x-8y+3=0$; $32x+4y=99$;

14. $4x+2y+5=0$; $x-2y-20=0$; ক্ষেত্রফল $=90\frac{5}{18}$ বর্গ একক ;

15. $3x+4y+15=0$, $3x+4y-15=0$;

16. $y=1$, $4x-3y+3=0$; 17. $x+y=7$, $17x+31y=175$.

18. $9x-y+1=0$; $x+9y-1=0$;

19. $y=x$, $5x+(4+\sqrt{41})y=20$; $(5+\sqrt{41})x+4y=20$;

20. $12x-5y+28=0$; $12x-5y=50$.

21. $x=\sqrt{3}$, $x+y\sqrt{3}=2\sqrt{3}$, $x-y\sqrt{3}=0$. $(\sqrt{3}, 1)$;

22. $7x-4y+699=0$; $11x+3y+272=0$;
$x-7y+672=0$; $(-49, 89)$

23. $(-2, -1)$; 24. $(1, 4)$.

প্রশ্নমালা 10 (পৃষ্ঠা—98)

1. (i) কেন্দ্র : (0, 0) ; ব্যাসার্ধ : 5 একক ;
(ii) কেন্দ্র : (0, 0) ; ব্যাসার্ধ : $2\sqrt{3}$ একক ;
(iii) কেন্দ্র : (2, 3) ; ব্যাসার্ধ : 5 একক ;
(iv) কেন্দ্র : (−2, −3) ; ব্যাসার্ধ : 3 একক ;
(v) কেন্দ্র : (3, −5) ; ব্যাসার্ধ : $\sqrt{13}$ একক ;
(vi) কেন্দ্র : (3, −7) ; ব্যাসার্ধ : 5 একক ;
(vii) কেন্দ্র : (1, −7/6) ; ব্যাসার্ধ : 5/6 একক।

2. (iv), (iii), (ii), (v), (i) ; 3. (iii), (iv), (i), (ii) ;

7. 7·5 বর্গ একক ;

12. $(x+2)^2+(y-10)^2=25$; $(x-2)^2+(y-2)^2=25$;

13. $x^2+y^2-6x+10y+9=0$; 14. $x^2+y^2-4x-6y-12=0$;

15. $x^2+y^2-6x+10y=0$; 16. $x^2+y^2-2x+4y-20=0$;

17. $x^2+y^2-4x-6y-87=0$; 18. $x^2+y^2-12x-8y+34=0$;

19. $x^2+y^2-2x-2y-3=0$; 4 একক ;

20. $27(x^2+y^2)-69x-65y-208=0$;

21. $x^2+y^2-6x+2y-15=0$; কেন্দ্র : $(3, -1)$; ব্যাসার্ধ : 5 একক ;

22. $x^2+y^2-3x+4y=0$; 23. $x^2+y^2-6x-8y=0$;

24. $x^2+y^2-12x+10=0$;

25. $x^2+y^2-8y-9=0$; $x^2+y^2+8y-9=0$;

26. $(x-1)^2+(y-6)^2=9$, কেন্দ্র : $(1, 6)$, ব্যাসার্ধ : 3 একক ;

27. $2(x^2+y^2)-16x-11y+24=0$.

28. $x^2+y^2+38x+32y-33=0$;

29. (i) $3(x^2+y^2)-60x+40y=0$;
 (ii) $x^2+y^2-14x-6y-111=0$;

31. কেন্দ্র : $(5, 2)$; ব্যাসার্ধ : $\sqrt{5}$ একক ;

32. কেন্দ্র : $(5, 0)$; ব্যাসার্ধ : 5 একক ;

33. (i) $r=4$, কেন্দ্র : ($r=0$; θ অনির্ণীত) ;
 (ii) $r^2-4r\cos\theta-5=0$; কেন্দ্র : $(r=2, \theta=0)$;
 (iii) $r+6\cos\theta=0$; কেন্দ্র : $(3, \pi)$;
 (iv) $r^2-8r\cos\theta+7=0$; কেন্দ্র : $(r=4\ , \theta=0)$;
 (v) $r^2-2r(2\cos\theta+3\sin\theta)-12=0$;
 কেন্দ্র : ($r=\sqrt{13}$; $\theta=\tan^{-1} 3/2, 0<\theta<\pi/2$) ;

34. (i) ব্যাসার্ধ : $\sqrt{5}$ একক ; কেন্দ্র : ($r=0$, $\theta=$অনির্ণীত) ;
 (ii) ব্যাসার্ধ : 5/2 একক ; কেন্দ্র : ($r=5/2$; $\theta=0$) ,
 (iii) ব্যাসার্ধ : 3/2 একক ; কেন্দ্র : $(3/2, \pi/2)$;
 (iv) ব্যাসার্ধ : 3 একক ; কেন্দ্র : $(r=5\ , \theta=0)$;
 (v) ব্যাসার্ধ : 7/2 একক ; কেন্দ্র : $(7/2, \pi/2)$;
 (vi) ব্যাসার্ধ : 3 একক ; কেন্দ্র : $(3, \pi/6)$;

35. $r^2-3r(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)-16=0$;

36. $69r^2-41(12+5\sqrt{3})\,r\cos\theta-3(172+41\sqrt{3})\,r\sin\theta$
 $+15(57+41\sqrt{3})=0$;

37. $r=2$; কেন্দ্র : ($r=0$; $\theta=$অনির্ণীত).

প্রশ্নমালা 11 (পৃষ্ঠা—111)

1. (*i*) বৃত্তের মধ্যে ; (*ii*) বৃত্তের বাহিরে ; (*iii*) বৃত্তের উপরে ; (*iv*) বৃত্তের মধ্যে অবস্থিত।

2. (*i*) মধ্যে ; (*ii*) বাহিরে ; (*iii*) উপরে ; (*iv*) উপরে ;

3. $(-2, -4)$; $(4, 2)$; 4. $(-1, -2)$,

6. $(14/13, -8/13)$; 8. $14x - 5y = 40$;

9. $3x + 2y + 13 = 0$; 10. $2x + y = 0$;

11. $(7, -1)$, $(-1, -7)$; দৈর্ঘ্য $=10$ একক ;

13. $x^2 + y^2 - 10x - 14y = 0$; $c = -18, -68$;

14. $5(x^2 + y^2) - 7x - 17y = 46$; 17. $3(x^2 + y^2) - 22x + 16 = 0$;

18. $x^2 + y^2 + 4x - 7y + 5 = 0$; 19. $2x + y - 9 = 0$;

20. $\frac{14}{5}\sqrt{5}$ একক ; 21. $2x + y + 15 = 0$.

প্রশ্নমালা 12 (পৃষ্ঠা—120)

1. (*i*) নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=12$ একক ; নাভির স্থানাঙ্ক : $(3, 0)$;
   (*ii*) নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=3$ একক ; নাভির স্থানাঙ্ক : $(3/4, 0)$;
   (*iii*) নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=5/3$ একক ; নাভির স্থানাঙ্ক : $(5/12, 0)$;
   (*iv*) নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=3$ একক ; নাভির স্থানাঙ্ক : $(-3/4, 0)$;
   (*v*) নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=8/3$ একক ; নাভির স্থানাঙ্ক : $(0, 2/3)$,
   (*vi*) নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=7/2$ একক ; নাভির স্থানাঙ্ক : $(0, -7/8)$.

2. নাভির স্থানাঙ্ক : $(-11/6, 0)$; নিয়ামকের সমীকরণ : $6x = 11$.

3. $1/2$ একক ; $(1/8, 0)$; 4. $(3/10, 0)$

5. $\left[\dfrac{ab}{4(a+b)}, 0\right]$ 6. শীর্ষ : $(2, 3)$; নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য : 6 একক ; অক্ষ : $y = 3$; নিয়ামক : $2x = 1$,

7. শীর্ষ : $(-2, -3)$; নাভি : $(-3/2, -3)$; নিয়ামক : $2x + 5 = 0$.

8. নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=8$ একক ; নাভি : $(-3, -2)$; শীর্ষ : $(-1, -2)$; অক্ষ : $y + 2 = 0$; নিয়ামক : $x = 1$.

9. শীর্ষ : $\left(-\dfrac{b}{2a}, c - \dfrac{b^2}{4a}\right)$; নাভি : $\left(-\dfrac{b}{2a}, c + \dfrac{1 - b^2}{4a}\right)$; নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= 1/a$.

10. $x^2+12y=0$; নিয়ামক : $y=3$;

11. $9x^2=24y+16$;

12. $16x^2+24xy+9y^2-262x+16y+621=0$

13. $49x^2+84xy+36y^2+450x-610y+2100=0$

14. $(y-2)^2+8(x-1)=0$;

15. $(y-3)^2=8(x-2)$; $(4, 7)$; $(4, -1)$.

16. $(y-3)^2=8(x+1)$; শীর্ষ : $(-1, 3)$; $(y-3)^2=-8(x+5)$; শীর্ষ : $(-5, 3)$.

17. $9x^2-24xy+16y^2+508x+156y-2276=0$

18. $x^2-2xy+y^2+2x-6y+3=0$; শীর্ষ : $(-5/4, 3/4)$; নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য = $\sqrt{2}$ একক ;

19. $x^2+12(y-6)=0$; নিয়ামক : $y=9$;

20. $x^2+y^2-12x-8y+27=0$; 6 একক ;

21. $(x-a)^2+y^2=4a^2$;

24. $y^2=\dfrac{4an^2x}{(m+n)^2}$.

প্রশ্নমালা 13 (পৃষ্ঠা—134)

1. (*i*) পরাক্ষের দৈর্ঘ্য = 8 একক ; উপাক্ষের দৈর্ঘ্য = 6 একক ; নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য = 4·5 একক ; নাভিদ্বয় $(\pm\sqrt{7}, 0)$.

(*ii*) পরাক্ষের দৈর্ঘ্য = 8 একক ; উপাক্ষের দৈর্ঘ্য = 6 একক ; নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য = 4·5 একক ; নাভিদ্বয় : $(0, \pm\sqrt{7})$.

(*iii*) পরাক্ষের দৈর্ঘ্য = 10 একক ; উপাক্ষের দৈর্ঘ্য = 6 একক ; নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য = 3·6 একক ; নাভিদ্বয় : $(\pm 4, 0)$;

(*iv*) পরাক্ষের দৈর্ঘ্য = 8 একক ; উপাক্ষের দৈর্ঘ্য = 4 একক ; নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য = 2 একক ; নাভিদ্বয় : $(\pm 2\sqrt{3}, 0)$.

(*v*) পরাক্ষের দৈর্ঘ্য = 3 একক ; উপাক্ষের দৈর্ঘ্য = 2 একক ; নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য = 4/3 একক ; নাভিদ্বয় : $(0, \pm\sqrt{5}/2)$;

(*vi*) পরাক্ষের দৈর্ঘ্য = $2\sqrt{3}/3$ একক ; উপাক্ষের দৈর্ঘ্য = 1 একক ; নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য = $\sqrt{3}/2$ একক ; নাভিদ্বয় $(0, \pm\sqrt{3}/6)$;

(*vii*) পরাক্ষের দৈর্ঘ্য = $4\sqrt{2}$ একক ; উপাক্ষের দৈর্ঘ্য = 4 একক ; নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য = $2\sqrt{2}$ একক ; নাভিদ্বয় : $(\pm 2, 0)$.

2. নাভিদ্বয় : $(\pm 3, 0)$; $e=3/5$; নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=6\cdot4$ একক ;

3. $e=2/3$; নাভিদ্বয় $(\pm 4, 0)$; নিয়ামক : $x=\pm 9$.

4. $x=\pm 3$; 5. নাভিদ্বয় : $(\pm 1, 0)$; $e=\sqrt{5}/5$; 6. $e=\sqrt{2}/2$;

7. পরাক্ষের দৈর্ঘ্য $=6$ একক ; উপাক্ষের দৈর্ঘ্য $=4$ একক ;
নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=8/3$ একক ; নাভিদ্বয় : $(2\pm\sqrt{5}, 3)$.

8. $e=\sqrt{7}/4$; নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=4\cdot5$ একক ; কেন্দ্র ; $(3, -2)$

9. $7x^2+16y^2=28$. 10. $x^2+2y^2=9$;

11. $1584x^2+1089y^2=4096$; 12. $36x^2+20y^2=405$;

13. $x^2+2y^2=2$;

14. $8x^2+3y^2=35$; নাভিদ্বয় : $(0, \pm\sqrt{1050}/12)$;

15. $20x^2+36y^2=405$;

16. $100(\sqrt{481}-9)x^2+9(281-9\sqrt{481})y^2=45000$;
$e=(\sqrt{481}-3)/20$;

17. $4x^2+3y^2-12y-15=0$;

18. $5x^2+9y^2-30x-36y=81/80$;

19. $7x^2+2xy+7y^2+10x-10y+7=0$;

25. $(1-e^2)x^2+(1-e^2)^2y^2=\lambda^2$.

প্রশ্নমালা 14 (পৃষ্ঠা—148)

1. (a) (i) 4 একক ; (ii) 8/3 একক ; (iii) $\sqrt{13}/3$; (iv) $(\pm\sqrt{13}, 0)$; (b) (i) 6 একক ; (ii) 9 একক ; (iii) $\sqrt{13}/2$; (iv) $(\pm\sqrt{13}, 0)$, (c) (i) $2\sqrt{3}$ একক ; (ii) 3 একক ; (iii) $\sqrt{7}/2$, (iv) $(0, \pm\sqrt{7})$; (d) (i) $2\sqrt{15}/3$ একক, (ii) $4\sqrt{10}/3$ একক, (iii) $\sqrt{33}/3$; (iv) $(0, \pm\sqrt{330}/12)$

2. (i) অনুপ্রস্থ অক্ষ : 6 একক ; অনুবন্ধী অক্ষ : 4 একক, (ii) $e=\sqrt{13}/3$; (iii) নাভিদ্বয় : $(\pm\sqrt{13}, 0)$, (iv) নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য : 8/3 একক ;

3. নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য : 3 একক ; $e=2$; নাভিদ্বয় : $(\pm 1, 0)$;

4. $(\pm 2\sqrt{10}, 0)$, 5. $e=\frac{1}{7}\sqrt{77}$; $y=\pm\frac{2}{11}\sqrt{33}$;

6. $e=\sqrt{2}$; নাভিদ্বয় : $(\pm a\sqrt{2}, 0)$; নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=a$ একক ;

7. $e=\sqrt{2}$, নাভিদ্বয় : $(0, \pm 5\sqrt{2})$; নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য : 10 একক ; নিয়ামক : $y=\pm 5\sqrt{2}/2$;

8. $e=5/4$; নাভিদ্বয় : $(-2, 8)$; $(-2, -2)$; নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য : 9/2 একক।

9. $7x^2-9y^2=81$; 10. $9y^2-16x^2=1024$;

11. $x^2/9-y^2/16=1$; 12. $3y^2-x^2=12$

13. $2x^2-2y^2=a^2$; 14. $9y^2-4x^2-18y-24x-63=0$;

15. $2x^2-12xy-7y^2-14x-18y+62=0$

প্রশ্নমালা 15 (পৃষ্ঠা—165)

2. বাহিরে, 3. বাহিরে, 4. অভ্যন্তরে,

5. $P(1, 1)$; $Q(4, -2)$, 6. $P(4, 2)$; $Q(9, 3)$;

7. $P(6, 0)$; $Q(0, 3)$, 8. $2\sqrt{2}$ একক,

9. $8\sqrt{2}$ একক, 10. $\sqrt{13}$ একক, 11. $4\sqrt{5}$ একক,

12. $2ab\sqrt{1+m^2}/\sqrt{b^2-a^2m^2}$; 14. $4x+3y+1=0$

15. $3x+y+5=0$; 16. $\frac{h}{a^2}(x-h)+\frac{k}{b^2}(y-k)=0$.

17. $9x-8y+43=0$; 18. $8x-9y-21=0$;

19. $x-2y+1=0$; 21. $4y^2+4y-3x+9=0$;

23. $y^2-6x=3y+12$; 24. $5x^2+8y^2=10x-8y$;

25. $9x^2-16y^2=45x+32y$, 26. $2y+1=0$, 28. $y=2x$.

প্রশ্নমালা 16 (পৃষ্ঠা—188)

1. (i) $3x+4y=25$; (ii) $2x-3y+13=0$;

(iii) $3x+4y-20=0$; (iv) $x-y+1=0$;

(v) $4y+x+6=0$; (vi) $x+y+2=0$;

(vii) $x-2y=3$; (viii) $x+y=5$;

(ix) $2x-3y+8=0$; (x) $4x-3y=12$;

(xi) $x+y=1$; (xii) $x\sqrt{2}+y=2$;

(xiii) $x+t^2y=2ct$;

2. (i) $3x+2y=0$; (ii) $x+2y=5$;

(iii) $x-y=6$; (iv) $x-y=6$;

(v) $x+y=2$; (vi) $4x-9y+21=0$;

(vii) $t^3x-ty=c(t^4-1)$.

3. $y=x\pm\sqrt{10}$; 4. $9x+3y+2=0$, $(2/9, -4/3)$;

5. $(3/4, 3)$; 6. $4x-3y+67=0$; $4x-3y-33=0$;

7. $k=34$; -16 ; $P(-7, -2)$; $Q(1, 4)$; 8. $(2, 6)$;

9. $(16/5, -9/5)$; 10. $5x+24y\pm13=0$;

11. $x-3y\pm4=0$; 12. $8x-9y=5$; স্পর্শবিন্দু : $(4, 3)$;

$8x-9y+5=0$, স্পর্শবিন্দু : $(-4, -3)$.

13. $5x-6y=\pm18$, 14. $y=\pm(x+a)$;

15. $x-y+1=0$, $x+y+7=0$. 16. $3x+y=9$;

17. $L(\sqrt{7}, 18/5)$ বিন্দুতে অভিলম্ব : $5x-y\sqrt{7}=7\sqrt{7}/5$;

$L'(\sqrt{7}, -18/5)$ বিন্দুতে অভিলম্ব : $5x+y\sqrt{7}=7\sqrt{7}/5$;

18. $17x-21y=595$; $x+3y+5=0$;

19. $y=\pm(x+2)$, 20. $x\sqrt[3]{a}+y\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{(ab)^2}=0$;

24. $(a^2\cos\alpha/p,\ b^2\sin\alpha/p)$;

25. $y+mx=2am+am^3$; 26. $(am^2, -2am)$.

প্রশ্নমালা 17 (পৃষ্ঠা—196)

1. $x^2+y^2+x+2y=0$; 3. $x^2+y^2=a^2-b^2$, $(a>b)$;

5. $y=-2$; $5y+12x=26$; $\tan^{-1}(12/5)$;

6. $y=0$; $4y-3x=0$; 7. $(0, 3)$; $y=3$;

8. $y=x+3$; $y+x+3=0$; 9. $x^2+y^2-4x-6y+4=0$;

10. $11(x^2+y^2)=23x+102y$; 11. $\left(\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

12. $9x^2-16y^2=144$; **13.** $x+y=5$;

14. $x^2+y^2-24x-24y\sqrt{2}+144=0$;

16. $y=x-3$; $9y=x+13$; $\tan^{-1}(4/5)$;

17. 10 ; $(-5, -16/3)$; **15.** $x^2+y^2=5(x-y)$;

19. $2x+y+1=0$; $x-2y+8=0$;

22. (18, 27) ; **24.** $y^2=x^2+6ax+a^2$;

25. $x+a=0$; **28.** $y^2=2a(x-a)$;

29. $y^2=2x-4$; **34.** $[at_1t_2 , a(t_1+t_2)]$.

প্রশ্নমালা 18 (পৃষ্ঠা—207)

1. $P_2(1, 1)$. **2.** $P'(4, 3)$; $Q'(4, -3)$.

3. (a) $2y=15$; (b) $x+y+2=0$.